I.W. MESTSCHERSKI

AUFGABENSAMMLUNG ZUR MECHANIK

DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

I. W. MESTSCHERSKI

AUFGABENSAMMLUNG ZUR MECHANIK

DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

I. W. MESTSCHERSKI · AUFGABENSAMMLUNG ZUR MECHANIK

HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK

BAND 13

AUFGABENSAMMLUNG ZUR MECHANIK

VON I. W. MESTSCHERSKI

1955

VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

BERLIN

И. В. МЕЩЕРСКИЙ
Сборник задач по
теоретической механике

Vom Ministerium für Hochschulbildung der UdSSR
als Hilfslehrbuch für höhere Lehranstalten zugelassen

Erschienen im Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur Moskau-Leningrad 1953

Die Übersetzung und Bearbeitung nach der 19. unveränderten Auflage, die von A. I. Lurje zusammengestellt wurde, lag in den Händen von Prof. Dr.-Ing. H. Neuber und Dr.-Ing. F. Holzweißig

Printed in Germany
Lizenz Nr. 206 · 435/414/54
Gesamtherstellung: VEB Landesdruckerei Sachsen, Dresden

Inhaltsverzeichnis

DRITTER TEIL

Dynamik

Vorwort zur sechzehnten Auflage

Die vorliegende sechzehnte Auflage des Buches von I. W. MESTSCHERSKI „Aufgabensammlung zur Mechanik“ stellt eine wesentliche Umarbeitung aller vorhergehenden Auflagen dar und enthält eine große Zahl neuer Aufgaben. Um den Umfang des Buches nicht zu vergrößern, hat man deshalb eine Anzahl unbedeutender Aufgaben weggelassen. Auf diese Weise enthält die vorliegende Zusammenstellung 1363 Aufgaben, von denen 364 neu hinzugekommen sind. Die vorherigen Auflagen umfaßten nur 1140 Aufgaben. Die Numerierung der einzelnen Aufgaben wurde aus den oben erwähnten Gründen ebenfalls geändert.

Der Abschnitt Dynamik des Punktes und des Systems wurde gründlich umgearbeitet. Es wurden Paragraphen eingeführt, die Aufgaben über analytische Statik, Dynamik von Systemen mit veränderlicher Masse und die Theorie der Bewegungsstabilität enthielten.

Die Vorbereitungsarbeiten zu dieser Auflage wurden, wie auch die vorhergehenden Arbeiten, vom Lehrerkollektiv für Mechanik des Leningrader Polytechnischen Instituts M. I. KALININ durchgeführt. S. A. SOROKOW stellte den Abschnitt für Statik, N. N. NAUGOLNAJA und A. S. KELSON den Abschnitt für Kinematik, A. S. KELSON den Abschnitt für Dynamik des materiellen Punktes, M. I. BAT den Abschnitt für Dynamik des materiellen Systems, G. J. DSHANELIDSE die Aufgaben über analytische Mechanik und die erwähnten neu hinzugekommenen Aufgaben zusammen.

Einen wesentlichen Beitrag leisteten dem Kollektiv eine Anzahl von Mitarbeitern durch Einsendung neuer Aufgaben sowie wertvoller Bemerkungen und Ratschläge. In diesem Zusammenhang halten wir es für unsere Pflicht, unseren Dank an G. D. ANANOW, W. N. BUTENIN, A. G. WOROBJOW, W. K. GOLZMAN, A. N. DOKUTSCHAJEW, W. G. SHUIKOWAJA, A. I. SENKIN, J. L. LUNZ, K. W. MELIKOW, G. S. SANTURIAN, N. M. SCHACHUNJANZ, I. J. STAJERMAN, W. S. SCHTEDROW, A. A. STSCHURAGIN und L. W. JANKOWSKAJA auszusprechen.

Die Themen zu einigen neuen Aufgaben sind den Arbeiten unserer Gelehrten N. E. SHUKOWSKI, S. A. TSCHAPLYGIN, I. W. MESTSCHERSKI und E. L. NIKOLAI entnommen.

Vorwort zur vierzehnten Auflage

„Aufgabensammlung zur Mechanik“ von I. W. MESTSCHERSKI

Ursprünglich erfolgte diese Zusammenstellung nach der Idee und der Fassung von I. W. MESTSCHERSKI unter Mithilfe einer Gruppe von Lehrern der Mechanik des ehemaligen Petersburger Polytechnischen Instituts als Hilfsmittel für den Unterricht in dieser Hochschule. Nach und nach jedoch erhielt

das Buch eine beachtliche Verbreitung in unseren Hochschulen. Seit 1914, als die erste Auflage dieses Werkes erschienen war, erfuhr dasselbe noch zu Lebzeiten von I. W. MESTSCHERSKI acht Auflagen. Bevor die ersten Auflagen im Druck erschienen, wurden einige Auflagen auf lithographischem Wege hergestellt.

Die Verfasser der Aufgaben, die im Jahre 1914 in der ersten Auflage veröffentlicht wurden, waren: L. W. ASSUR, I. I. BENTKOWSKI, A. A. GOREW, K. M. DUBJAGA, I. W. MESTSCHERSKI, W. F. MITKEWITSCH, E. L. NIKOLAI, K. E. REHRICH, D. L. TAGEJEW, W. W. TAKLINSKI, A. I. TUDOROWSKI, A. K. FEDERMAN, W. D. SCHATROW und andere. An den nachfolgenden Auflagen waren auch E. K. MITROPOLSKI und M. L. FRANK beteiligt.

Im Jahre 1936, nach dem Tode I. W. MESTSCHERSKIs, ist die zehnte Auflage der Aufgabensammlung gedruckt worden. Sie wurde vom Lehrerkollektiv der Mechanik des Leningrader Polytechnischen Instituts zusammengestellt. Dasselbe Kollektiv stellte unter tatkräftiger Mitwirkung von Lehrern anderer Leningrader Hochschulen die elfte und dreizehnte Auflage, die im Jahre 1938 erschienen ist, zusammen.

An dieser Zusammenstellung beteiligten sich: M. I. AKIMOW, M. I. BAT, B. A. BERG, N. K. GORTSCHIN, J. W. DOLGOLENKO, A. S. KELSON, J. G. KORNILOW, A. I. LURJE, K. W. MELIKOW, N. N. NAUGOLNAJA, P. I. NELJUBIN, N. P. NERONOW, E. L. NIKOLAI, W. F. PEKIN, P. N. SEMJONOW, A. A. SMIRNOW, S. A. SOROKOW, A. I. TSCHEKMARJOW.

Die vierzehnte Auflage erfuhr eine wesentliche Änderung. Die Zahl der Aufgaben stieg auf 1140, der Text wurde anders gefaßt, einige Aufgaben wurden gestrichen, und sämtliche Lösungen wurden überprüft. Die größte Erweiterung erhielten die Abschnitte „Dynamik des materiellen Punktes“ und „Dynamik des materiellen Systems“, wobei auch die Gleichungen von LAGRANGE und die Theorie der Schwingungen kleiner Ausschläge hinzukamen. Die Vorbereitungsarbeiten zur vierzehnten Auflage wurden ebenfalls vom Lehrerkollektiv der Mechanik des Leningrader Polytechnischen Instituts durchgeführt. Den Abschnitt für Statik faßte S. A. SOROKOW, den Abschnitt für Kinematik N. N. NAUGOLNAJA und A. S. KELSON, den Abschnitt für Dynamik des materiellen Punktes A. S. KELSON, den Abschnitt für Dynamik des materiellen Systems M. I. BAT zusammen. Die Gleichungen von LAGRANGE und die Schwingungstheorien hat G. J. DSHANELIDSE zusammengestellt.

A. I. LURJE bereitete das gesamte Buch für den Druck vor.

Außer den genannten Beteiligten haben für diese Auflage N. S. WABISTSCHEWITSCH, N. I. IDELSON, W. L. KAN, A. I. CHOLODNJAK und A. I. ZYMLOW eine Anzahl neuer Aufgaben zur Verfügung gestellt.

Wir halten es für unsere Pflicht, den besten Dank an I. J. STAJERMAN, W. S. SCHTEDROW und L. W. JANKOWSKAJA für die wertvollen Hinweise, die zur Verbesserung des Buches beigetragen haben, auszusprechen.

ERSTER TEIL

STATIK STARRER KÖRPER

I. Ebenes Kräftesystem

1. Geradlinig wirkende Kräfte

1. An einem Punkt wirken folgende Kräfte: $P_1 = 10$ kg; $P_2 = 20$ kg; $P_3 = 12$ kg; $P_4 = 18$ kg.

Man bestimme die resultierende Kraft für folgende Fälle:

1. Sämtliche angegebenen Kräfte wirken auf einer Geraden und in einer Richtung.
2. Die ersten zwei Kräfte P_1, P_2 wirken in einer Richtung, die beiden anderen Kräfte P_3, P_4 in entgegengesetzter Richtung.

Lösung: 1) 60 kg 2) 0 kg.

2. Eine Federwaage hängt fest an einem Haken und ist mit einem Gewicht von 10 kg belastet.

1. Wie groß muß die aufzuwendende Kraft sein, um die abgenommene Waage zu halten?
2. Was wird die Waage anzeigen, wenn sie anstatt durch das Gewicht durch die Hand einer Person belastet wird, wobei die Handkraft 10 kg betragen soll? (Das Eigengewicht der Waage ist zu vernachlässigen.)

Lösung: 1) 10 kg 2) 10 kg.

3. An einem Seil hängen die Gewichte $G_1 = 10$ kg und $G_2 = 5$ kg, wobei G_1 tiefer als G_2 angebracht ist. Wie groß ist die Seilkraft

1. über G_1,
2. über G_2?

Lösung: 1) 10 kg 2) 15 kg.

4. Ein homogenes Prisma mit der Höhe $h = 5$ m und einem Gewicht $Q = 3$ t steht auf einem festen Fundament und wird mit $P = 4$ t belastet.

Man bestimme den Druck des Prismas auf das Fundament und die zusammendrückenden Kräfte in folgenden Querschnitten:

1. Abstand von der oberen Kante $l_1 = 0{,}5$ m.
2. Abstand von der unteren Kante $l_2 = 0{,}5$ m.

Lösung: Fundamentdruck: 7 t,
Kraft im Schnitt 1: 4,3 t,
Kraft im Schnitt 2: 6,7 t.

5. Ein Schleppdampfer zieht drei Kähne verschiedener Größe, die hintereinander an dem Schlepper befestigt sind. Die Zugkraft der Schraube des Schleppers beträgt zum gegebenen Zeitpunkt 1800 kg. Der Wasserwiderstand des Schleppers beträgt 600 kg, der Wasserwiderstand des ersten Kahnes 600 kg, der des zweiten Kahnes 400 kg und der des dritten Kahnes 200 kg. Das zur Verfügung stehende Seil erträgt eine Zugkraft von 200 kg.

Wieviel Seile sind notwendig zur Befestigung des ersten Kahnes an dem Schlepper, zwischen dem ersten und zweiten Kahn und zwischen dem zweiten und dritten Kahn?

Lösung: Befestigung des ersten Kahnes: 6 Seile;
Befestigung des zweiten Kahnes: 3 Seile;
Befestigung des dritten Kahnes: 1 Seil.

6. Eine Last $Q = 30$ kg wird durch ein Gegengewicht in Ruhe gehalten. Das Gegengewicht ist am Ende des über eine Scheibe verlegten Seiles ABC befestigt. Das Seil wiegt 5 kg. Man bestimme unter Vernachlässigung der Seilsteifigkeit, der Seilreibung und des Scheibenradius das Gewicht P und die Kräfte F_A, F_C, die das Seil an den Enden A und C dehnen, sowie die Kräfte, die im Mittelschnitt B des Seiles wirken, unter folgenden Bedingungen:

1. Wenn die Punkte A und C sich auf einer Höhe befinden,
2. wenn der Punkt A die höchste Stellung einnimmt,
3. wenn der Punkt A die tiefste Stellung einnimmt.

Lösung: 1) $P = 30$ kg; $F_A = 30$ kg; $F_B = 32{,}5$ kg; $F_C = 30$ kg;
2) $P = 25$ kg; $F_A = 30$ kg; $F_B = 27{,}5$ kg; $F_C = 25$ kg;
3) $P = 35$ kg; $F_A = 30$ kg; $F_B = 32{,}5$ kg; $F_C = 35$ kg.

7. Auf der Sohle eines Schachtes steht ein Mann, der 64 kg wiegt; an einem Seil, das über eine feste Rolle gelegt ist, hält der Mann eine Last von 48 kg.

1. Wie groß ist der Druck des Mannes auf die Schachtsohle?
2. Wie groß ist die Höchstlast, die der Mann mit dem Seil halten kann?

Lösung: 1) 16 kg 2) 64 kg.

8. Ein Zug fährt auf einer geraden, waagerechten Strecke mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit; der Zug ohne Lokomotive wiegt 180 t. Wie groß ist die Zugkraft der Lokomotive, wenn der Fahrwiderstand des Zuges 0,005 des Zugdruckes auf die Schienen beträgt?

Lösung: 900 kg.

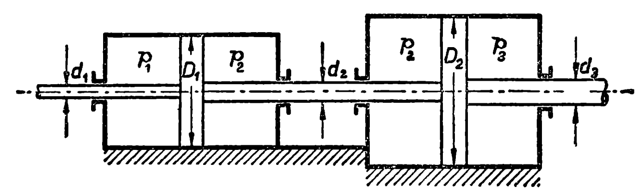
9. Ein Personenzug besteht aus einer Lokomotive, einem Tender von 45 t Gewicht, einem Gepäckwagen von 20 t Gewicht und 5 Personenwagen, von denen jeder 48 t wiegt. Mit welcher Kraft werden die Kupplungen der Wagen gespannt, und wie groß ist die Zugkraft der Lokomotive, wenn der Fahrwiderstand des Zuges $\frac{1}{200}$ seines Gewichtes beträgt? Es ist anzunehmen, daß sich dieser Widerstand gleichmäßig auf den ganzen Zug im Verhältnis zum Gewicht verteilt.

Lösung: Die Lokomotivkupplung hat zu übertragen (Zugkraft der Lokomotive): 1525 kg.

Die Kupplung des letzten Wagens hat zu übertragen: 240 kg.

Die Kupplung des vorletzten Wagens: $2 \cdot 240 = 480$ kg usw.

10. Man bestimme den mittleren Wert der Kraft, die von der Kolbenstange einer Dampfmaschine mit gleichmäßig hintereinander geschalteten Zylindern übertragen wird. Durchmesser der Kolben $D_1 = 320$ mm, $D_2 = 600$ mm, Durchmesser der Kolbenstangen: $d_1 = 60$ mm, $d_3 = 100$ mm, mittlerer Dampfdruck: $p_1 = 9{,}5$ kg/cm², $p_2 = 2{,}5$ kg/cm², $p_3 = 0{,}1$ kg/cm².



Lösung: 12,1 t.

2. Kräfte, deren Wirkungslinien sich in einem Punkte schneiden

11. Vom Zentrum eines gleichschenkligen Sechsecks aus wirken nach den Ecken hin Kräfte der Größe 1 kg, 3 kg, 5 kg, 7 kg, 9 kg und 11 kg.

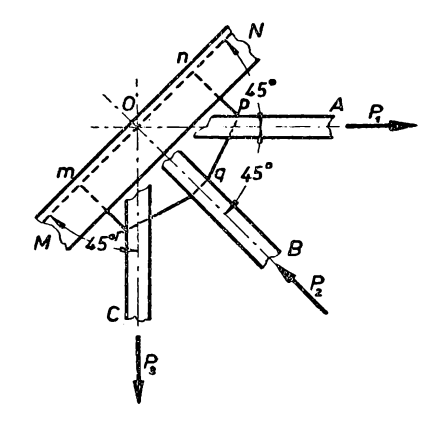
Es sind Größe und Richtung der Resultierenden und der Ausgleichenden (Reaktionskraft) zu bestimmen.

Lösung: Die Resultierende der Größe 12 kg liegt in Richtung der Kraft von 9 kg. Die Ausgleichende hat entgegengesetzte Richtung.

12. Man stelle die Kraft fest, die vom Knotenblech *mnpqr* auf die Strebe *MN* übertragen wird. In Richtung *OA*, *OB* und *OC* wirken die Kräfte

$P_1 = P_3 = 141$ kg und $P_2 = 100$ kg.

Die Richtungen der Kräfte sind auf der Zeichnung angegeben.

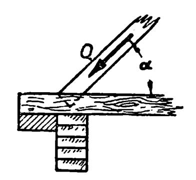


Lösung: Eine resultierende Kraft von 100 kg wirkt in entgegengesetzter Richtung von P_2 auf der Geraden *OB*.

13. Eine Kraft von 8 kg ist in zwei Teilkräfte mit je 5 kg zu zerlegen. Kann man die gleiche Kraft zerlegen in zwei Teilkräfte von je 10 kg, 15 kg, 20 kg usw. oder auch in zwei Teilkräfte von je 100 kg?

Lösung: Ja, wenn die Richtung der Zerlegung nicht angegeben ist.

14. In Richtung eines Dachstuhles, der einen Winkel $\alpha = 45°$ besitzt, wirkt die Kraft $Q = 250$ kg. Wie hoch ist die Kraft S, die dabei im waagerechten Zugbalken entsteht, und wie hoch ist die Kraft N, die auf die Wand in senkrechter Richtung wirkt?



Lösung: $S = N = 177$ kg.

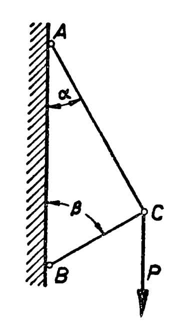
15. Zwei Traktoren, die an den beiden Ufern eines geraden Kanales mit gleichförmiger Geschwindigkeit entlangfahren, ziehen an je einem Seil einen Kahn. Die Spannkräfte der Seile betragen 80 kg und 96 kg; der Winkel zwischen ihnen beträgt 60°. Es ist der Wasserwiderstand P beim Schwimmen des Kahnes zu bestimmen und die Winkel α und β, die die Seile mit dem Ufer des Kanales bilden, wenn der Kahn parallel zum Ufer schwimmt.

Lösung: $P = 153$ kg; $\alpha = 33°$; $\beta = 27°$.

16. Die Ringe A, B und C von drei Federwaagen sind fest an einem waagerechten Brett befestigt. Im Punkte D sind die gespannten Federwaagen verbunden; sie zeigen dabei 8 kg, 7 kg und 13 kg an. Es sind die Winkel α und β gemäß der nebenstehenden Skizze zu bestimmen.

Lösung: $\alpha = 27{,}8°$; $\beta = 32{,}2°$.

17. Die Stäbe AC und BC sind miteinander im Punkte C und an der senkrechten Wand durch Gelenke A und B verbunden. Auf den Gelenkbolzen C wirkt eine senkrechte Kraft $P = 1000$ kg. Es sind die Stabreaktionen auf den Gelenkbolzen C zu bestimmen, wobei die Winkel zwischen den Stangen und der Wand $\alpha = 30°$ und $\beta = 60°$ betragen.



Lösung:

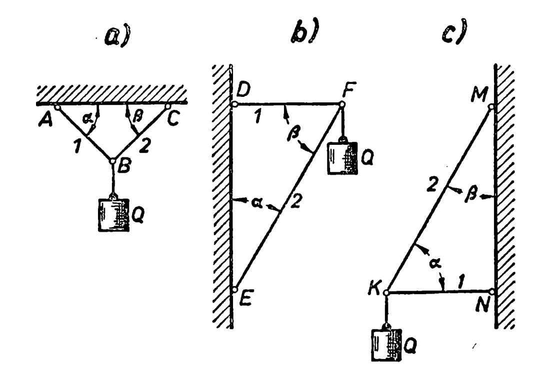
Stabreaktion $BC = 500$ kg; Stabreaktion $AC = 866$ kg.

18. Die Skizzen *a*, *b* und c zeigen drei Stabverbandsschemata. Die Stäbe sind miteinander sowie mit der Decke und den Wänden durch Gelenke verbunden. An den Gelenkbolzen B, F und K ist eine Last $Q = 1000$ kg angebracht. Es sind die Stabkräfte für folgende Winkel zu bestimmen:

a) $\alpha = \beta = 45°$;
b) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$;
c) $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.

Als Stabkraft wird hier die innere Kraft bezeichnet, die längs des Stabes wirkt, d. h. die Zug- oder Druckkraft. Zum Unterschied wird die Druckkraft mit einer negativen Zahl ausgedrückt.

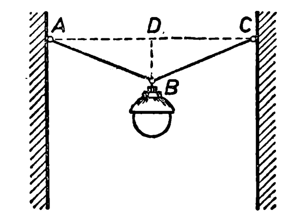
Lösung: a) $S_1 = S_2 = 707$ kg;
b) $S_1 = + \ 577$ kg,
$S_2 = - 1154$ kg;
c) $S_1 = - \ 577$ kg,
$S_2 = + 1154$ kg.



19. Eine Straßenlaterne hängt am Punkt B in der Mitte des Seiles ABC, welches an den Haken A und C befestigt ist. Es sind die Kräfte T_1 und T_2 in den Teilen des Seiles AB und BC festzustellen, wenn die Laterne 15 kg wiegt. Das gesamte Seil ABC hat eine Länge von 20 m. Die Abweichung BD des Anhängepunktes von der Horizontalen beträgt 0,1 m.

Das Gewicht des Seiles ist zu vernachlässigen.

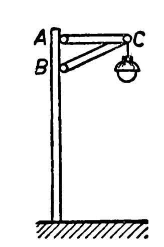
Lösung: $T_1 = T_2 = 750$ kg.



20. Eine Straßenlaterne mit einem Gewicht von 30 kg hängt an der waagerechten Strebe $AC = 1{,}2$ m und einer Abstützstrebe $BC = 1{,}5$ m, die an einem senkrechten Pfosten befestigt sind.

Es sind die Kräfte S_1 und S_2 in den Streben AC und BC zu bestimmen, wobei angenommen werden soll, daß die Punkte A, B und C Gelenkbefestigungen besitzen.

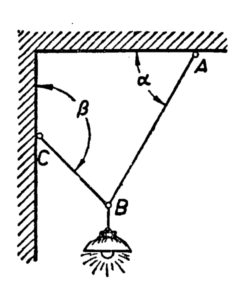
Lösung: $S_1 = 40$ kg; $S_2 = - 50$ kg.



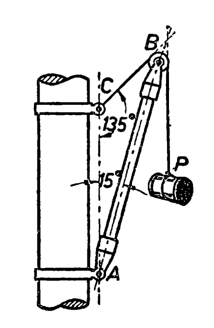
21. Eine elektrische Leuchte mit einem Gewicht von 2 kg hängt an dem Kabel AB an der Decke und wird mit einer Schnur BC zur Wand gezogen.

Es sind die Kräfte T_A des Kabels AB und T_C der Schnur BC festzustellen, wobei die Winkel $\alpha = 60°$ und $\beta = 135°$ bekannt sind. Das Gewicht des Kabels und der Schnur soll vernachlässigt werden.

Lösung: $T_A = 1{,}46$ kg; $T_C = 1{,}04$ kg.



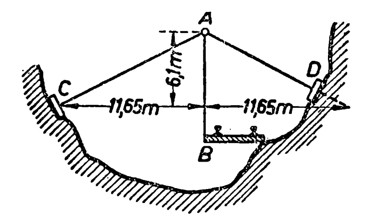
22. Ein Mastkran besteht aus dem Pfeiler AB, der mit dem Gelenk A am Mast befestigt ist, und der Kette CB. Am Ende des Pfeilers hängt im Punkt B eine Last $P = 200$ kg; die Winkel betragen $BAC = 15°$, $ACB = 135°$.



Es sind die Kraft T der Kette CB und die Kraft Q im Pfeiler AB festzustellen.

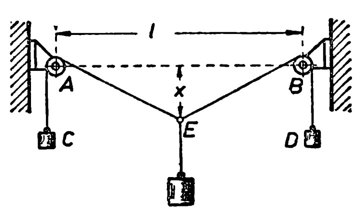
Lösung: $T = 104$ kg; $Q = 283$ kg.

23. Bei einer in den Bergen verlegten Eisenbahn ist ein Abschnitt derselben in einer Schlucht so aufgehängt, wie die Skizze es angibt. Die Abmessungen sind aus der Skizze ersichtlich. Für die Annahme, daß die Aufhängung AB mit einer Kraft von $P = 50$ t belastet wird, sind die Kräfte AC und AD festzustellen.



Lösung: Die Stangen AC und AD werden mit gleichen Kräften 53,9 t zusammengedrückt.

24. Über zwei sehr kleine Rollen A und B, die auf einer horizontalen Geraden $AB = l$ liegen, läuft eine Schnur $CAEBD$. An den beiden Enden C und D der Schnur ist ein Gewicht p angebracht und in dem Punkt E ein Gewicht P. Es ist, unter Vernachlässigung der Reibung an den Scheiben, der Abstand x des Punktes E von der Geraden AB in der Gleichgewichtslage festzustellen. Das Gewicht der Schnur wird vernachlässigt.



Lösung: $x = \frac{P \cdot l}{2\sqrt{4p^2 - P^2}}$.

25. Eine Last von 25 kg Gewicht werde von zwei Seilen im Gleichgewicht gehalten. Die Seile laufen über Rollen und werden von zwei Gewichten gespannt. Eines der beiden Gewichte wiegt 20 kg; der Sinus des Winkels, der vom entsprechenden Seil mit der Senkrechten gebildet wird, ist 0,6. Unter Vernachlässigung der Rollenreibung sind das Gewicht p der zweiten Last und der Winkel α, den das zweite Seil mit der Senkrechten bildet, festzustellen. Das Gewicht der Seile ist zu vernachlässigen.

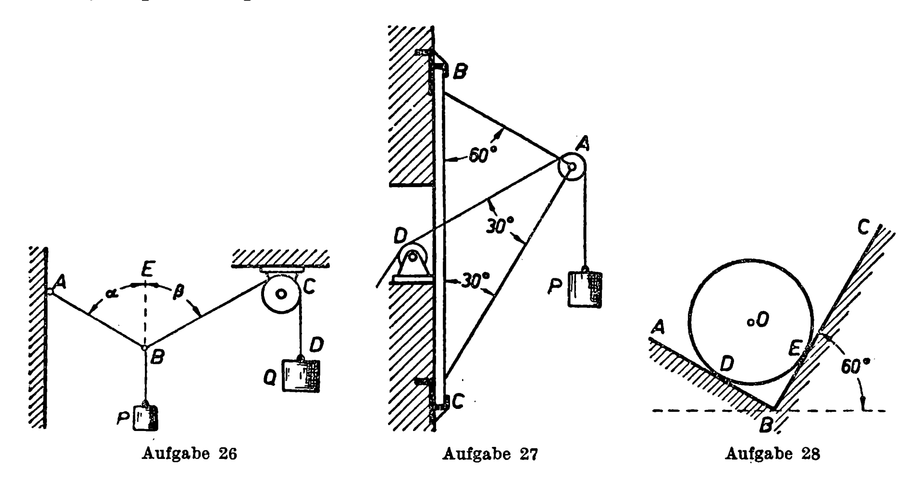
Lösung: $\alpha = 53° \, 10'$; $p = 15$ kg.

26. Eine Last P hängt an den beiden Seilen AB und BCD. Das Seil BCD läuft über eine Rolle und trägt am Ende D ein Gewicht $Q = 10$ kg. AB ist in A an der Wand befestigt. Es sind unter Vernachlässigung der Reibung die Belastung T des Seiles AB und das Gewicht der Last P festzustellen, wobei die Winkel, die die Seile mit der Senkrechten BE in der Gleichgewichtslage bilden, $\alpha = 45°$; $\beta = 60°$ betragen.

Lösung: $T = 12{,}2$ kg; $P = 13{,}7$ kg.

27. Ein Magazinkran trägt eine Last von $P = 2$ t, die mit Hilfe der zwei Rollen A und D gehoben werden kann. Der Winkel CAD beträgt 30°; die Winkel zwischen den Kranstäben sind: $ABC = 60°$, $ACB = 30°$. Die Stabkräfte Q_1 und Q_2 in den Stangen AB und AC sind zu ermitteln.

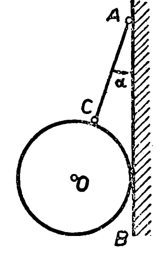
Lösung: $Q_1 = 0$; $Q_2 = -3{,}46$ t.



Aufgabe 26 Aufgabe 27 Aufgabe 28

28. Auf zwei rechtwinklig aufeinanderstehenden glatten Flächen AB und BC liegt eine Kugel O von 6 kg Gewicht. Es ist der Druck der Kugel auf jede Fläche festzustellen. Die Fläche BC bildet mit der Horizontalen einen Winkel von 60°.

Lösung: $N_E = 3$ kg; $N_D = 5{,}2$ kg.



29. An einer senkrechten glatten Wand AB hängt an einem Seil AC eine Kugel O. Das Seil bildet mit der Wand den Winkel α, das Gewicht der Kugel ist P.

Es ist die Seilkraft T und der Druck Q der Kugel auf die Wand festzustellen.

Lösung: $T = \frac{P}{\cos\alpha}$; $Q = P \operatorname{tg} \alpha$.

30. Eine 20 kg schwere Kugel wird von einem Seil auf einer glatten geneigten Fläche gehalten. Das Seil ist an einer Federwaage oberhalb der Fläche befestigt. Die Federwaage zeigt 10 kg an. Der Neigungswinkel der Fläche ist 30°. Es sind

der Winkel α, der sich zwischen dem Seil und der Senkrechten ergibt, und der Druck Q der Kugel auf die Fläche festzustellen. Das Gewicht der Federwaage ist zu vernachlässigen.

Lösung: $\alpha = 60°$; $Q = 17{,}3$ kg.

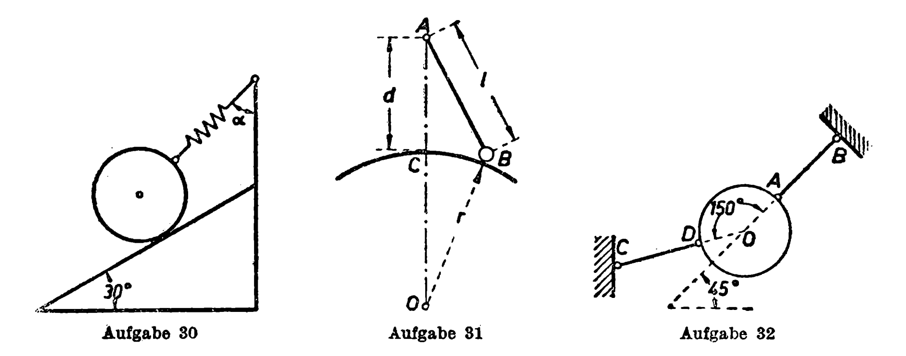
31. Eine Kugel vom Gewicht P hängt an einem Faden AB und liegt oberhalb der kugeligen Fläche mit dem Radius r auf. Der Abstand des Punktes A von der kugeligen Fläche ist $AC = d$, die Länge des Fadens $AB = l$, die Gerade AO ist eine Senkrechte. Es sind die Seilkraft T und die Reaktion Q der kugeligen Fläche festzustellen. Der Radius der kleinen Kugel ist zu vernachlässigen.

Lösung: $Q = P \cdot \frac{r}{d + r}$; $T = P \cdot \frac{l}{d + r}$.

32. Eine 10 kg schwere Kugel wird von zwei Seilen AB und CD im Gleichgewicht gehalten. Die Seile liegen in einer senkrechten Ebene und bilden miteinander einen Winkel von 150°. Das Seil AB weist eine Neigung von 45° auf.

Es sind die Kräfte der Seile festzustellen.

Lösung: $T_C = 14{,}1$ kg; $T_B = 19{,}3$ kg.

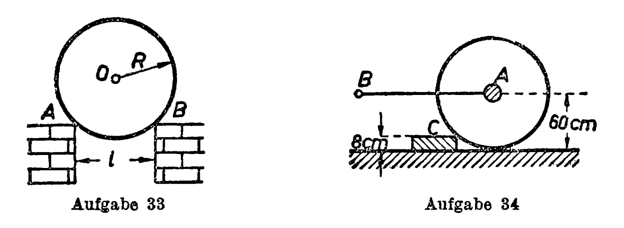


Aufgabe 30 Aufgabe 31 Aufgabe 32

33. Ein Kessel vom Gewicht $P = 4$ t und einem Radius $R = 1$ m liegt gleichmäßig über der ganzen Länge auf dem Fundament auf. Der Abstand zwischen den Wänden der Mauer beträgt $l = 1{,}6$ m.

Unter Außerachtlassung der Reibung ist der Druck des Kessels auf die Mauer in den Punkten A und B festzustellen.

Lösung: $N_A = N_B = 3{,}33$ t.



Aufgabe 33 Aufgabe 34

34. Das Gewicht einer Straßenwalze beträgt 2 t, der Radius der Walze sei 60 cm.

Es ist die waagerechte Kraft *P*, die erforderlich ist, um die Walze über ein 8 cm hohes Hindernis zu ziehen, zu berechnen. Die Kraft *P* wirkt in der durch die Zeichnung angegebenen Richtung.

Lösung: $P = 1{,}15$ t.

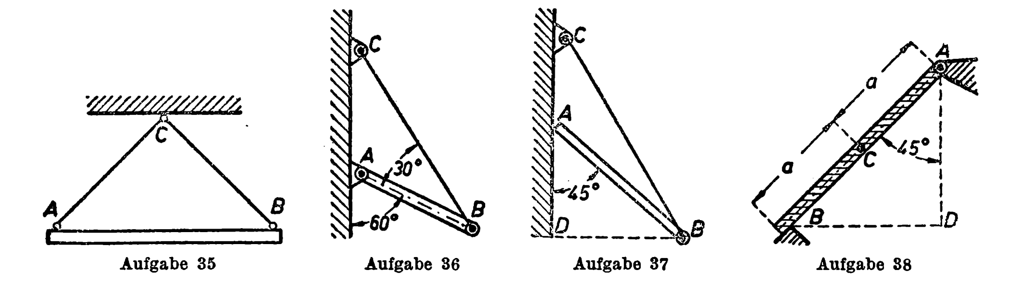
35. Eine 16 kg schwere und 1,2 m lange Stange *AB* hängt im Punkt *C* an zwei Seilen *AC* und *CB*, die beide 1 m lang sind. Es ist die Seilkraft festzustellen.

Lösung: Jedes Seil hat eine Kraft von 10 kg aufzunehmen.

36. Eine Stange *AB* ist an einer senkrechten Wand mit dem Gelenk *A* befestigt und werde durch ein Seil *BC* unter einem Winkel von 60° zur Senkrechten gehalten. Der Winkel zwischen Seil und Stange betrage 30°.

Es sind Größe und Richtung der Gelenkreaktion *R* festzustellen, wenn die Stange 2 kg wiegt.

Lösung: $R = 1$ kg; der Winkel zwischen *R* und der Wand beträgt 60°.



Aufgabe 35 Aufgabe 36 Aufgabe 37 Aufgabe 38

37. Das obere Ende *A* eines Balkens *AB*, dessen Länge 2 m und dessen Gewicht 5 kg beträgt, lehnt an einer glatten senkrechten Wand. Am unteren Ende des Balkens ist ein Seil *BC* befestigt. Es ist zu bestimmen:

1. Wie groß muß der Abstand *AC* sein, um das Seil so an der Wand zu befestigen, daß der Balken sich im Gleichgewicht befindet und einen Winkel $BAD = 45°$ bildet.
2. Es sind die Kraft *T* des Seiles und die Reaktion *R* der Wand festzustellen.

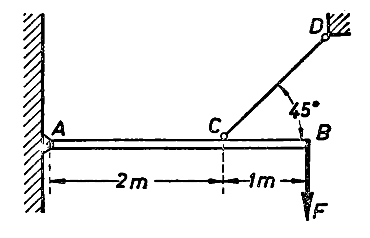
Lösung: $AC = 1{,}41$ m; $T = 5{,}6$ kg; $R = 2{,}5$ kg.

38. Die Abbildung zeigt einen Fensterrahmen *AB*, der um die waagerechte Achse des Gelenkes *A* beweglich ist und sich mit seinem unteren Rand *B* auf den Nutabsatz stützt. Es sind die Auflagerreaktionen in *A* und *B* zu bestimmen, wenn der Rahmen 89 kg wiegt.

Lösung: $R_B = 31{,}5$ kg; $R_A = 70{,}4$ kg.

39. Ein Balken AB wird in waagerechter Lage durch die Stange CD gehalten. Die Befestigungen A, C und D seien Gelenke.

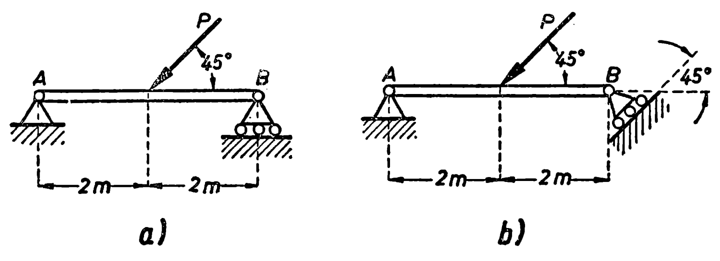
Es sollen die Reaktionen der Stützpunkte A und D bestimmt werden, wenn am Ende des Balkens eine senkrechte Kraft $F = 5$ t angreift. Die Abmessungen sind aus der Zeichnung ersichtlich. Das Gewicht des Balkens ist zu vernachlässigen.



Lösung: $R_A = 7{,}9$ t; $R_D = 10{,}6$ t.

40. Ein Balken AB ist durch ein Gelenk am Stützpunkt A befestigt. Am Ende B trage der Balken ein Rollenlager. Auf die Balkenmitte wirke unter einem Winkel von 45° zur Achse eine Kraft $P = 2$ t.

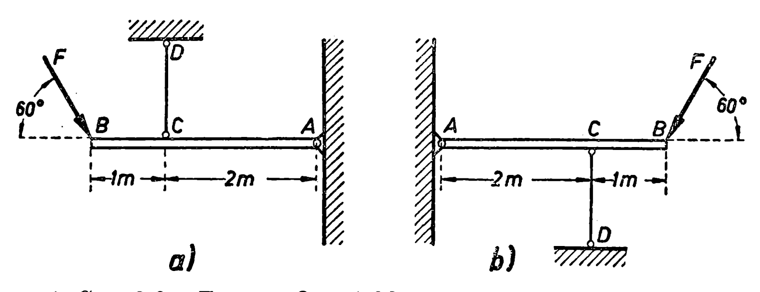
Es sind die Auflagerreaktionen für den Fall *a* und *b* zu bestimmen, wobei die Abmessungen aus der Zeichnung ersichtlich sind. Das Balkengewicht ist zu vernachlässigen.



Lösung: a) $R_A = 1{,}58$ t; $R_B = 0{,}71$ t.
b) $R_A = 2{,}24$ t; $R_B = 1{,}00$ t.

41. Die Zeichnungen zeigen die Balken AB, die in der waagerechten Lage von senkrechten Stäben CD gehalten werden. An den Enden der Balken wirken Kräfte $F = 3$ t unter einem Winkel von 60°.

Es sind die Kräfte S in den Streben CD und der Gelenkdruck Q der Balken auf die Wand festzustellen. Die Befestigungen A, C und D sind Gelenke. Das Gewicht der Balken und der Streben ist zu vernachlässigen.



Lösung: a) $S = 3{,}9$ t Zug; $Q = 1{,}98$ t.
b) $S = 3{,}9$ t Druck; $Q = 1{,}98$ t.

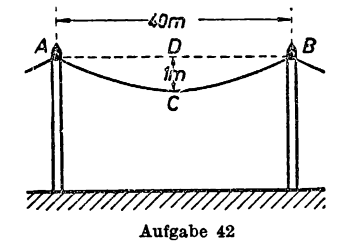
42. Eine elektrische Leitung ABC hängt mit einem Durchhang $CD = f = 1$ m zwischen zwei Masten. Der Abstand zwischen den beiden Masten beträgt $AB = l = 40$ m. Die Leitung hat ein Gewicht von $Q = 40$ kg. Es ist die Seilkraft der Leitung an den Punkten C, A und B festzustellen.

Bei Lösung der Aufgabe soll angenommen werden, daß das Gewicht jeder Leitungshälfte im Abstand $^1/_4$ vom nächsten Mast als Einzellast wirkt.

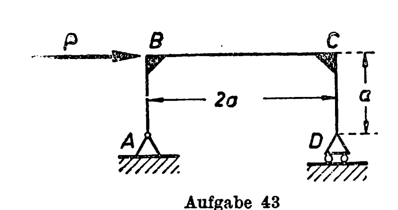
Lösung: $T_C = \frac{Q \cdot l}{8f} = 200$ kg; $T_A = T_B = 201$ kg.

43. Es sind die Auflagerreaktionen für den gezeichneten Rahmen zu bestimmen. Die Kraft P greift dabei in waagerechter Richtung im Punkt B an. Das Rahmengewicht ist zu vernachlässigen.

Lösung: $R_A = \frac{P}{2}\sqrt{5}$; $R_D = \frac{P}{2}$.



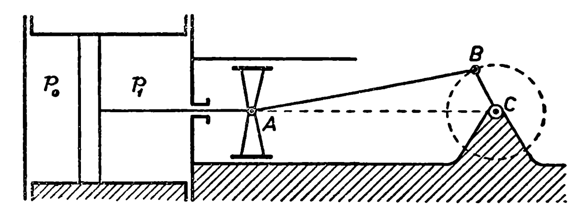
Aufgabe 42



Aufgabe 43

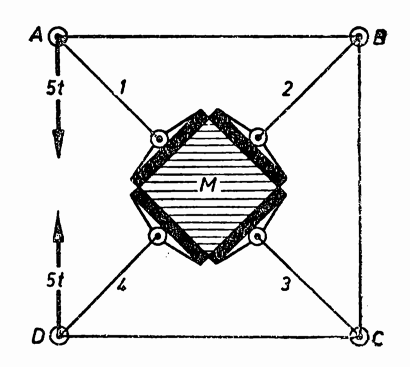
44. Bei einer Dampfmaschine ist die Kolbenfläche $= 0{,}1$ m², die Länge der Kurbelstange $AB = 2$ m, die Kurbellänge $BC = 0{,}4$ m und der augenblickliche Dampfdruck im Zylinder hinter dem Kolben $p_0 = 6$ kg/cm², vor dem Kolben $p_1 = 1$ kg/cm².

Es ist die augenblickliche Kraft T, die auf die Kurbel einwirkt, zu bestimmen und der Druck N des Kreuzkopfes A auf die Parallelführung festzustellen, wenn im gegebenen Augenblick der Winkel $ABC = 90°$ beträgt. Die Reibung zwischen Kreuzkopf und Kreuzkopfführung ist zu vernachlässigen.



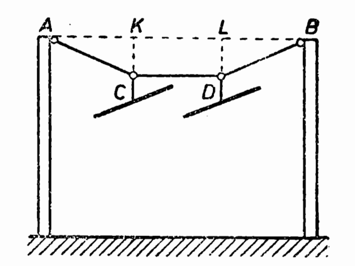
Lösung: $N = 1$ t; $T = 5{,}1$ t.

45. Zum Andrücken der vier Flächen eines Zementwürfels M benutzt man den abgebildeten Mechanismus, bei dem die Stäbe AB, BC und CD ein Quadrat bilden. Die Stäbe 1, 2, 3 und 4 liegen in Richtung der Quadratdiagonalen. Zwei gleich große und entgegengesetzt wirkende Kräfte P greifen an den Punkten A und D an.



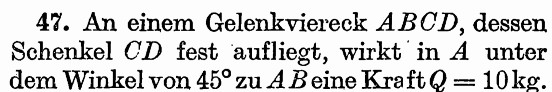
Es sind die Druckkräfte N_1, N_2, N_3 und N_4, die den Würfel andrücken, zu bestimmen und die Stabkräfte S_1, S_2, S_3 der Stäbe AB, BC und CD zu berechnen, wenn die Kraft $P = 5$ t beträgt.

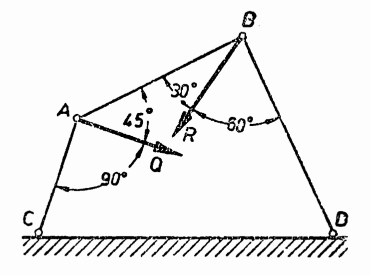
Lösung: $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = = P\sqrt{2} = 7{,}07$ t;
$S_1 = S_2 = S_3 = P = 5$ t.



46. Zwei Straßenbahnleitungen hängen an Drahtseilen, die an zwei Masten befestigt sind. Die Masten stehen entlang der Bahn im Abstand von 40 m. Der Abstand der Leitungen beträgt $AK = KL = LB = 5$ m; $KC = LD = 0{,}5$ m. Bei Vernachlässigung des Drahtseilgewichtes sind die Seilkräfte T_1, T_2 und T_3 in den Abschnitten AC, CD und DB festzustellen, wenn 1 m der Straßenbahnleitung 0,75 kg wiegt.

Lösung: $T_1 = T_3 = 301{,}5$ kg; $T_2 = 300$ kg.



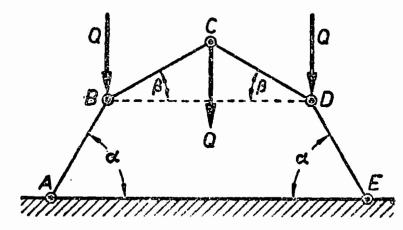


47. An einem Gelenkviereck $ABCD$, dessen Schenkel CD fest aufliegt, wirkt in A unter dem Winkel von 45° zu AB eine Kraft $Q = 10$ kg.

Es ist die Größe der Kraft R, die in B unter einem Winkel von 30° zu AB angreift, so zu bestimmen, daß das Gelenkviereck sich im Gleichgewicht befindet. Winkel: $CAQ = 90°$, $DBR = 60°$.

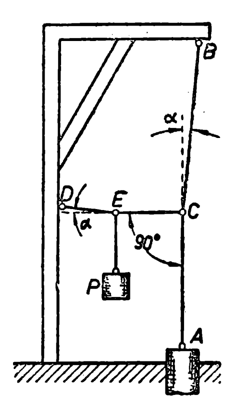
Lösung: $R = 16{,}3$ kg.

48. Ein Gelenkviereck besteht aus vier gleichen Stangen. Die Punkte B, C und D sind mit je einer senkrechten Last Q belastet, in A und E ist das Gelenkviereck beweglich am Boden befestigt. In der Gleichgewichtslage beträgt der Neigungswinkel der äußeren Stangen zur Waagerechten $\alpha = 60°$.



Wie groß ist dabei der Neigungswinkel der mittleren Stangen zur Waagerechten?

Lösung: $\beta = 30°$.



49. Um einen Pfahl aus der Erde herausziehen zu können, wurde zwischen den Punkten A und B ein Seil gespannt. Senkrecht zu diesem Seil spannte man ein anderes Seil von C nach D. Unter Einwirkung der Last $P = 80$ kg bildete sich ein rechter Winkel ACE aus. Die Winkel zwischen BC und der Senkrechten sowie ED und der Waagerechten stellten sich zu $\alpha = 4°$ ($\operatorname{ctg} 4° = 14{,}3$) ein.

Es ist die Kraft T des Seiles AC zu bestimmen. Die Dehnung des Seiles bleibt unberücksichtigt.

Lösung: $T = P \operatorname{ctg}^2 \alpha = 16{,}4$ t.

50. Für einen Dreigelenkbogen nach Abbildung, der von einer waagerechten Kraft P belastet wird, sind die Auflagerreaktionen zu bestimmen.

Lösung: $R_A = R_B = P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.

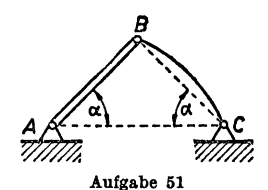
51. Ein gerader Balken AB vom Gewicht P und eine gewichtslose Stange BC mit gebogener Achse von willkürlicher Form sind im Punkt B durch ein Gelenk verbunden. Ferner seien auch die Stützpunkte A und C, die auf der Waagerechten AC liegen, Gelenke. Die Geraden AB und BC bilden mit der Geraden AC Winkel von $\alpha = 45°$.

Es sind die Auflagerreaktionen in A und C zu bestimmen.

Lösung: $R_A = \frac{\sqrt{10}}{4} P$; $R_C = \frac{\sqrt{2}}{4} P$.

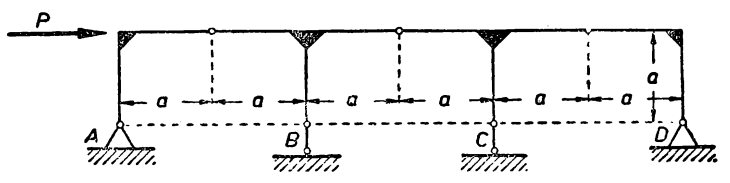
P
a
a
a
A
B

Aufgabe 50



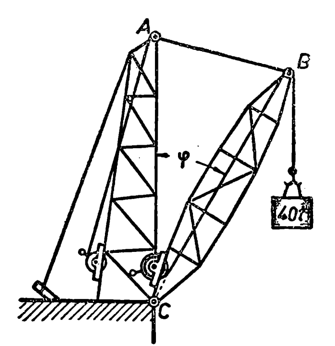
Aufgabe 51

52. Für einen Dreigelenkbogen, dessen Abmessungen auf der Zeichnung angegeben sind, sind die Auflagerreaktionen in A, B, C und D zu bestimmen, die durch die waagerechte Kraft P hervorgerufen werden.



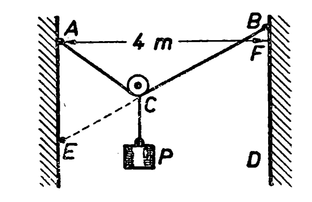
Lösung: $R_A = P\frac{\sqrt{2}}{2}$; $R_B = P$; $R_C = P$; $R_D = P\frac{\sqrt{2}}{2}$.

53. Ein Kran besteht aus einem starren Turm AC und einem um den Punkt C schwenkbaren Träger BC, der von dem Seil AB gehalten wird. Die Last von 40 t hängt an einer Kette, die über eine Seilscheibe im Punkte B entlang der Geraden BC zur Lastwinde führt; $AC = BC$. Es sind, unter Vernachlässigung des Trägergewichtes und der Seilscheibenreibung, die Kraft T des Seiles AB und die Kraft P, die auf den Träger BC einwirkt, als Funktion des Winkels $ACB = \varphi$ zu bestimmen.



Lösung: $T = 2 \cdot 40 \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$ t;
$P = 2 \cdot 40$ t unabhängig vom Winkel.

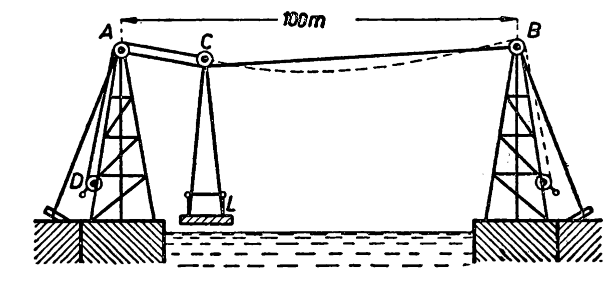
54. Eine lose Rolle C, an der eine Last $P = 18$ kg hängt, kann sich auf dem Seile ACB, dessen Enden A und B an den Wänden befestigt sind, frei bewegen. Der Abstand zwischen den Wänden beträgt 4 m, die Seillänge ist 5 m. Die Last verschiebt sich so lange, bis sie im Gleichgewicht mit den Seilkräften steht. Wie groß sind in diesem Falle die Seilkräfte? Das Gewicht des Seiles und die Reibung der Rolle sind zu vernachlässigen.



Die Seilkräfte in den Seilenden AC und CB sind gleich groß. Ihr Wert kann aus der Ähnlichkeit des Kräftedreiecks und des gleichschenkligen Dreiecks, dessen einer Schenkel die Seillänge und dessen Höhe der Wandabstand AF bildet, bestimmt werden.

Lösung: $T = 15$ kg unabhängig von der Höhe BF.

55. Zur Überquerung eines Flusses dient ein Förderkorb L, der mit der Rolle C an einem Drahtseil AB hängt. Die Seilenden sind an den Türmen A und B verankert. Um die Rolle C zum linken Ufer zu bewegen, dient das Seil CAD, welches über eine Rolle A läuft und von der Winde D aufgewickelt wird. Ein gleiches Seil ist zum Ziehen des Korbes nach dem rechten Ufer angebracht. Die Punkte A und B befinden sich auf einer waagerechten Geraden im Abstand $AB = 100$ m voneinander. Die Drahtseillänge ACB beträgt 102 m. Der Förderkorb wiegt 5 t. Bei Außerachtlassung des Seilgewichtes sowie der Seil- und Rollenreibung ist die Seilkraft in den Seilsträngen AC und CB und dem Zugseil CAD zu bestimmen. Der Abstand AC beträgt $AC = 20$ m.



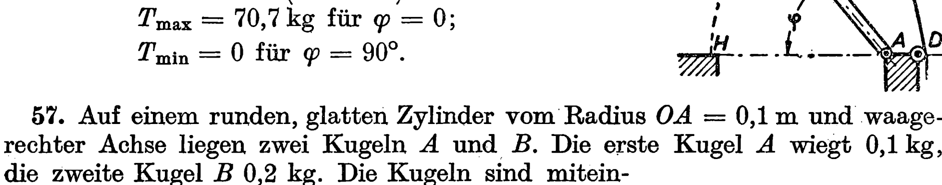
Lösung: $T_{CAD} = 0{,}75$ t; $T_{CB} = T_{CA} = 9{,}56$ t.

56. Ein Fensterrahmen AB vom Gewicht 100 kg werde durch Drehung um die waagerechte Achse A geöffnet (vgl. Skizze). Das Öffnen erfolgt mit Hilfe des Zugseiles BCD, welches über die Rollen C und D läuft. Die Rolle C, deren Größe vernachlässigt werden kann, und der Punkt A liegen auf einer Senkrechten. Das Gewicht des Rahmens soll in seiner Mitte angreifen. Die Reibung werde ebenfalls vernachlässigt. Es ist die Änderung der Seilkraft T in Abhängigkeit des Winkels, der vom Rahmen AB mit der Waagerechten AH gebildet wird, zu bestimmen ($AC = AB$). Weiterhin sollen die größte und kleinste auftretende Seilkraft angegeben werden.

Lösung: $T = 100 \sin\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)$ kg;

$T_{\max} = 70{,}7$ kg für $\varphi = 0$;

$T_{\min} = 0$ für $\varphi = 90°$.



57. Auf einem runden, glatten Zylinder vom Radius $OA = 0{,}1$ m und waagerechter Achse liegen zwei Kugeln A und B. Die erste Kugel A wiegt 0,1 kg, die zweite Kugel B 0,2 kg. Die Kugeln sind miteinander durch einen Faden AB von 0,2 m Länge verbunden.

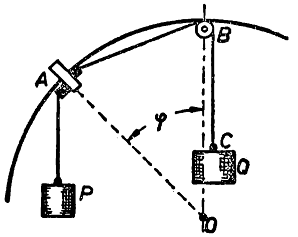
Es sind die Winkel φ_1 und φ_2, die die Radien OA und OB mit der senkrechten Geraden OC in der Gleichgewichtslage bilden, zu bestimmen. Wie groß sind dabei der Druck N_1 und N_2 der Kugeln auf den Zylinder in den Punkten A und B? Die Größe der Kugeln soll vernachlässigt werden.

Lösung: $\varphi_1 = 2 - \varphi_2$; $\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\sin 2}{2 + \cos 2}$;

$\varphi_1 = 84° \, 45'$; $\varphi_2 = 29° \, 50'$;

$N_1 = 0{,}1 \cos \varphi_1 = 0{,}0092$ kg; $N_2 = 0{,}2 \cos \varphi_2 = 0{,}173$ kg.

58. Ein glatter Ring A kann ohne Reibung auf einem starren Draht gleiten. Dieser ist zu einem Kreis gebogen und befindet sich in einer senkrechten Ebene. An dem Ring ist ein Gewicht P und eine Schnur ABC befestigt. Die Schnur läuft über eine feste Rolle B, die sich im höchsten Punkt des Kreises befindet. Die Rollengröße ist zu vernachlässigen. An der Schnur hängt im Punkt C ein Gewicht Q.



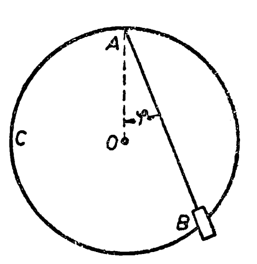
Es ist der Winkel φ des Bogens AB in der Gleichgewichtslage zu bestimmen. Das Gewicht des Ringes und die Reibung sind zu vernachlässigen. Weiterhin ist noch anzugeben, unter welchen Umständen ein Gleichgewicht möglich ist.

Lösung: $\sin \frac{\varphi_1}{2} = \frac{Q}{2P}$; wobei $Q < 2P$ sein muß, damit Gleichgewicht herrscht.

Im Falle $\varphi_2 = \pi$ herrscht Gleichgewicht für beliebiges Q und P.

59. Auf einem aus Draht gebogenen Kreis ABC vom Radius R, der sich in einer senkrechten Ebene befindet, gleitet ein glatter Ring B vom Gewicht p. Die Größe des Ringes wird vernachlässigt. Der Ring sei mit einem elastischen Faden AB an dem höchsten Punkt A des Kreises festgebunden.

Für die Gleichgewichtslage ist der Winkel φ zu bestimmen. Die Fadenkraft T ist proportional zur relativen Fadenverlängerung, wobei K einen Proportionalitätsfaktor darstellt. Wenn man mit L und l die Länge des Fadens im gedehnten und ungedehnten Zustand bezeichnet, so wird demnach der Wert $T = K\frac{L-l}{l}$.



Lösung: $\cos\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{Kl}{KR-pl}$ für $K \geqq \frac{2\,pl}{2\,R-l}$, andernfalls wird $\varphi = 0$.

60. Der Punkt M wird durch drei starre Zentren M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2) und M_3 (x_3, y_3) angezogen. Die zwischen dem Punkt und den Zentren wirkenden Kräfte sind den Abständen proportional $F_1 = k_1 r_1$, $F_2 = k_2 r_2$, $F_3 = k_3 r_3$, wobei $r_1 = MM_1$, $r_2 = MM_2$, $r_3 = MM_3$ ist, k_1, k_2, k_3 sind Proportionalitätsfaktoren.

Es sind die Koordinaten x, y des Punktes M in der Gleichgewichtslage zu bestimmen.

Lösung: $x = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3}{k_1 + k_2 + k_3}$; $y = \frac{k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3}{k_1 + k_2 + k_3}$.

61. Eine rechteckige Platte vom Gewicht 5 kg kann sich frei um eine waagerechte Achse, die entlang einer Rechteckseite läuft, drehen. Ein gleichmäßig wirkender Wind hält die Platte in geneigter Lage, so daß sie einen Winkel von 18° zur senkrechten Ebene bildet.

Es ist die Resultierende des senkrecht auf der Platte stehenden Winddruckes zu bestimmen.

Lösung: $W = 5 \sin 18° = 1{,}55$ kg.

62. Das Kettenende einer Kettenbrücke ist in einem Steinfundament von der Form eines rechtwinkligen Prismas, dessen Querschnitt $ABCD$ ist, befestigt. Die Längen der Schenkel betragen $AB = AC = 5$ m, das spezifische Gewicht des Fundamentes 2,5 g/cm³. Die Kette liege in Richtung der Diagonalen BC.

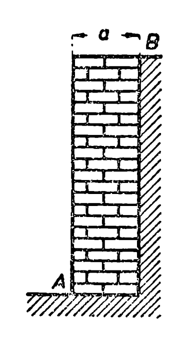
Es ist die notwendige Länge a des Prismas zu ermitteln, wenn die Kettenkraft $T = 100$ t beträgt. Für die Berechnung des Fundamentes ist als Kippkante die Kante D zu wählen. Der Widerstand des Bodens kann vernachlässigt werden.

Lösung: $a \geqq 2{,}3$ m.

63. Eine Erdaufschüttung wird durch eine senkrechte Mauer AB abgestützt.

Es ist die notwendige Mauerstärke a unter der Annahme zu ermitteln, daß der Erddruck mit einer Intensität von 6 t/m Mauerlänge waagerecht auf die Mauer wirkt und in einem Abstand von $1/3$ der Mauerhöhe angreift. Spezifisches Gewicht der Mauer sei 2 g/cm³. Die Berechnung der Mauer hat auf Kippen um die Kante A zu erfolgen.

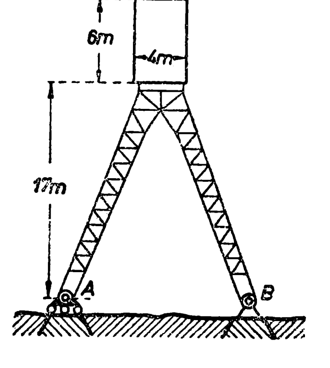
Lösung: $a \geqq 1{,}42$ m.



64. Ein Wasserdruckturm besteht aus einem zylindrischen Behälter von 6 m Höhe und 4 m Durchmesser. Der Behälter stehe auf symmetrisch aufgestellten Stützen 17 m über dem Erdboden (vgl. Skizze). Sein Gewicht beträgt 8 t. Der Winddruck auf die Projektionsfläche des Behälters wird bei senkrechter Windrichtung mit 125 kg/m² angesetzt.

Es ist der Abstand AB zwischen den Stützen zu bestimmen. Dem waagerecht wirkenden Winddruck wirkt nur das Gewicht des Turmes entgegen.

Lösung: $AB \geqq 15$ m.



65. Eine 40 kg schwere Stahlplatte werde gleichmäßig und in gerader Richtung auf einer waagerechten Gußeisenplatte ohne Schmierung bewegt. Es ist die für diese Verschiebung notwendige Kraft zu ermitteln, wobei der Reibungskoeffizient 0,18 ist. Die erforderliche Kraft wirkt parallel zu der Verschiebung.

Lösung: 7,2 kg.

66. Wie groß ist die erforderliche Kraft, um bei mangelhafter Schmierung den Support einer Drehbank auf dem Drehbankbett zu verschieben? Der Support wiegt 50 kg. Das Material der Reibungskörper ist Gußeisen mit einem Reibungskoeffizienten 0,15.

Lösung: 7,5 kg.

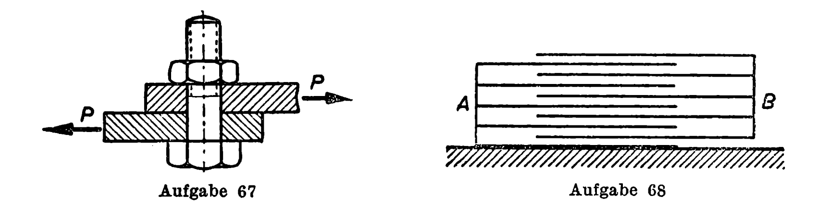
67. Es ist die notwendige Schraubenkraft eines Bolzens, mit dem zwei Stahlbänder verbunden werden sollen, zu bestimmen. Die Zerreißkraft der Bänder beträgt $P = 2000$ kg. Der Bolzen hat in der Bohrung Spiel, darf also nicht auf Abscheren beansprucht werden. Der Reibungskoeffizient zwischen den Bändern ist 0,2.

Hinweis: Da der Bolzen nicht auf Abscheren beansprucht werden soll, muß er mit einer so großen Kraft angezogen werden, daß die zwischen den Bändern auftretende Reibung das Gleiten derselben verhindert. Die dabei entlang der Bolzenachse wirkende Schraubenkraft soll ermittelt werden.

Lösung: 10000 kg.

68. 200 Papierblätter, von denen jedes 6 g wiegt, sind, wie auf der Zeichnung ersichtlich, zusammengelegt. An den freien Enden sind die Blätter so verklebt, daß sich zwei Ballen A und B bilden. Der Reibungskoeffizient zwischen den Papierblättern und zwischen Papier und Tisch, auf dem das Papier liegt, beträgt 0,2. Unter der Annahme, daß ein Ballen festgehalten wird, ist die geringste waagerechte Kraft P zu bestimmen, mit welcher der zweite Ballen herausgezogen werden kann.

Lösung: Beim Herausziehen von A aus B beträgt $P = 24{,}12$ kg.
Beim Herausziehen von B aus A beträgt $P = 23{,}88$ kg.



Aufgabe 67 Aufgabe 68

69. Ein Eisenbahnwagen rollt auf einer Neigung von 0,008. Nach Erreichen eines bestimmten Wertes bleibe die Geschwindigkeit konstant.

Es ist der Fahrwiderstand R, den der Wagen bei dieser Geschwindigkeit erfährt, zu bestimmen. Das Gewicht des Wagens beträgt 10 t.

Die Streckenneigung ist der Tangens des Winkels zwischen Anstieg und Horizontale. Da die Neigung sehr gering ist, kann der Sinus und der Tangens des Winkels gleichgesetzt werden.

Lösung: $R = 80$ kg.

70. Ein Zug fährt auf einer geraden Strecke, die eine Neigung von 0,008 aufweist, mit gleichmäßiger Geschwindigkeit. Ohne Lokomotive wiegt der Zug 180 t. Wie hoch ist die Zugkraft P der Lokomotive, wenn der Bewegungswiderstand 0,5 % des Schienendruckes des Zuges beträgt?

Lösung: $P = 2340$ kg.

71. Eine rauhe Fläche hat den Neigungswinkel α. Der auf dieser Fläche liegende schwere Körper rutscht mit der gleichmäßigen Geschwindigkeit herab, die er zu Beginn der Bewegung erhalten hat. Es ist der Reibungskoeffizient μ zu bestimmen.

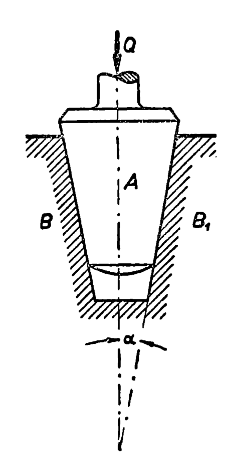
Lösung: $\mu = \operatorname{tg} \alpha$.

72. Es ist der Böschungswinkel einer natürlichen Erdböschung festzustellen. Der Reibungskoeffizient der Erde ist $\mu = 0{,}8$. Als Böschungswinkel wird der größte Neigungswinkel bezeichnet, bei dem ein Materialteilchen auf der Böschung im Ruhezustand verbleibt.

Lösung: $38^\circ\ 40'$.

73. Ein Keil A, dessen Keilwinkel $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}05$ beträgt, wird in den Spalt BB_1 mit einer Kraft $Q = 6$ t gedrückt.

Es sind der Normaldruck N auf die Keilflächen sowie die Kraft P, die erforderlich ist, um den Keil herauszuziehen, zu bestimmen. Der Reibungskoeffizient beträgt $\mu = 0{,}1$.

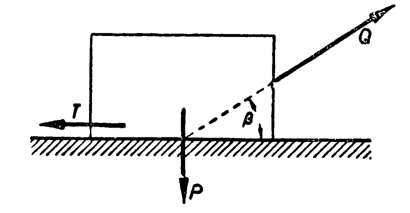


Lösung: $N = 20$ t; $P = 2$ t.

74. Eine Kiste vom Gewicht P steht auf einer rauhen waagerechten Ebene mit einem Reibungskoeffizient μ.

Es ist festzustellen, unter welchem Winkel β die Kraft Q angreifen muß, um die Kiste mit dem kleinsten Wert von Q zu verschieben.

Wie groß ist dabei $Q_{\min}$?



Lösung: $\beta = \operatorname{arc\,tg}\mu$; $Q_{\min} = \dfrac{\mu \cdot P}{\sqrt{1+\mu^2}}$.

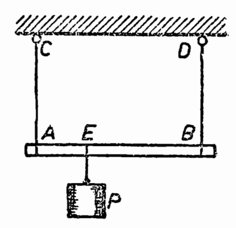
3. Parallele Kräfte; Momente

75. Es sind die senkrechten Auflagerreaktionen eines waagerechten Balkens der Länge l zu bestimmen. Der Balken wird durch eine gleichmäßige Streckenlast q belastet, sein Gewicht ist in dieser Belastung mit enthalten.

Lösung: $R_1 = R_2 = \dfrac{q \cdot l}{2}$ kg.

76. Es sind die senkrechten Auflagerreaktionen eines waagerechten Trägers der Länge l zu bestimmen, der durch eine Einzellast P im Abstand x vom ersten Auflager aus belastet wird.

Lösung: $R_1 = P\,\dfrac{l-x}{l}$ kg; $R_2 = P \cdot \dfrac{x}{l}$ kg.

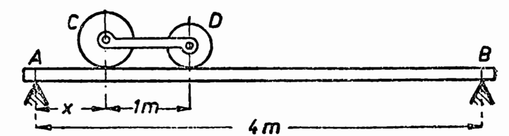


77. Eine Stange AB mit der Länge 1 m und dem Gewicht 2 kg hängt waagerecht an zwei parallelen Seilen AC und BD. An der Stange hängt im Abstand $AE = \frac{1}{4}$ m eine Last $P = 12$ kg.

Es sind die Seilkräfte T_C und T_D zu bestimmen.

Lösung: $T_C = 10$ kg; $T_D = 4$ kg.

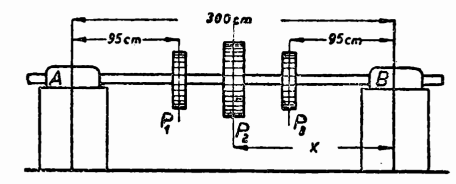
78. Auf einen waagerechten Träger, der an zwei Punkten mit einem Abstand von 4 m aufliegt, wirken zwei Lasten, von denen die eine $C = 200$ kg und die andere $D = 100$ kg wiegt. Die Lasten liegen so auf, daß die Auflagerreaktion A doppelt so groß ist wie B, wobei das Gewicht des Trägers außer acht gelassen wird. Der Abstand CD zwischen den beiden Lasten beträgt 1 m.



Wie groß ist der Abstand x der Last C vom Auflager A?

Lösung: $x = 1$ m.

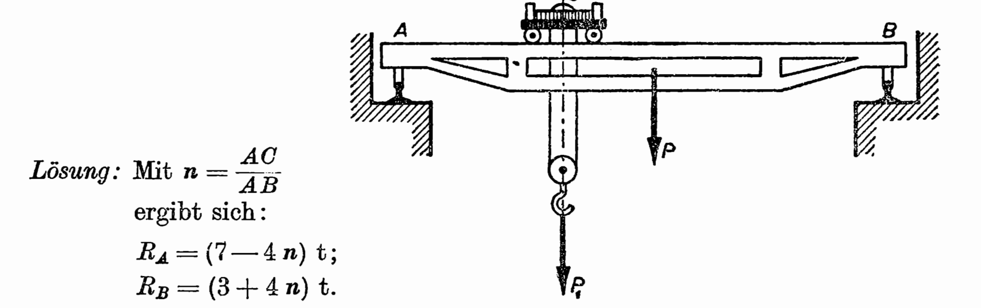
79. Eine Transmissionswelle AB ist mit drei Scheiben bestückt, die $P_1 = 300$ kg, $P_2 = 500$ kg, $P_3 = 200$ kg wiegen. Die Abmessungen sind aus der Zeichnung ersichtlich.



In welchem Abstand x vom Lager B muß man die Scheibe P_2 anbringen, damit die Reaktion des Lagers A gleich der Reaktion des Lagers B ist? Das Gewicht der Welle ist dabei außer acht zu lassen.

Lösung: $x = 139$ cm.

80. Es sind die Schienendrücke eines Brückenkrans in Abhängigkeit von der Stellung der Laufkatze C, auf der sich eine Kranwinde befindet, zu bestimmen. Die Stellung der Laufkatze soll durch ihren Abstand von der Mitte der linken Schiene aus bezeichnet werden. Der Abstand ist in Bruchteilen der Gesamtlänge der Brücke anzugeben. Das Gewicht der Brücke beträgt $P = 6$ t, das Gewicht der Laufkatze mit der Hebelast $P_1 = 4$ t.



Lösung: Mit $n = \dfrac{AC}{AB}$ ergibt sich:

$R_A = (7 - 4\,n)$ t;

$R_B = (3 + 4\,n)$ t.

81. Ein 10 m langer Träger AB mit einem Gewicht von 200 kg liegt in zwei Punkten C und D auf. Das Ende A steht von der Stütze C um 2 m ab, das Ende B ist von der Stütze D um 3 m entfernt.

Am Trägerende A greift ein Seil an, welches über eine Rolle läuft und an seinem Ende die Last $Q = 300$ kg trägt. Weiterhin hängt an dem Träger im Abstand 3 m vom Ende A eine Last $P = 800$ kg.

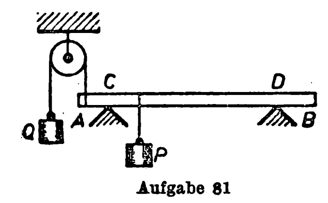
Es sind die Auflagerreaktionen bei Außerachtlassung der Scheibenreibung zu bestimmen.

Lösung: $R_C = 300$ kg; $R_D = 400$ kg.

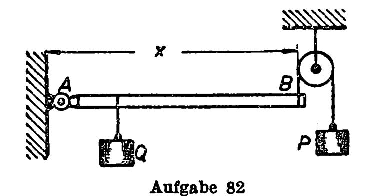
82. Eine waagerechte Stange AB, die 100 g wiegt, kann sich um einen festen Punkt A drehen. Das Ende B wird durch ein Gewicht von $P = 150$ g, welches an einem über eine Rolle geführten Seil hängt, nach oben gezogen. In einem Punkt, der vom Ende B den Abstand von 20 cm hat, hängt eine Last $Q = 500$ g.

Wie groß muß die Länge x der Stange AB sein, damit sie sich im Gleichgewicht befindet?

Lösung: $x = 25$ cm.

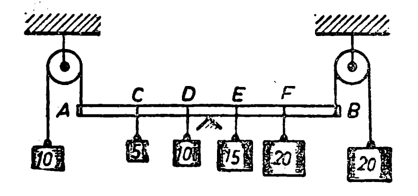


Aufgabe 81



Aufgabe 82

83. Das Ende A einer waagerechten Stange AB mit einem Gewicht von 20 kg und einer Länge von 5 m wird durch eine Last von 10 kg, die an einem über eine Rolle geführten Seil hängt, nach oben gezogen. Das Ende B wird auf die gleiche Weise durch eine Last von 20 kg belastet. In den Punkten C, D, E und F hängen Lasten, deren Gewichte entsprechend 5, 10, 15 und 20 kg sind. Die Abstände zwischen A, C, D, E, F, B betragen jeweils 1 m. An welchem Punkt muß die Stange gestützt werden, damit sie sich im Gleichgewicht befindet?



Lösung: In der Mitte.

84. An einer 3 m langen Stange, die 6 kg wiegt, sind in gleichen Abständen voneinander vier Lasten angebracht, die beiden äußersten befinden sich an den Stangenenden. Die erste Last von links wiegt 2 kg, jede darauf folgende Last ist um 1 kg schwerer als die vorhergehende.

In welchem Abstand x vom linken Ende muß die Stange gestützt werden, damit sie in der Waage bleibt?

Lösung: $x = 1{,}75$ m.

85. Ein waagerechter Träger ist an einer Mauer gelenkig befestigt (Punkt A) und wird in einem Abstand von 160 cm von der Mauer gestützt (Punkt B). Der Träger ist 400 cm lang und wiegt 320 kg. In Abständen von 120 cm und 180 cm von der Mauer entfernt ruhen auf dem Träger zwei Lasten von 160 und 240 kg Gewicht.

Es sind die Auflagerreaktionen zu bestimmen.

Lösung: $R_B = 790$ kg nach oben; $R_A = 70$ kg nach unten.

86. Ein waagerechter Träger von 4 m Länge und einem Gewicht von $\frac{1}{2}$ t ist so in eine Mauer eingelassen, daß sich der Träger in den Punkten A und B der Wand stützt. Die Mauerstärke beträgt $\frac{1}{2}$ m.

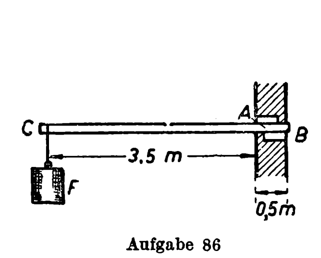
Es sind die Reaktionen in den Punkten A und B festzustellen, wenn am freien Ende des Trägers eine Last $P = 4$ t angebracht ist.

Lösung: $R_A = 34$ t nach oben; $R_B = 29{,}5$ t nach unten.

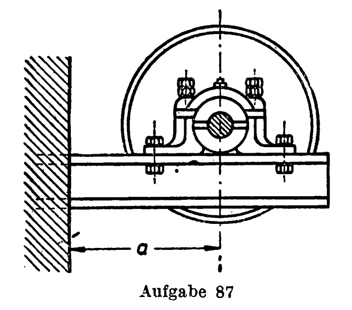
87. Ein waagerechter Träger ist mit einem Ende in die Wand eingemauert. Am anderen Ende trägt er ein Transmissionslager. Durch das Gewicht der Welle, der Scheiben und des Lagers erhält der Träger eine senkrechte Belastung von $Q = 120$ kg.

Bei Außerachtlassung des Trägergewichtes und unter der Annahme, daß die Belastung Q in einem Abstand $a = 750$ mm von der Wand wirkt, sind die Einspannreaktionen zu ermitteln.

Lösung: Auflagerkraft: $R = 120$ kg; Auflagermoment: $M = 90$ mkg.



Aufgabe 86

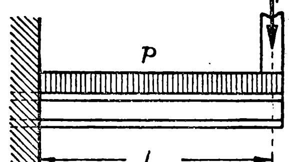


Aufgabe 87

88. Ein waagerechter Träger, der einen Balkon stützt, steht unter der Einwirkung einer gleichmäßig verteilten Streckenlast $p = 200$ kg/m. Auf das freie Ende des Trägers wirkt die Belastung einer Säule mit $P = 200$ kg. Der Abstand der Säulenachse von der Wand beträgt $l = 1{,}5$ m.

Es sind die Auflagerreaktionen der Einspannung zu ermitteln.

Lösung: $R = 500$ kg; $M = 525$ mkg.



89. Auf einen Konsolausleger wirkt ein Kräftepaar mit dem Moment $M = 6$ mt und im Punkt C eine senkrechte Last $P = 2$ t. Die Länge des Trägers AB beträgt 3,5 m, die Länge des Auslegers $BC = 0{,}5$ m.

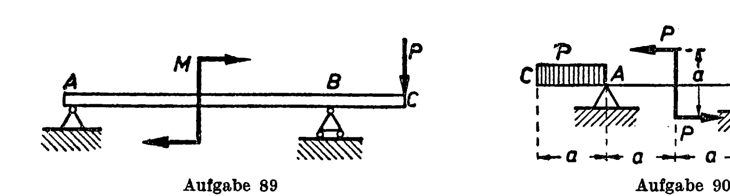
Es sind die Auflagerreaktionen zu bestimmen.

Lösung: $R_A = 2$ t nach unten; $R_B = 4$ t nach oben.

90. Auf einen waagerechten Doppelkonsolträger wirkt das Kräftepaar (P, P) ein. Auf das linke Konsol wirkt gleichmäßig verteilt eine Streckenlast der Intensität p und im Punkt D des rechten Konsols eine senkrechte Belastung Q.

Es sind die Auflagerreaktionen zu ermitteln, wobei $P = 1$ t, $Q = 2$ t, $p = 2$ t/m, $a = 0{,}8$ m sind.

Lösung: $R_A = 1{,}5$ t; $R_B = 2{,}1$ t.



Aufgabe 89 Aufgabe 90

91. Auf dem Träger AB von 10 m Länge läuft ein Hebekran. Der Kran wiegt 5 t, sein Schwerpunkt befindet sich auf der Achse CD. Die Last P wiegt 1 t, das Gewicht des Trägers AB beträgt 3 t, die Ausladung des Kranes $KL = 4$ m, der Abstand $AC = 3$ m.

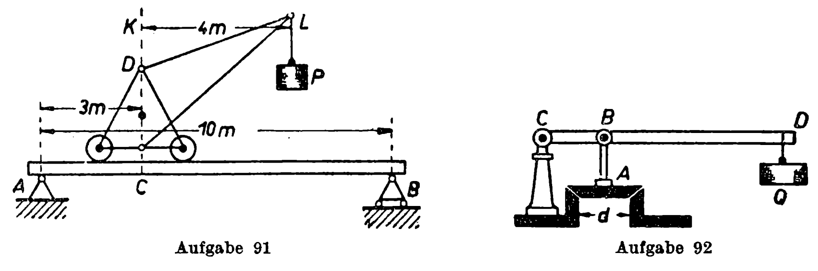
Es sind die Auflagerreaktionen in den Punkten A und B zu ermitteln, wenn der Ausleger DL sich in einer Ebene mit dem Träger AB befindet.

Lösung: $R_A = 5{,}3$ t; $R_B = 3{,}7$ t.

92. Das Sicherheitsventil A eines Dampfkessels ist mit Hilfe der Stange AB an dem Hebel CD, der 50 cm lang ist und 1 kg wiegt, befestigt. Der Hebel CD kann sich um den festen Punkt C drehen. Ventildurchmesser $d = 6$ cm, Abstand $BC = 7$ cm.

Wie groß muß die Last Q sein, die am Ende des Hebels in D angreift, damit das Ventil bei einem Kesseldruck von 11 at sich von selbst öffnet, wobei anzunehmen ist, daß 1 at $= 1$ kg/cm² beträgt.

Lösung: $Q = 43$ kg.

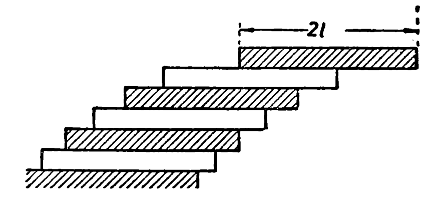


Aufgabe 91 Aufgabe 92

93. Einige gleiche Platten der Länge $2\,l$ sind so aufeinander gestapelt, daß jede einzelne Platte gegenüber der darunter liegenden ein Stück hervorsteht.

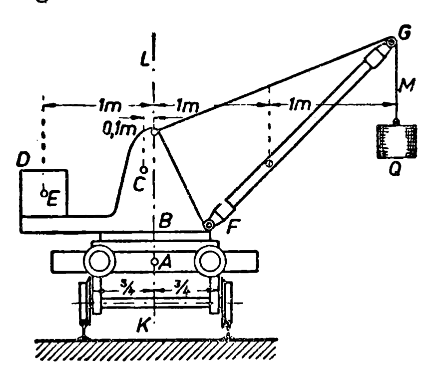
Es sind die größtmöglichen Längen der vorstehenden Plattenteile zu bestimmen, bei denen noch ein Gleichgewicht der Platten gewährleistet ist.

Bei der Lösung der Aufgabe werden die Gewichte der Platten nacheinander, angefangen bei der obersten Platte, addiert.



Lösung: l; $\frac{1}{2}l$; $\frac{1}{3}l$; $\frac{1}{4}l$; $\frac{1}{5}l$ usw.

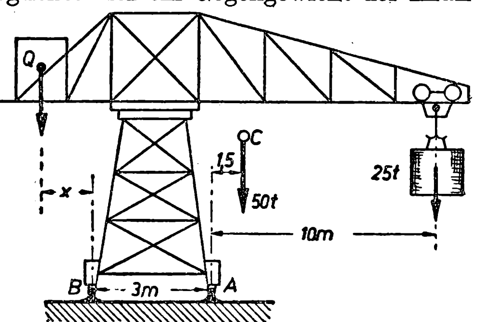
94. Ein Eisenbahnkran steht auf Schienen, deren Abstand 1,5 m beträgt. Der Kranwagen wiegt 3 t, sein Schwerpunkt liegt im Punkt A auf der Linie KL. Das Gewicht der Kranwinde B ist 1 t, ihr Schwerpunkt liegt im Punkt C in einem Abstand von 0,1 m von der Geraden KL. Das 2 t schwere Gegengewicht hat seinen Schwerpunkt im Punkt E, der 1 m von der Linie KL entfernt ist. Der Ausleger FG wiegt 0,5 t, sein Schwerpunkt liegt bei Punkt H im Abstand von 1 m von der Linie KL. Die Ausladung LM beträgt 2 m. Es ist die Höchstlast Q zu bestimmen, für die der Kran nicht kippt.



Lösung: $Q = 5{,}18\,\text{t}$.

95. Ein Portalkran wiegt ohne Gegengewicht 50 t, sein Schwerpunkt hat von der rechten Schiene A einen senkrechten Abstand von 1,5 m. Die Hubkraft des Kranwagens beträgt 25 t, die Ausladung 10 m, gerechnet von der rechten Schiene aus.

Für das Gegengewicht sind die Größe Q und die Entfernung x von der linken Schiene B so zu bestimmen, daß mit möglichst kleinem Gegengewicht der Kran in allen Lagen, sei er beladen oder nicht beladen, nicht kippen kann. Das Eigengewicht des Kranwagens kann außer acht gelassen werden.

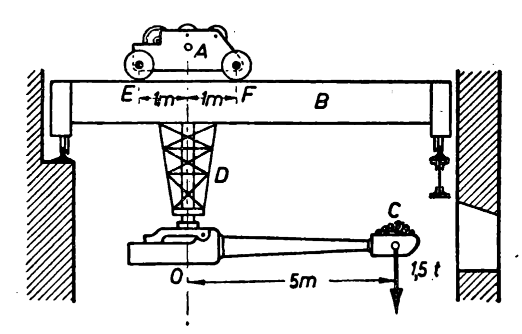


Lösung: $Q = 33{,}33\,\text{t}$; $x = 6{,}75\,\text{m}$.

96. Die Abbildung zeigt einen zum Beschicken von Martinöfen vorgesehenen Kran. Die Laufkatze A bewegt sich entlang den Schienen, die auf Trägern der beweglichen Brücke B ruhen. An der Laufkatze hängt eine Säule D, die wiederum zur Befestigung der Hebeschaufel C dient.

Wie groß muß das Gewicht P von Laufkatze und Säule sein, damit die Last von 1,5 t, die auf der Schaufel in 5 m Abstand von der senkrechten Achse der Säule ruht, den Kran nicht umkippt?

Es wird angenommen, daß das Gewicht der Laufkatze entlang der Achse OA wirkt. Der Abstand der Räder von der Achse OA beträgt 1 m.



Lösung: $P \geqq 6$ t.

97. Ein Kran steht auf einem Steinfundament. Der Kran wiegt $Q = 2{,}5$ t, sein Schwerpunkt A hat den Abstand $AB = 0{,}8$ m von der Achse des Kranes, die Kranausladung beträgt $CD = 4$ m.

Im Grundriß ist das Fundament quadratisch und hat eine Seitenlänge $EF = 2$ m. Das spezifische Gewicht der Mauerung beträgt 2 g/cm³.

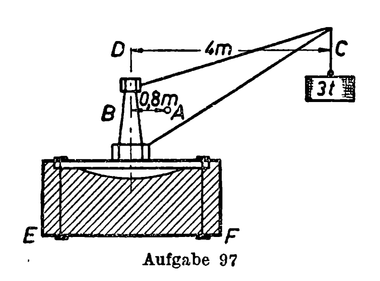
Es ist die kleinste Tiefe des Fundamentes zu berechnen, wenn der Kran Lasten bis zu 3 t heben soll. Für die Berechnung wird als Kippkante die Kante F festgelegt.

Lösung: 1,06 m.

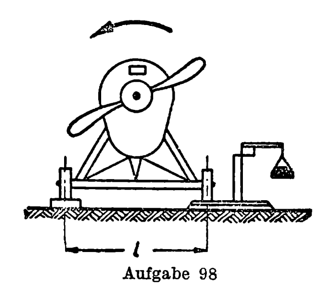
98. Bei der Überprüfung eines Flugzeugmotors auf seine Arbeitsweise steht das Flugzeug horizontal mit einem Rad auf einer Dezimalwaage. Der senkrechte Druck auf die Waagenfläche ergibt bei laufendem Motor ein Gewicht von 640 kg und bei stillstehendem Motor 460 kg. Die Druckerhöhung bei laufendem Motor wird durch das Auftreten eines Reaktionsmomentes erklärt, welches bestrebt ist, das Flugzeug in dem Propellerdrehsinn entgegengesetzter Richtung zu kippen. Die Propellerdrehrichtung ist aus der Zeichnung ersichtlich.

Es ist der Wert dieses Momentes für $l = 2{,}5$ m zu bestimmen.

Lösung: 450 mkg.



Aufgabe 97



Aufgabe 98

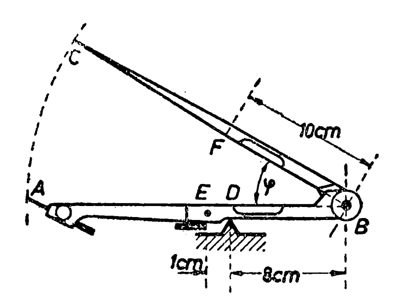
99. Eine Magnetnadel hängt an einem dünnen Draht und steht parallel zum Magnetmeridian. Parallele Kräfte des Erdmagnetfeldes mit gleicher Wirkungslinie wirken auf die Pole der Nadel in entgegengesetzten Richtungen mit je 2 mg. Der Polabstand beträgt 10 cm.

Um welchen Winkel muß der Draht tordiert werden, damit die Nadel mit dem Magnetmeridian einen Winkel von 30° bildet? Um eine Verdrehung des Drahtes um einen Winkel von 1° zu erreichen, muß ein Moment von 5 mgcm wirken.

Das Drillmoment ist proportional dem Verdrehungswinkel.

Lösung: 32°.

100. Wie groß muß der Öffnungswinkel φ eines Zirkels sein, damit sein Schenkel AB, der auf einer Messerschneide D ruht, in waagerechter Lage bleibt?



Der Schenkel AB wiegt 16 g, sein Gewicht greift im Punkt E an, der Schenkel CB wiegt 12 g und wirkt im Punkt F. Die Abstände betragen $BD = 8$ cm, $ED = 1$ cm, $BF = 10$ cm.

Lösung: $\varphi = \arccos \frac{2}{3} = 48° \, 10'$;

das Gleichgewicht ist labil.

101. Zwei Stangen AB und BC mit gleichem Querschnitt, wobei AB halb so lang wie BC ist, sind miteinander unter einem Winkel von 60° fest verbunden. Dieser Hebel hängt mit seinem Ende A am Faden AD.

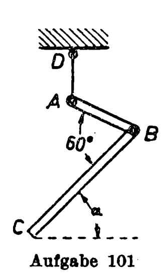
Es ist der Winkel α zu ermitteln, den die Stange BC des Hebels in ihrer Gleichgewichtslage bildet. Die Querschnitte der Stangen sind nicht zu beachten.

Lösung: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5} \sqrt{3}$; $\alpha = 19° \, 5'$.

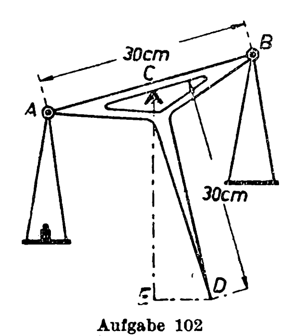
102. Die Länge eines Waagebalkens AB beträgt 30 cm, sein Gewicht 300 g, der Zeiger CD ist 30 cm lang. Das Übergewicht von 0,01 g einer Schale entfernt die Zeigerspitze D aus ihrer senkrechten Lage um $DE = 3$ mm.

Es ist der Schwerpunktsabstand des Waagebalkens von der Schneide C aus zu ermitteln.

Lösung: 0,05 cm.



Aufgabe 101



Aufgabe 102

103. Zwei Stangen AB und OC, deren Längeneinheitsgewicht $2\,p$ beträgt, bilden im Punkt C einen rechten Winkel. Die Stange OC dreht sich um die waagerechte Achse O, AB ist mit OC fest verbunden. $AC = CB = a$, $OC = b$. An den Punkten A und B hängen Gewichte P_1 und P_2; $P_2 > P_1$.

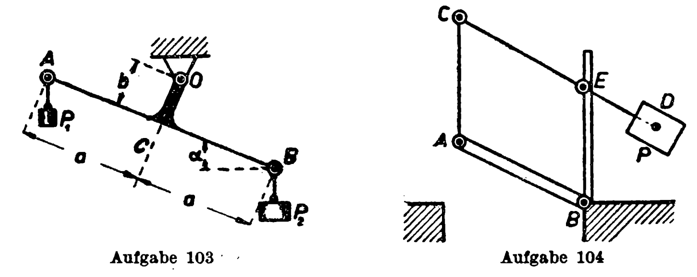
Es ist der Neigungswinkel α der Stange AB in der Gleichgewichtslage zu ermitteln.

Lösung: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1 + p\,(4a + b)}$.

104. Eine Hebebrücke AB wird durch zwei Balken CD, von denen je einer sich an jeder Seite der Brücke befindet, gehoben. Der Balken CD ist 8 m lang und wiegt 400 kg. Die Brücke sei $AB = CE = 5$ m lang. Die Kette AC entspricht dem Abstand BE der Drehpunkte. Die Brücke wiegt 3 t, ihr Gewicht wirkt in der Mitte von AB.

Es sind die Gegengewichte zu ermitteln, die in der Lage sind, die Brücke ins Gleichgewicht zu bringen.

Lösung: $P = 1383$ kg.



Aufgabe 103 Aufgabe 104

105. Ein Flaschenzug besteht aus zwei festen und einer losen Rolle. Die Achse der beiden miteinander verbundenen festen Rollen A hängt an einem Haken. Die Rollen sind mit Rillen und Zähnen, in denen eine endlose Kette läuft, versehen. Die Kette bildet zwei Schlaufen, in einer davon hängt die lose Rolle, an der die Last Q angebracht ist. An der anderen Schlaufe wirkt die bewegende Kraft P. Die Radien der Rollen A betragen R und r, wobei $r < R$. Es ist die Zugkraft P als Funktion der zu hebenden Last Q zu bestimmen und für folgenden Fall zu berechnen: $Q = 500$ kg, $R = 25$ cm, $r = 24$ cm. Die Reibung ist zu vernachlässigen.

Lösung: $P = \frac{1}{2} Q \left(1 - \frac{r}{R}\right) = 10$ kg.

106. Ein Differentialhebel besteht aus einer Stange AB, die sich im Punkt C auf eine starre Schneide stützt, und einem Querbalken DE, der mit dem Hebel AB durch Gelenkglieder AD und EF verbunden ist. Die Last $Q = 1$ t hängt am Querbalken im Punkt G. Der Abstand zwischen den Vertikalen, die durch die Punkte C und G gehen, beträgt 1 mm.

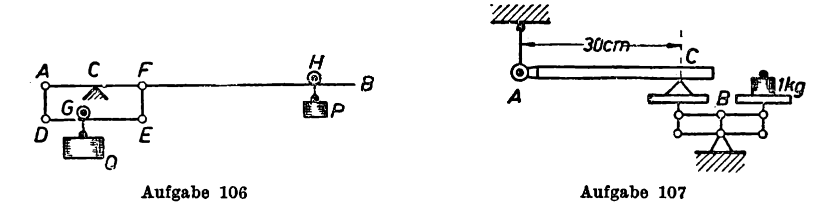
Es ist die Größe des Gewichtes P festzustellen, welches am Hebel AB im Abstand $CH = 1$ m angebracht werden muß, um die Last Q im Gleichgewicht zu halten. Die Reibung werde vernachlässigt.

Lösung: $P = 1$ kg.

107. Um den Schwerpunktsabstand x vom Punkt A eines inhomogenen Stabes AB festzustellen, hat man ihn am Ende A gelenkig befestigt und im Punkte C auf eine Waagschale gelegt. Der Abstand AC beträgt 30 cm. Der Stab wiegt 1,5 kg. Das Gewicht auf der Waagschale beträgt 1 kg.

Es ist der Abstand x zu ermitteln.

Lösung: $x = 20$ cm.



Aufgabe 106 Aufgabe 107

108. Für die Messung großer Kräfte Q wird ein doppeltes Hebelsystem mit den Hebeln ABC und EDF verwendet. Sie sind miteinander durch das Glied CD verbunden. In den Punkten B und E befinden sich Gelenke. Entlang des Hebels EDF kann sich eine Last P von 12,5 kg verschieben. Die Kraft Q im Punkt A wird durch die Last im Abstand l vom Punkt D ausgeglichen.

Um welche Strecke x muß P verschoben werden, damit bei einer Lasterhöhung von Q um 1000 kg die Waage im Gleichgewicht ist?

$$a = 3{,}3 \text{ mm}, \quad b = 660 \text{ mm}, \quad c = 50 \text{ mm}.$$

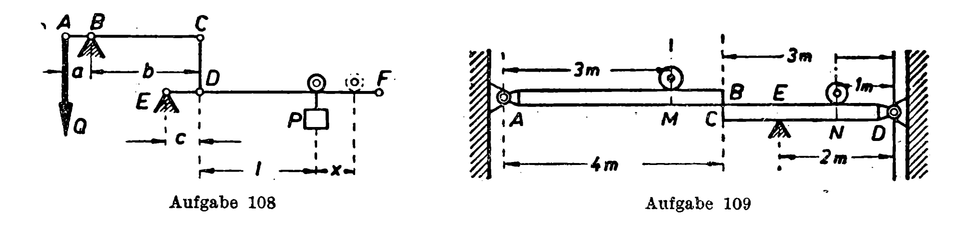
Lösung: $x = 2$ cm.

109. Ein Träger AB sei 4 m lang und wiege 200 kg. Er sei drehbar um das Gelenk A und stütze sich mit seinem Ende B auf einen anderen Träger CD ab, der 3 m lang sei und 160 kg wiege. Dieser Träger werde im Punkte E gestützt und sei durch ein Gelenk D mit der Wand verbunden. In den Punkten M und N wirken Lasten von je 80 kg. Die Abstände betragen:

$$AM = 3 \text{ m}, \quad ED = 2 \text{ m}, \quad ND = 1 \text{ m}.$$

Es sind die Auflagerreaktionen zu ermitteln.

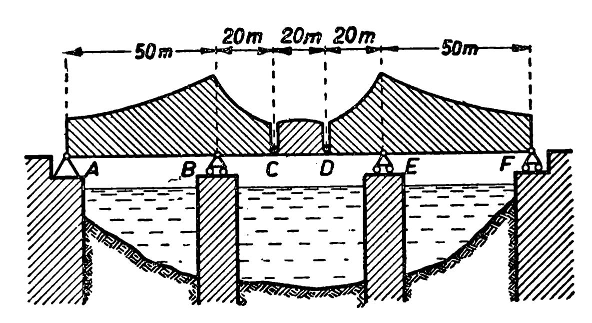
Lösung: $R_A = 120$ kg; $R_B = 160$ kg; $R_E = 400$ kg; $R_D = 0$.



Aufgabe 108 Aufgabe 109

110. Eine Konsolbrücke besteht aus drei Teilen: AC, CD und DF, von denen jeder äußere Teil auf zwei Pfeile liegt. Die entsprechenden Abmessungen sind: $AC = DF = 70$ m, $CD = 20$ m, $AB = EF = 50$ m. Die Brücke ist mit einer Streckenlast $q = 6$ t/m belastet.

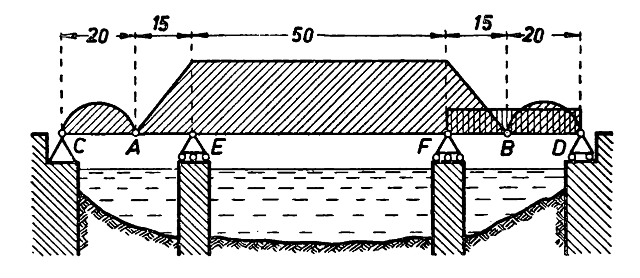
Es ist der Druck auf die Pfeiler A und B, der durch diese Belastung hervorgerufen wird, zu ermitteln.



Lösung: $N_A = 102$ t; $N_B = 378$ t.

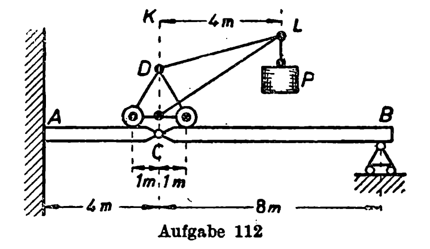
111. Eine Pfeilerbrücke besteht aus einem Hauptträger AB und zwei Seitenträgern AC und BD. Das Eigengewicht pro laufenden Meter des Trägers AB beträgt 1,5 t, der Träger AC und BD 1 t.

Es sind sämtliche Auflagerreaktionen zu bestimmen, wenn der rechte Träger FD durch einen Zug der Streckenlast 3 t/m belastet wird. Die entsprechenden Abmessungen sind $AC = BD = 20$ m, $AE = FB = 15$ m, $EF = 50$ m.



Lösung: $R_C = 10$ t; $R_D = 40$ t; $R_E = 54{,}25$ t; $R_F = 160{,}75$ t.

112. Ein waagerecht liegender Träger ACB ist mit dem Ende A in die Wand eingelassen. Das Ende B liegt auf einem Rollenlager. Im Punkt C ist ein Gelenk angebracht. Auf dem Träger steht ein Kran mit einer Traglast $P = 1$ t. Die Ausladung des Kranes beträgt $KL = 4$ m, das Krangewicht $Q = 5$ t.



Aufgabe 112

Der Schwerpunkt des Kranes liegt auf der Vertikalen CD. Die Abmessungen sind aus der Zeichnung ersichtlich.

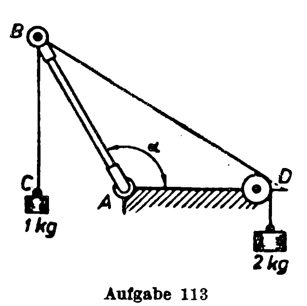
Bei Vernachlässigung des Trägergewichtes sind die Auflagerreaktionen in den Punkten A und B zu bestimmen. Der Kran steht dabei in der gleichen Ebene wie der Träger AB.

Lösung: $R_A = 5{,}375$ t; $R_B = 0{,}625$ t; $M_A = 20{,}5$ tm.

4. Willkürliches ebenes Kräftesystem

113. An einer um das Gelenk A drehbaren Stange AB ist im Punkt B ein Seil befestigt, an dem ein 1 kg schweres Gewicht hängt. Das Seil führt vom Punkte B über eine Rolle D und trägt an seinem anderen Ende ein Gewicht von 2 kg.

Es ist der Winkel $BAD = \alpha$ zu ermitteln, bei dem sich die Stange im Gleichgewicht befindet. Die Rollenreibung ist zu vernachlässigen, Stangengewicht 2 kg, Stangenlänge $AB = AD$.

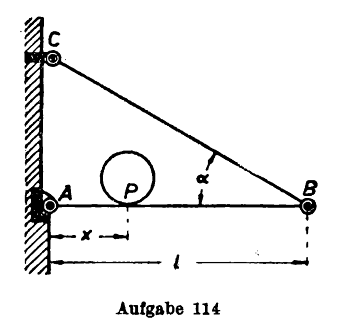


Aufgabe 113

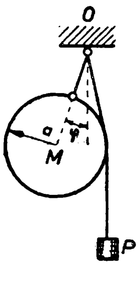
Lösung: $\alpha = 120°$.

114. Ein waagerechter Kranträger der Länge l ist an der Wand mit einem Gelenk befestigt und wird am anderen Ende B durch eine Zugstange BC gehalten, die mit dem Träger AB einen Winkel α bildet. Längs des Trägers kann sich eine Last P verschieben, deren Lage durch den veränderlichen Abstand $AP = x$ angegeben wird. Es ist die Stabkraft der Zugstange BC in Abhängigkeit von der Lage der Last zu ermitteln. Das Gewicht des Trägers ist zu vernachlässigen.

Lösung: $T = \frac{P \cdot x}{l \cdot \sin \alpha}$.



Aufgabe 114



Aufgabe 115

115. Eine Kugel vom Gewicht Q und dem Radius a und eine Last P sind mit einem Seil im Punkte O befestigt, wie aus der Zeichnung zu ersehen ist. Abstand $OM = b$.

Es soll ermittelt werden, wie groß der Winkel φ ist, den die Gerade OM mit der Vertikalen bei Gleichgewicht bildet.

Lösung: $\sin\varphi = \frac{a}{b}\,\frac{P}{P+Q}$.

116 Ein Winkelhebel ABC, der sich um die feste Achse B drehen kann, wiegt 8 kg. Der Schenkel AB ist 40 cm lang, der Schenkel $BC = 1$ m. Der Schwerpunkt des Hebels liege im Abstand 21,2 cm von der vertikalen Geraden BD. In den Punkten A und C sind Seile befestigt, die über die Rollen E und F laufen. An den Seilen hängen die Lasten $P_1 = 31$ kg; $P_2 = 10$ kg.

Bei Vernachlässigung der Rollenreibung ist der Winkel $BCF = \varphi$ für die Gleichgewichtslage zu ermitteln. Der Winkel BAE beträgt dabei 135°.

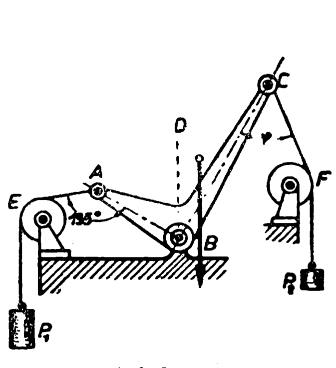
Lösung: $\varphi = 45°$.

117. Eine Winde ist mit einem Sperrad vom Durchmesser d_1 und einer Sperrklinke A ausgerüstet. Um eine Trommel vom Durchmesser d_2, die starr mit dem Rad verbunden ist, ist ein Seil gewickelt, welches die Last Q trägt.

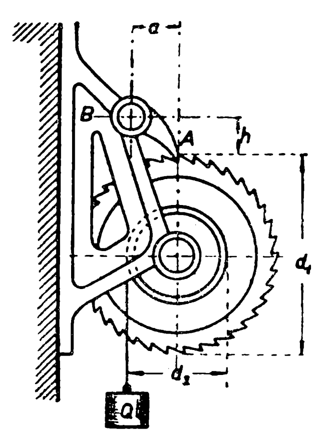
Es ist der Druck R auf die Achse B der Klinke zu ermitteln.

Gegeben sind: $Q = 50$ kg, $d_1 = 420$ mm, $d_2 = 240$ mm, $h = 50$ mm, $a = 120$ mm. Das Klinkengewicht ist außer acht zu lassen.

Lösung: $R = Q \cdot \frac{d_2}{d_1}\,\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a} = 31$ kg.



Aufgabe 116



Aufgabe 117

118. Ein Träger AB vom Gewicht P stützt sich auf zwei glatte geneigte Ebenen CD und DE, die in einer vertikalen Ebene liegen. Der Neigungswinkel von CD sei α, der von DB $90° - \alpha$.

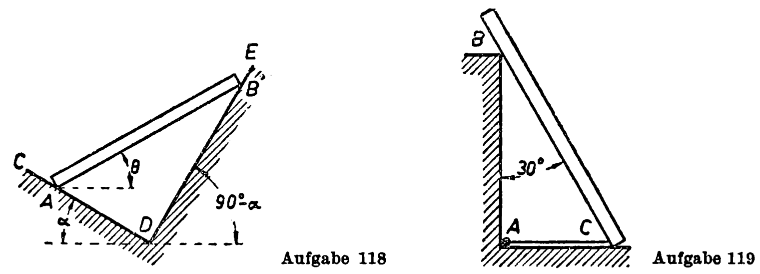
Es sind der Neigungswinkel Θ des Trägers in der Gleichgewichtslage und der Druck des Trägers auf die Ebenen zu bestimmen.

Lösung: $N_A = P \cos \alpha$; $N_B = P \sin \alpha$; $\operatorname{tg} \Theta = \operatorname{ctg} 2\alpha$;
$\Theta = 90° - 2\alpha$ für $\alpha \leqq 45°$.

119. Ein 4 m langer Träger von 60 kg Gewicht liegt mit einem Ende auf dem glatten Fußboden und lehnt an der Stelle B an einem Pfosten von 3 m Höhe, wobei er mit der Senkrechten einen Winkel von 30° bildet. Der Träger wird in dieser Lage durch ein Seil AC, das auf dem Fußboden aufliegt, gehalten.

Bei Außerachtlassung der Reibung sind die Seilkraft T und die Reaktionen R_B und R_C zu bestimmen.

Lösung: $T = 15$ kg; $R_B = 17{,}3$ kg; $R_C = 51{,}3$ kg.



Aufgabe 118 Aufgabe 119

120. Ein 20 kg schwerer Träger AB berührt den Fußboden im Punkt B und bildet mit ihm einen Winkel von 60°. Außerdem ist er noch an den zwei Punkten C und D gestützt.

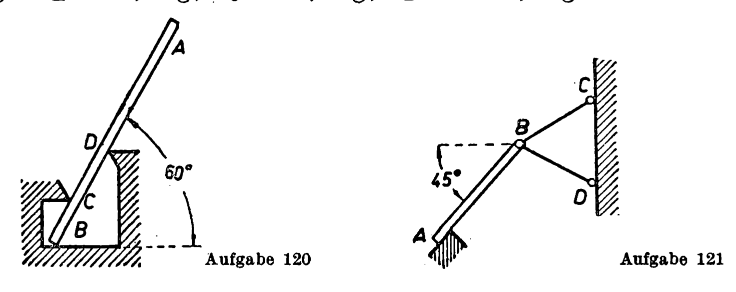
Es sind die Reaktionen in den Punkten B, C und D zu bestimmen. $AB = 3$ m, $CB = 0{,}5$ m, $BD = 1$ m.

Lösung: $R_B = 20$ kg; $R_C = 30$ kg; $R_D = 30$ kg.

121. Eine Platte AB, die $P = 100$ kg wiegt, wird von den beiden Streben BC und BD gehalten und stützt sich im Punkt A ab. Sie bildet mit der Waagerechten einen Winkel von 45°. BCD bildet ein gleichschenkliges Dreieck. Die Punkte C und D liegen auf einer vertikalen Geraden CD.

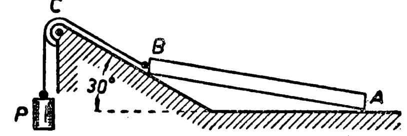
Bei Außerachtlassung der Stabgewichte und unter der Voraussetzung, daß an den Punkten B, C und D Gelenkbefestigungen angebracht sind, ist die Reaktion im Punkte A zu bestimmen und die Kräfte in den Streben zu ermitteln.

Lösung: $R_A = 35{,}4$ kg; $S_C = 89{,}5$ kg; $S_D = -60{,}6$ kg.



Aufgabe 120 Aufgabe 121

122. Eine 100 kg schwere Stange AB berührt mit einem Ende den glatten waagerechten Fußboden, mit dem anderen Ende liegt sie auf einer glatten unter 30° geneigten Fläche auf. Am Ende B wird die Stange von einem Seil, welches über eine Rolle läuft und mit einer Last P versehen ist, gehalten. Ein Teil des Seiles BC ist parallel zur geneigten Fläche.

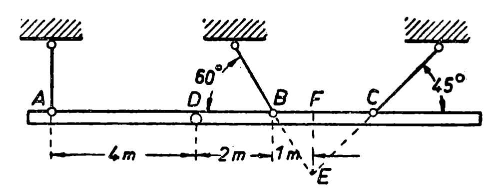


Bei Außerachtlassung der Rollenreibung sind die Last P und der Druck N_A und N_B auf den Fußboden und die geneigte Fläche zu bestimmen.

Lösung: $P = 25$ kg; $N_A = 50$ kg; $N_B = 43{,}3$ kg.

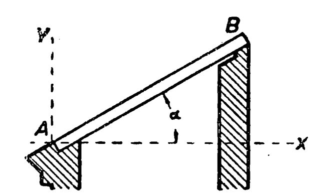
123. Bei einer Brückenmontage war man gezwungen, einen Teil des Brückenträgers ABC mit drei Seilen, wie auf der Zeichnung angegeben, zu heben. Der Träger wog 4200 kg und hatte seinen Schwerpunkt im Punkt D. Die entsprechenden Abstände betrugen: $AD = 4$ m, $BD = 2$ m, $BF = 1$ m.

Es sind die Seilkräfte zu ermitteln. Der Träger liegt waagerecht.



Lösung: $T_A = 1800$ kg; $T_B = 1757$ kg; $T_C = 1243$ kg.

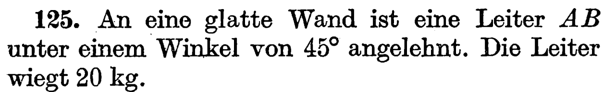
124. Ein schräger Dachbalken AB liegt mit seinem oberen Ende B auf einer Stütze frei auf und stützt sich mit dem anderen Ende an der Wand ab. Die Dachneigung beträgt tg $\alpha = 0{,}5$. Der Balken AB trägt eine senkrechte Belastung von 900 kg, die in der Mitte angreift.

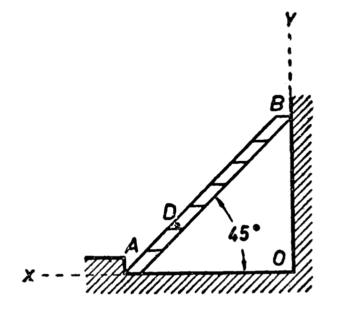


Es sind die Reaktionen in den Punkten A und B zu ermitteln.

Lösung: $X_A = 180$ kg; $Y_A = 540$ kg; $R_B = 402$ kg.

125. An eine glatte Wand ist eine Leiter AB unter einem Winkel von 45° angelehnt. Die Leiter wiegt 20 kg.





Im Punkt D, der um $^1/_3$ der Leiterlänge über dem Fußboden liegt, steht ein 60 kg schwerer Mann.

Es ist der Leiterdruck auf Punkt A und die Wand zu bestimmen.

Lösung: $X_A = 30$ kg; $Y_A = -80$ kg;
$X_B = -30$ kg.

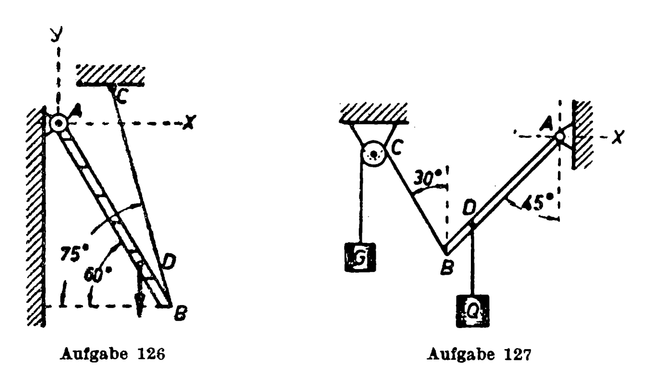
126. Auf einer 6 m langen Leiter, die 240 kg wiegt und um die waagerechte Achse A drehbar ist, steht im Punkt D im Abstand von 2 m vom Ende B ein Mann, der 80 kg wiegt. Am Ende B wird die Leiter von einem Seil BC gehalten.

Es sind die Seilkraft T und die Reaktionskraft des Gelenkes A zu bestimmen, wenn die Leiter 60° und das Seil 75° gegen die Horizontale geneigt sind.

Lösung: $T = 335$ kg; $X_A = 86{,}7$ kg; $Y_A = -3{,}44$ kg.

127. Ein Träger AB vom Gewicht $P = 100$ kg ist mit dem Gelenk A an der Wand befestigt und wird durch ein über eine Rolle laufendes Seil, an dem eine Last G hängt, gehalten. Der Träger bildet zur Vertikalen einen Winkel von 45°. Der Winkel zwischen dem Seilstück BC und der Vertikalen beträgt 30°. Im Punkt D hänge an dem Träger die Last $Q = 200$ kg. Es ist das Gewicht der Last G und die Reaktionskraft des Gelenkes A zu bestimmen, wobei die Rollenreibung unbeachtet bleibt. $BD = {}^1/_4\, AB$.

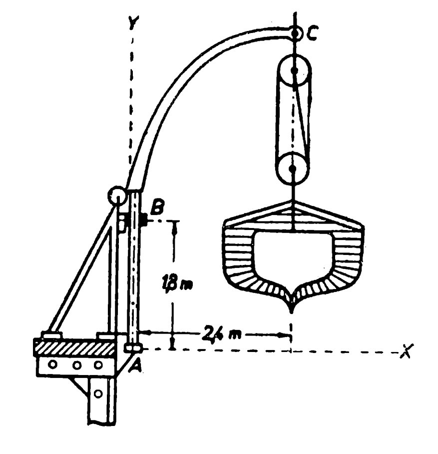
Lösung: $G = 146$ kg; $X_A = 73$ kg; $Y_A = 173$ kg.



Aufgabe 126 Aufgabe 127

128. Ein 960 kg schweres Boot hängt an zwei Bootsträgern. Die Bootslast wird als gleichmäßig verteilt angenommen. Der Bootsträger ABC stützt sich mit seinem unteren Ende, das als Halbkugel ausgebildet ist, auf das Spurlager A ab und geht in einer Höhe von 1,8 m frei durch das Halslager B. Die Trägerausladung beträgt 2,4 m. Bei Vernachlässigung des Trägergewichtes ist der Druck des Bootsträgers auf die Punkte A und B zu bestimmen.

Lösung: $X_A = -640$ kg; $Y_A = -480$ kg;
$X_B = 640$ kg.



129. Ein Hüttenkran ABC hängt an einer senkrechten Drehachse MN. Die Abstände betragen $MN = 5$ m, $AC = 5$ m, sein Gewicht beträgt 2 t. Der Schwerpunkt D liegt 2 m von der Drehachse entfernt. Die Last, die am Punkt C angebracht ist, wiegt 3 t.

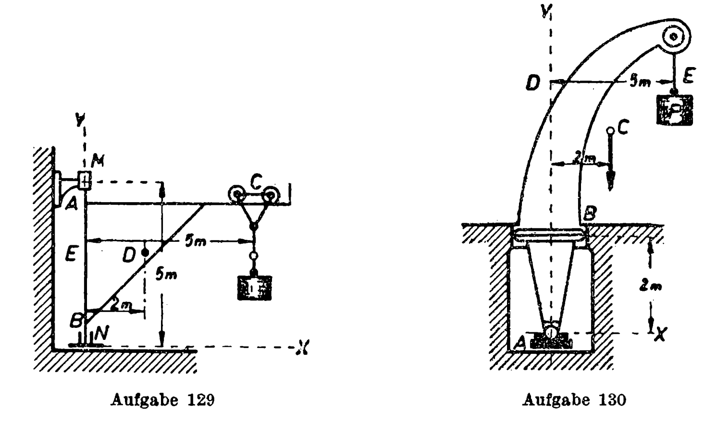
Es sind die Reaktionskräfte des Halslagers M und des Spurlagers N zu ermitteln.

Lösung: $X_M = -3{,}8$ t; $X_N = 3{,}8$ t; $Y_N = 5$ t.

130. Ein Grubenkran, der eine Last $P = 4$ t hebt, hat ein Stützlager A und ein Halslager B. In A stützt er sich auf einer glatten zylindrischen Fläche ab. Die Länge des Teiles AB beträgt 2 m, die Ausladung des Kranes $DE = 5$ m. Das Gewicht des Kranes beträgt 2 t und wirkt auf einer Geraden, deren Abstand von der Senkrechten AY 2 m ist.

Es sind die Auflagerreaktionen in den Punkten A und B zu ermitteln.

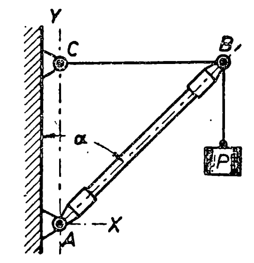
Lösung: $X_A = 12$ t; $Y_A = 6$ t; $X_B = 12$ t.



Aufgabe 129 Aufgabe 130

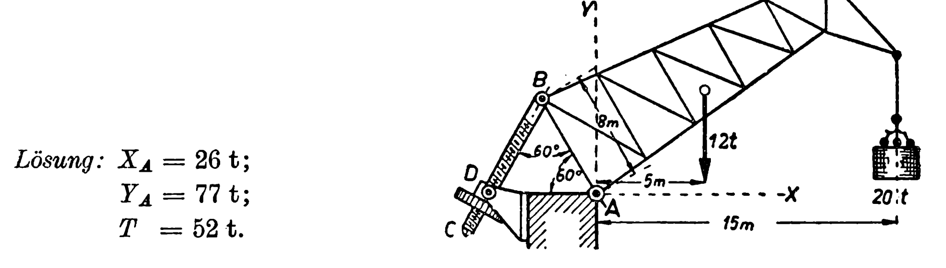
131. Ein Kran besteht aus einem Träger AB, dessen oberes Ende von einem Seil BC gehalten wird. Das untere Ende ist mit Hilfe eines Gelenkes an der Wand befestigt.

Es sind die Seilkraft T und die senkrechte Projektion Y_A des Druckes auf den Punkt A zu ermitteln, wenn die Last P mit 200 kg und das Gewicht des Trägers AB mit 100 kg gegeben sind. Das Gewicht greift an der Trägermitte an. $\alpha = 45°$.



Lösung: $T = 250$ kg; $Y_A = -300$ kg.

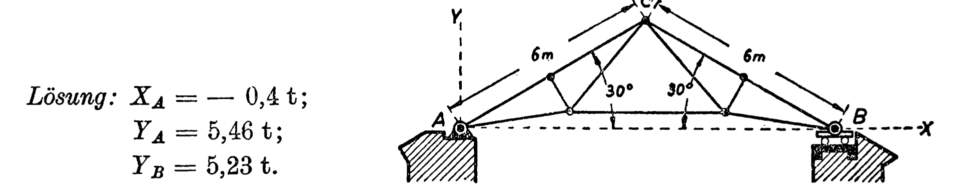
132. Ein Kran ist im Punkt A mit einem Gelenk versehen und mit Hilfe einer Stellschraube BC schwenkbar. Diese Stellschraube ist mit dem Kranträger am Gelenk B verbunden und geht durch die gelenkige Mutter D, wobei $AB = AD = 8$ m ist. In einer Kranstellung, bei der ABD ein gleichschenkliges Dreieck bildet, hat der Schwerpunkt des Trägers 5 m Abstand von der Senkrechten, die durch den Punkt A hindurchgeht. Die Kranausladung vom Punkt A aus beträgt dabei 15 m. Die zu hebende Last wiegt 20 t, das Krangewicht beträgt 12 t. Es sind die Gelenkreaktionen und die Schraubenkraft T für die gegebene Kranstellung zu bestimmen.



Lösung: $X_A = 26$ t;
$Y_A = 77$ t;
$T = 52$ t.

133. Ein symmetrischer Dachbinder ABC ist mit einem Ende am Gelenk A befestigt, das andere Ende ruht auf dem Rollenlager B. Der Binder wiegt 10 t. Die Seite AC steht unter gleichmäßig verteiltem, rechtwinklig angreifendem Winddruck. Die resultierende Winddruckkraft beträgt 0,8 t, die Länge $AC = 6$ m, der Winkel $CAB = 30°$.

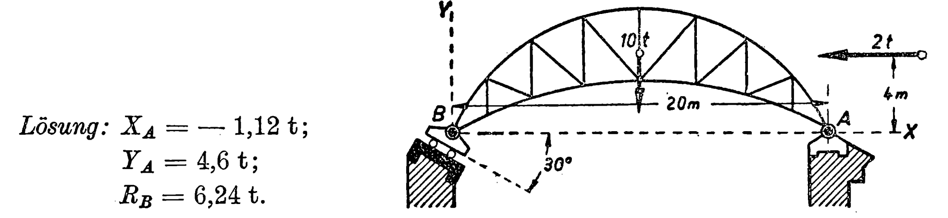
Es sind die Auflagerreaktionen zu bestimmen.



Lösung: $X_A = -0{,}4$ t;
$Y_A = 5{,}46$ t;
$Y_B = 5{,}23$ t.

134. Ein Bogenträger ruht im Punkt A auf einem Gelenk und im Punkt B auf einem Rollenlager, dessen Bewegungsebene eine Neigung von 30° besitzt. Der Abstand AB sei 20 m. Das Gewicht des mit Schnee bedeckten Trägers betrage 10 t. Die resultierende Windkraft der Größe 2 t verläuft parallel zu AB, ihre Wirkungslinie ist von AB 4 m entfernt.

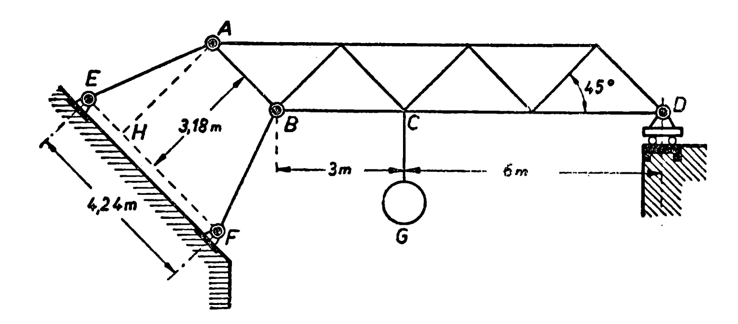
Es sind die Auflagerreaktionen zu bestimmen.



Lösung: $X_A = -1{,}12$ t;
$Y_A = 4{,}6$ t;
$R_B = 6{,}24$ t.

135. Ein Träger *ABCD* liegt im Punkt *D* auf einem Rollenlager und wird in den Punkten *A* und *B* durch schräge Stäbe *AE* und *BF*, die gelenkig in den Punkten *E* und *F* befestigt sind, gehalten. Die Diagonalstreben des Trägers und die Gerade *EF* bilden je einen Neigungswinkel von 45°. Der Stab *BC* ist 3 m lang. Die Stäbe *AE* und *BF* sind gleich lang. Der Abstand EF = 4,24 m, AH = 3,18 m. Der Träger hat einschließlich Belastung ein Gewicht von 7,5 t, welches in Richtung der Geraden *CG* wirkt.

Es ist die Reaktionskraft des Rollenlagers zu ermitteln.



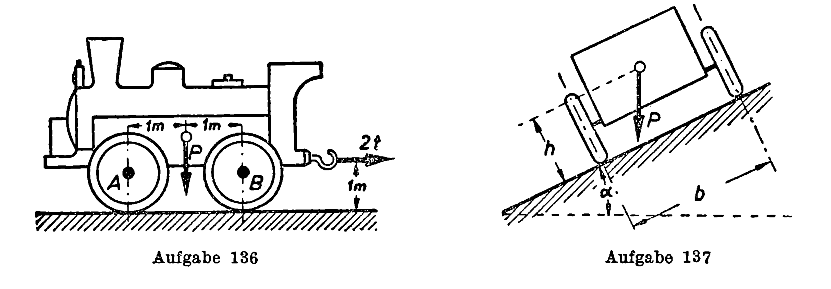
Lösung: R_D = 1,5 t.

136. Eine Lokomotive mit 2 Achsen wiegt 20 t. Die Kraft am Zughaken beträgt 2 t. Es ist der senkrechte Druck der Lokomotivräder auf die Schienen zu bestimmen. Die Abmessungen sind aus der Zeichnung zu entnehmen.

Lösung: N_A = 9 t; N_B = 11 t.

137. Der Normaldruck eines Autohinterrades auf eine waagerechte Straße beträgt 500 kg. Wie hoch wird der Normaldruck dieser Räder auf eine Straße sein, die einen Neigungswinkel von $\alpha = 5°$ bildet, wenn der Schwerpunkt h = 0,8 m und der Spurabstand b = 1,4 m beträgt?

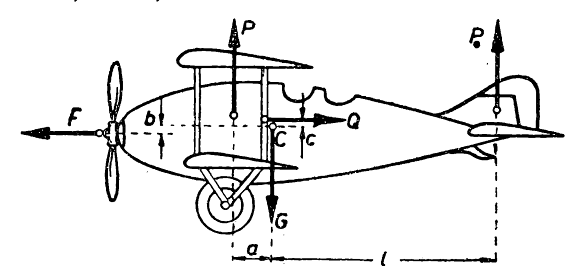
Lösung: Für das tieferliegende Rad beträgt der Druck 548 kg.



Aufgabe 136 Aufgabe 137

138. Beim Geradeausflug eines Flugzeuges müssen sich die wirkenden Kräfte aufheben.

Es ist der Luftwiderstand Q, der Auftrieb P und der Höhenruderdruck P_0 zu bestimmen. Das Gewicht des Flugzeuges $G = 3000$ kg, die Schraubenkraft $F = 400$ kg, die auf der Zeichnung eingetragenen Abstände sind: $a = 20$ cm, $b = 10$ cm, $c = 5$ cm, $l = 5{,}0$ m.



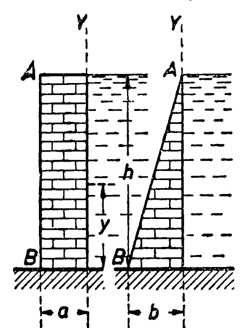
Lösung: $Q = 400$ kg; $P = 2873$ kg; $P_0 = 127$ kg.

139. Der Wasserdruck auf einen kleinen Staudamm wächst proportional mit seinem Abstand von der freien Wasseroberfläche. Er ist dem Gewicht der Wassersäule gleich, dessen Höhe diesem Abstand entspricht und dessen Grundfläche die Flächeneinheit darstellt.

Es ist die Stärke des Staudammbodens für zwei Fälle zu bestimmen:

1. wenn der Querschnitt des Dammes ein Rechteck darstellt,
2. wenn der Querschnitt ein Dreieck ist.

Es soll eine Kippberechnung um die Kante B erfolgen, wobei der Standfestigkeitskoeffizient 2 sein soll. Die Dammhöhe h beträgt 5 m. Spezifisches Gewicht des Wassers $\gamma = 1$ t/m³; spezifisches Gewicht des Damm-Materials: $\gamma_1 = 2{,}2$ t/m³.



Unter Standfestigkeitskoeffizient versteht man das Verhältnis von Widerstandsmoment zu Kippmoment. Für 1 m Staudammlänge läßt sich das Kippmoment darstellen durch

$$\int_0^h \gamma\,(h-y)\;y\,dy.$$

Darin bedeutet $\gamma\,(h-y)\,dy$ die Kraft, die im Abstand y vom Boden aus am Hebelarm y wirkt.

Lösung: $a = 2{,}75$ m; $b = 3{,}37$ m.

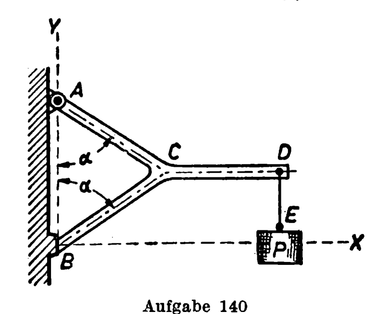
140. Ein Haken besteht aus drei gleichen Stäben AC, BC und CD, die miteinander verbunden sind. Das Gewicht jedes Stabes beträgt p. Der Haken ist im Punkt A an einem Gelenk befestigt, sein Ende B ruht an einer ebenen senkrechten Wand AB. Am Hakenende D hängt eine Last P. Es sind die Auflagerreaktionen in den Punkten B und A zu ermitteln.

Lösung: $-X_A = X_B = \dfrac{2\,(P+2\,p)\sin\alpha + p + 2\,P}{4\cos\alpha}$; $Y_A = 3\,p + P$.

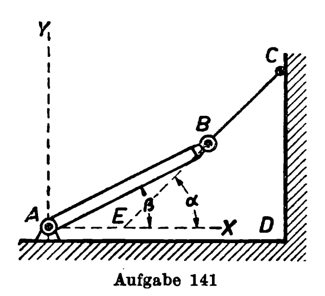
141. Eine Stange AB vom Gewicht P ist am waagerechten Fußboden AD mit dem Ende A gelenkig befestigt. Das andere Ende B wird durch ein Seil BC, das zur Wand CD führt, gehalten. Es sind die Reaktionskraft des Gelenkes und die Seilkraft T zu ermitteln, wenn die Winkel $CED = \alpha$, $BAD = \beta$ sind.

Lösung: $X_A = -P \frac{\cos\alpha \cos\beta}{2\sin(\alpha - \beta)}$; $Y_A = P\left[1 - \frac{\sin\alpha\cos\beta}{2\sin(\alpha-\beta)}\right]$;

$$T = P \frac{\cos\beta}{2\sin(\alpha-\beta)}.$$

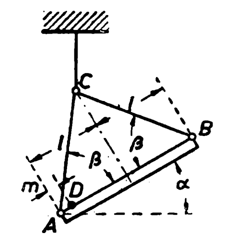


Aufgabe 140



Aufgabe 141

142. Ein $2\,l$ langes Brett AB vom Gewicht p hängt an zwei Seilen AC und CB, die gleich lang sind. Jedes der Seile bildet mit dem Brett einen Winkel β. Im Punkt D, dessen Abstand AD gerade m beträgt, steht ein Mann vom Gewicht P. Es sind der Neigungswinkel des Brettes bei Gleichgewicht und die Seilkräfte T_A und T_B zu bestimmen.

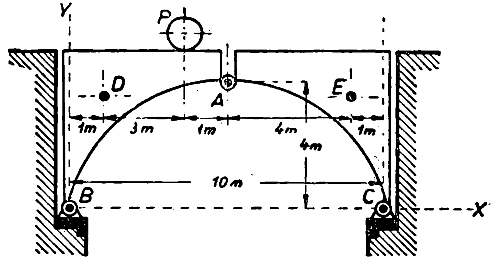


Lösung: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{(l-m)\,P}{l\,(p+P)}\operatorname{ctg}\beta$; $T_A = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin 2\beta}(P+p)$;

$$T_B = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin 2\beta}(P+p).$$

143. Zwei Teile einer Brücke sind miteinander durch das Gelenk A und an den Uferpfosten durch die Gelenke B und C verbunden. Jedes Brückenteil wiegt 4 t, ihre Schwerpunkte liegen in D und E. Auf der Brücke befindet sich eine Last P = 2 t. Die Abmessungen sind auf der Zeichnung angegeben.

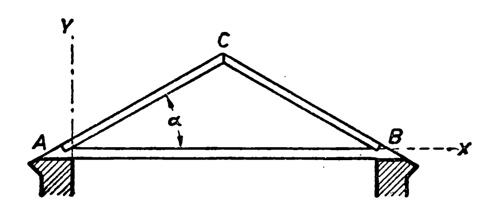
Es ist der Gelenkdruck A sowie die Auflagerreaktionen in den Punkten B und C zu bestimmen.



Lösung: $X_A = \pm\, 2$ t;
$Y_A = \mp\, 0{,}8$ t;
$X_B = -X_C = 2$ t;
$Y_B = 5{,}2$ t; $Y_C = 4{,}8$ t.

144. Ein Dachstuhl besteht aus zwei Balken AC und BC gleicher Länge, die im Punkte C miteinander verbunden sind und deren anderes Ende in den Dachbalken AB eingelassen ist. Die Dachneigung beträgt $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}5$. Jeder Balken trägt eine Last von 900 kg. Die Belastung steht senkrecht und wirkt in der Mitte des Balkens.

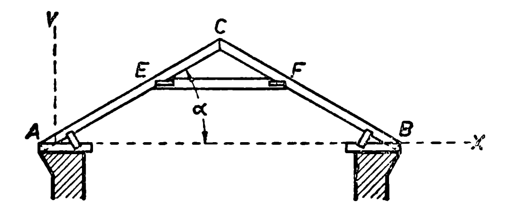
Es ist der Balkendruck in den Punkten C und A zu bestimmen, wobei die Punkte A, B und C als Gelenkverbindungen aufzufassen sind.



Lösung: $X_A = -900$ kg;
$Y_A = -900$ kg;
$X_C = \pm 900$ kg; $Y_C = 0$.

145. Ein Dachstuhl besteht aus zwei Balken AC und BC, die gleich lang sind und mit ihrem unteren Ende auf einer Wand aufliegen. Der Dachstuhl wird durch einen Dachbalken EF zusammengehalten. Die Dachneigung beträgt $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}5$, $AC = 3\,CE$. Jeder Balken AC und BC trägt eine Last von 800 kg. Die Belastung steht senkrecht und wirkt in der Mitte des Balkens.

Es ist der Druck auf die Wand im Punkt A und die Zugkraft im Balken EF zu bestimmen, wobei angenommen wird, daß die Balken in C, E und F mit Gelenken verbunden sind. Die Reibung bleibe unberücksichtigt.



Lösung: $Y_A = -800$ kg;
$S = 2400$ kg.

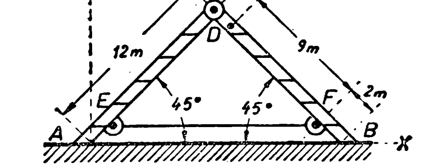
146. Ein Dachstuhl besteht aus den Balken AC und CB. Die Belastung durch das Eigengewicht beträgt 100 kg/m. Auf den Balken AC wirkt im Punkt D eine Kraft $P = 800$ kg, die senkrecht auf AC steht.

Gegeben ist: $\frac{AD}{DC} = \frac{3}{2}$. Die Abmessungen sind aus der Zeichnung zu entnehmen.

Es sind der Druck zwischen den Balken im Punkt C und die Auflagerreaktionen in den Punkten A und B zu ermitteln, wobei angenommen wird, daß im Punkt C Gelenkbefestigung vorliegt.

Lösung: $X_A = 431$ kg; $Y_A = 1487$ kg;
$X_B = -831$ kg; $Y_B = 1940$ kg;
$X_C = \mp 831$ kg; $Y_C = \pm 940$ kg.

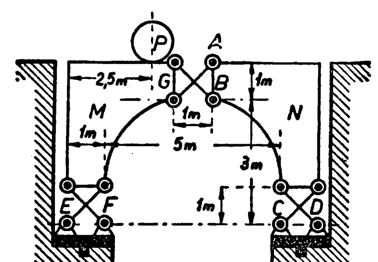
147. Auf einer glatten waagerechten Ebene steht eine Tragleiter, die aus zwei 12 m langen Teilen AC und BC besteht, von denen jeder 18 kg wiegt. Die Leiter ist mit einem Gelenk C versehen und wird vom Seil EF gehalten. Der Abstand $BF = AE = 2$ m. Der Schwerpunkt der Teile AC und BC liegt jeweils in der Mitte. Im Punkt D bei einem Abstand $CD = 1$ m stehe ein 72 kg schwerer Mann. Es sind die Reaktionskräfte des Fußbodens und der Gelenkdruck sowie die Seilkraft T des Seiles EF zu bestimmen, wobei die Winkel $BAC = ABC = 45°$ sind.



Lösung: $R_A = 51$ kg; $R_B = 57$ kg;
$X_C = \pm 50{,}4$ kg; $Y_C = \pm 33$ kg;
$T = 50{,}4$ kg.

148. Zwei gleiche Brückenteile M und N sind durch sechs Gelenkstäbe unter einem Winkel von 45° miteinander und mit den Auflagern starr verbunden. Die Abmessungen sind aus der Zeichnung zu entnehmen. Im Punkt G greift eine senkrechte Last P an.

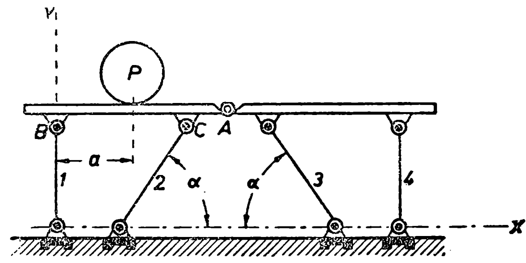
Es sind die Stabkräfte zu ermitteln.



Lösung: $R_A = 0$; $R_B = P\frac{\sqrt{2}}{3}$; $R_C = 0$;
$R_D = P\frac{\sqrt{2}}{3}$; $R_E = P\frac{\sqrt{2}}{2}$;
$R_F = P\frac{\sqrt{2}}{6}$.

149. Eine Brücke bestehe aus zwei waagerechten Balken, die durch ein Gelenk A verbunden sind. Die Balken sind durch die Gelenkstäbe 1, 2, 3, 4 am Boden befestigt, wobei die äußeren Stäbe senkrecht und die mittleren unter einem Winkel $\alpha = 60°$ stehen. Die entsprechenden Abmessungen betragen: $BC = 6$ m, $AB = 8$ m.

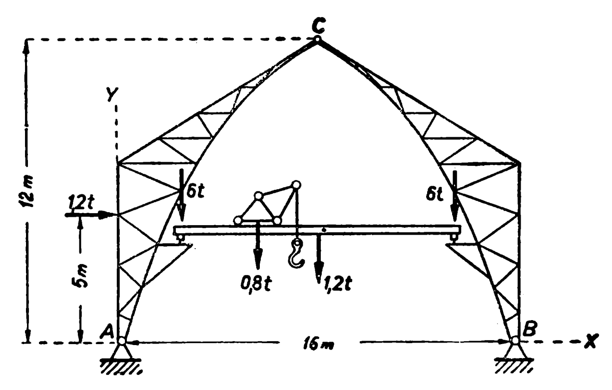
Es sind die Stabkräfte und der Gelenkdruck in A zu bestimmen, wenn die Brücke eine senkrechte Belastung $P = 15$ t im Abstand vom Punkt B $a = 4$ m trägt.



Lösung: $S_1 = -6{,}25$ t; $S_2 = S_3 = -5{,}77$ t; $S_4 = 1{,}25$ t;
$X_A = \pm 2{,}89$ t; $Y_A = \mp 3{,}75$ t.

150. Entlang einer Werkhalle, die von einem Dreigelenkbogen gestützt wird, fährt auf Schienen ein Brückenkran. Der Querbalken, der sich auf den Schienen bewegt, wiegt 1,2 t, der unbeladene Kran 0,8 t. Die Wirkungslinie des Krangewichtes hat von der linken Schiene den Abstand 0,25 l (l = Querbalkenlänge). Jede Bogenhälfte wiegt 6 t, ihre Schwerachse liegt im Abstand von 2 m von der Vertikalen, die durch die entsprechende Stütze A bzw. B geht. Die Stützschienen des Kranes befinden sich im Abstand von 1,8 m von diesen Vertikalen. Die Halle ist 12 m hoch und hat eine Breite von 16 m. Die Resultierende des Winddruckes von 1,2 t verläuft im Abstand von 5 m parallel zu AB.

Es sind die Reaktionen in den Gelenken A und B und der Gelenkdruck C zu bestimmen.

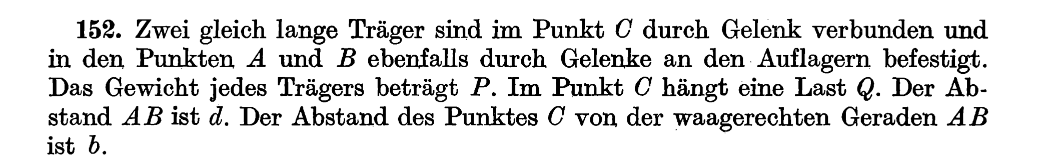


Lösung: $X_A = 0{,}2$ t; $Y_A = 6{,}78$ t; $X_B = -1{,}4$ t;
$Y_B = 7{,}22$ t; $X_C = \pm 1{,}4$ t; $Y_C = \mp 0{,}42$ t.

151. Eine Last $P = 25$ kg hängt am Ende eines waagerechten Trägers AB. Das Gewicht des Trägers $Q = 10$ kg wirkt im Punkt E. Der Träger ist mittels Gelenk A an der Wand befestigt und wird durch die Stange CD, die ebenfalls mit einem Gelenk befestigt ist, gestützt. Das Gewicht der Stange CD ist zu vernachlässigen. Die Abmessungen sind aus der Zeichnung ersichtlich.

Es sind die Reaktionen in den Gelenken A und C zu ermitteln.

Lösung: $X_A = -30$ kg; $Y_A = -17$ kg; $R_C = 60$ kg.



152. Zwei gleich lange Träger sind im Punkt C durch Gelenk verbunden und in den Punkten A und B ebenfalls durch Gelenke an den Auflagern befestigt. Das Gewicht jedes Trägers beträgt P. Im Punkt C hängt eine Last Q. Der Abstand AB ist d. Der Abstand des Punktes C von der waagerechten Geraden AB ist b.

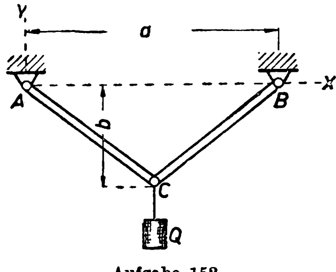
Es sind die Reaktionen der Gelenke A und B zu bestimmen.

Lösung: $-X_A = X_B = \frac{d}{4b}(P + Q)$; $Y_A = Y_B = P + \frac{Q}{2}$.

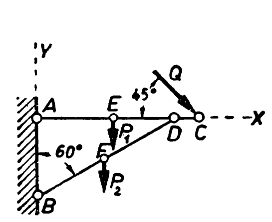
153. Zwei Stäbe AC und BD von gleicher Länge sind mit einem Gelenk im Punkt D verbunden und zugleich in den Punkten A und B an der senkrechten Wand gelenkig befestigt. Der Stab AC liegt waagerecht, der Stab BD bildet mit der senkrechten Wand einen Winkel von 60°. Die Stange AC wird im Punkt E von einer senkrechten Kraft $P_1 = 40$ kg belastet, im Punkt C wirkt eine Kraft $Q = 100$ kg unter einem Neigungswinkel von 45°. Der Stab BD trägt im Punkt F eine senkrechte Kraft $P_2 = 40$ kg. Gegeben sind: $AE = EC$; $BF = FD$.

Es sind die Reaktionen in den Gelenken A und B zu bestimmen.

Lösung: $X_A = -287$ kg; $Y_A = 6$ kg; $X_B = 216$ kg; $Y_B = 145$ kg.



Aufgabe 152

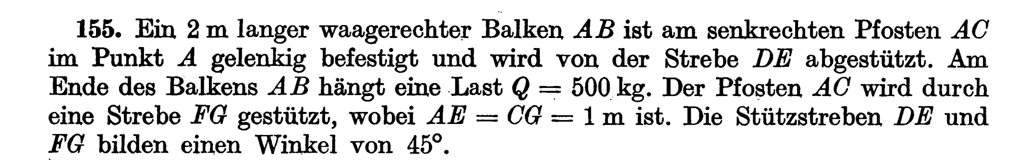


Aufgabe 153

154. Eine Aufhängung besteht aus zwei Balken AB und CD, die im Punkt D gelenkig verbunden und mit den Gelenken A und C an der Decke befestigt sind. Der Balken AB wiegt 60 kg, sein Gewicht wirkt im Punkt E. Der Balken CD wiegt 50 kg, sein Gewicht wirkt im Punkt F. Im Punkt B des Balkens AB greife eine Kraft $P = 200$ kg an.

Es sind die Reaktionen in den Gelenken A und C zu ermitteln, wobei folgende Abmessungen gegeben sind: $AB = 1$ m, $CD = 0{,}8$ m, $AE = 0{,}4$ m, $CF = 0{,}4$ m. Die Neigungswinkel der Balken AB und CD betragen $\alpha = 60°$ und $\beta = 45°$.

Lösung: $-X_A = X_C = 135$ kg; $Y_A = 150$ kg; $Y_C = 160$ kg.



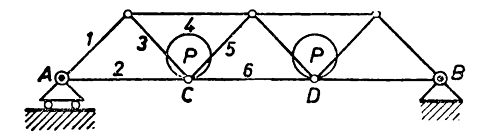
155. Ein 2 m langer waagerechter Balken AB ist am senkrechten Pfosten AC im Punkt A gelenkig befestigt und wird von der Strebe DE abgestützt. Am Ende des Balkens AB hängt eine Last $Q = 500$ kg. Der Pfosten AC wird durch eine Strebe FG gestützt, wobei $AE = CG = 1$ m ist. Die Stützstreben DE und FG bilden einen Winkel von 45°.

Es sind die Kräfte S_E und S_F in den Streben DE und FG und die Reaktion des Bodens im Punkt C zu ermitteln. Dabei muß angenommen werden, daß es sich um Gelenkbefestigungen handelt, wobei das Balkengewicht und das Gewicht des Pfostens und der Streben unbeachtet bleiben.

Lösung: $S_E = -1410$ kg; $S_F = -1410$ kg;
$X_C = 1000$ kg; $Y_C = -500$ kg.

156. An einem Brückenträger, wie ihn die Zeichnung zeigt, sind die Punkte C und D mit $P = 10$ t senkrecht belastet. Die Verstrebungen bilden einen Winkel von 45°.

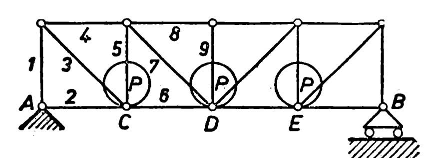
Es sind die Kräfte in den Stäben 1, 2, 3, 4, 5 und 6, die durch die Belastung hervorgerufen werden, zu ermitteln.



Lösung: $S_1 = -14{,}1$ t; $S_2 = +10$ t; $S_3 = +14{,}1$ t;
$S_4 = -20$ t; $S_5 = 0$; $S_6 = +20$ t.

157. An einem Brückenträger, wie ihn die Zeichnung zeigt, sind die Punkte C, D und E mit $P = 10$ t belastet. Die Verstrebungen bilden einen Winkel von 45°.

Es sind die in den Verstrebungen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 wirkenden Stabkräfte, die durch die gegebene Belastung entstehen, zu ermitteln.



Lösung: $S_1 = -15$ t; $S_2 = 0$; $S_3 = +21{,}2$ t;
$S_4 = -15$ t; $S_5 = -5$ t; $S_6 = +15$ t;
$S_7 = +7{,}1$ t; $S_8 = -20$ t; $S_9 = 0$.

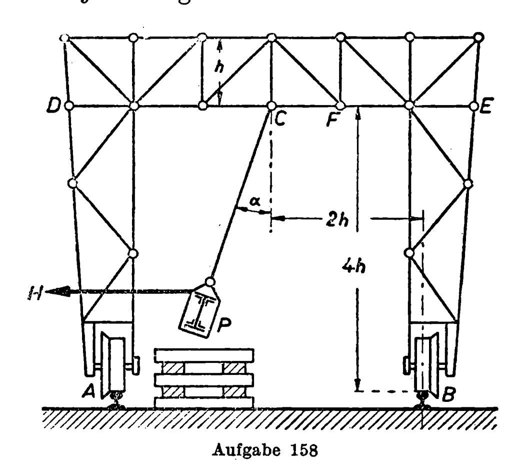
158. Zur Brückenmontage dient ein Behelfskran aus Holz, der sich mit Rädern auf den Schienen A und B bewegt. An dem mittleren Punkt C des unteren Trägers DE hängt an einer Kette eine Lasthebeeinrichtung. Die zu hebende Last ist $P = 5$ t schwer. Im Moment des Lastabhebens vom Gerüst bildet die Kette mit der Senkrechten einen Winkel $\alpha = 20°$. Um ein Pendeln der Last zu vermeiden, wird sie mit einem Seil PH in ihrer Lage gehalten. Unter der Annahme,

daß die waagerechte Kettenkraftkomponente von der rechten Schiene B aufgenommen wird, ist die Stabkraft S_1 in der waagerechten Strebe CF im Augenblick des Lastabhebens vom Gerüst zu bestimmen. Weiterhin ist diese Stabkraft mit jener Kraft S_2 zu vergleichen, die sich beim Winkel $\alpha = 0°$ ergeben würde. Die Abmessungen sind aus der Zeichnung ersichtlich.

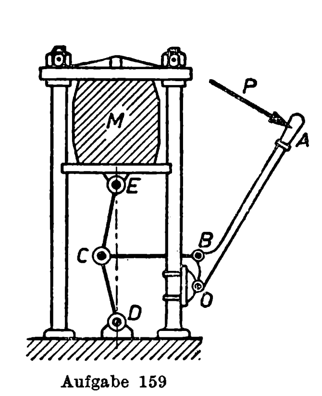
Lösung: $S_1 = 10{,}46$ t; $S_2 = 5$ t.

159. Mit welcher Kraft wird ein Körper M von der gezeichneten Presse zusammengepreßt? Die Kraft beträgt $P = 20$ kg und wirkt rechtwinklig zum Hebel OA, der um eine starre Achse O beweglich ist. In der angegebenen Stellung der Presse bildet die Stange BC mit OB einen rechten Winkel, BC halbiert den Winkel ECD, wobei der Winkel $CED = \operatorname{arctg} 0{,}2 = 11° \, 20'$ beträgt. $OA = 1$ m; $OB = 10$ cm.

Lösung: 500 kg.



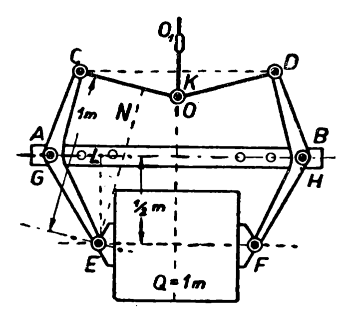
Aufgabe 158



Aufgabe 159

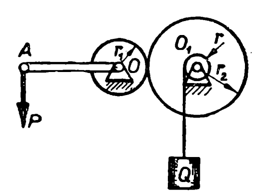
160. Die Kette OO_1 einer Greifzange ist mit den Stangen $OC = OD = 60$ cm durch ein Gelenk O verbunden. Die Stangen sind gelenkig an zwei gleichen gebogenen Hebeln CAE und DBF befestigt. die sich um die Punkte A und B der Verbindungsstange GH drehen können. Die Gelenke E und F haben besondere Backen, die die Last von $Q = 1$ t durch Reibungsschluß halten. Der Abstand des Punktes E von der Stange GH beträgt $EL = 50$ cm, der senkrechte Abstand desselben Punktes von der Stange OC $EN = 1$ m. Die Höhe des Dreiecks COD beträgt $OK = 10$ cm.

Es ist die Stangenkraft GH zu ermitteln, wobei das Gewicht des Mechanismus unbeachtet bleibt.



Lösung: 6 t.

161. Der Radius einer Windentrommel beträgt $r = 5$ cm, die Radien der Zahnräder: $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 20$ cm, die Kurbellänge $OA = 40$ cm. Bei Vernachlässigung der Reibung ist die senkrecht zur Kurbel wirkende Kraft P zu ermitteln, die erforderlich ist, um eine $Q = 200$ kg schwere Last mit konstanter Geschwindigkeit zu heben.



Lösung: $P = 12{,}5$ kg.

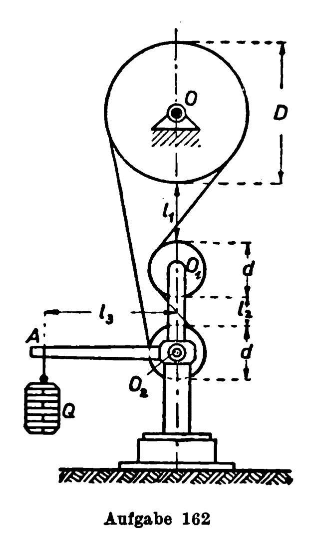
162. Wie groß muß die Last Q sein, die mit Hilfe des gezeichneten Riemenspanners dem Treibriemen an der Spannrolle O_1 eine Spannkraft von P erteilt?

Gegeben sind: $AO_2O_1 = 90°$; $D = 55$ cm; $d = 15$ cm; $l_1 = 35$ cm; $l_2 = 15$ cm; $l_3 = 45$ cm; $P = 18$ kg.

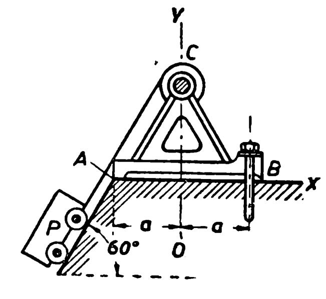
Lösung: $Q = 12$ kg.

163. Eine $P = 480$ kg schwere Last wird auf einer glatten, um 60° geneigten Fläche mit einem Seil, das parallel zur Fläche verläuft, durch eine Winde gehalten. Die Winde ruht im Punkt A auf glattem Boden und ist im Punkt B mit Bolzen am Boden befestigt. Ihr Gewicht beträgt 240 kg; die Wirkungslinie ist CO. Es sind die Auflagerreaktionen zu ermitteln, wobei der Abstand des Seiles von der Fläche außer acht gelassen werden soll.

Lösung: $Y_A = 480$ kg; $X_B = 208$ kg; $Y_B = 120$ kg.

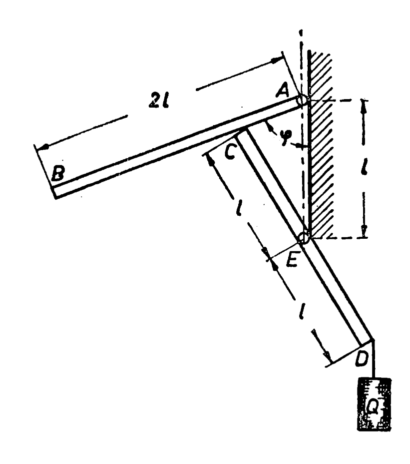


Aufgabe 162



Aufgabe 163

164. Eine Stange AB, deren Länge $2\,l$ und deren Gewicht P beträgt, kann sich am Punkt A um ihre waagerechte Achse drehen. Diese Stange stützt sich auf eine gleich lange Stange CD, die sich um die waagerechte Achse, die in Stangenmitte bei Punkt E liegt, drehen kann. Die Punkte A und E liegen auf einer Senkrechten im Abstand $AE = 1$ m. Am Ende D der Stützstange hängt eine Last $Q = 2\,P$.

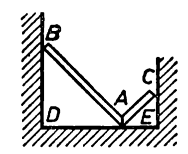


Es ist der Winkel φ zu ermitteln, den die Stange AB mit der Vertikalen in der Gleichgewichtslage bildet. Reibung soll dabei nicht berücksichtigt werden.

Lösung: $\varphi = \arccos \frac{1}{8} = 82^\circ\, 50'$.

165. Zwei Stangen AB und AC ruhen im Punkt A auf glattem waagerechtem Boden und berühren in den Punkten B und C die senkrechten Wände.

Es ist der Abstand DE zwischen den Wänden zu bestimmen, bei dem sich die Stangen im Gleichgewicht befinden und einen Winkel von 90° bilden. Gegeben: Länge $AB = a$, Länge $AC = b$, das Gewicht von $AB = P_1$, das Gewicht von $AC = P_2$.



Lösung: $DE = \frac{a\sqrt{P_2} + b\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_1 + P_2}}$.

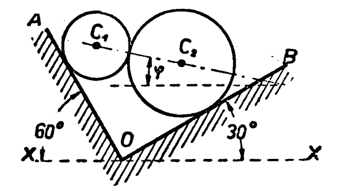
166. Ein um die waagerechte Achse A drehbarer Balken AB stützt sich auf einen glatten Zylinder vom Radius r ab. Der Zylinder liegt auf einer waagerechten Ebene und wird von einem undehnbaren Faden AC gehalten. Der Balken wiege 16 kg. Die Länge $AB = 3r$, $AC = 2r$.

Es sind die Seilkraft T und der Balkendruck auf das Gelenk A zu ermitteln.

Lösung: $T = 6{,}9$ kg; $X_A = -6$ kg; $Y_A = -12{,}5$ kg.

167. Zwischen zwei glatten schrägstehenden Flächen OA und OB liegen zwei sich berührende Zylinder. Der Zylinder mit dem Mittelpunkt C_1 wiegt $P_1 = 10$ kg, der mit dem Mittelpunkt C_2 wiegt $P_2 = 30$ kg.

Es sind der Winkel φ, den die Gerade C_1C_2 mit der waagerechten Achse xx_1 bildet, der Druck N_1 und N_2 der Zylinder auf die Flächen sowie der gegenseitige Zylinderdruck N zu bestimmen. Die Winkel betragen: $AOx_1 = 60°$ und $BOx = 30°$.



Lösung: $\varphi = 0$; $N_1 = 20$ kg; $N_2 = 34{,}6$ kg; $N = 17{,}3$ kg.

168. Zwei glatte Kugeln C_1 und C_2, deren Radien R_1 und R_2 und deren Gewichte P_1 und P_2 betragen, hängen an den Seilen AB und AD am Punkte A. $AB = l_1$; $AD = l_2$; $l_1 + R_1 = l_2 + R_2$; Winkel $BAD = \alpha$.

Es sind der Winkel Θ, den das Seil AD mit der waagerechten Fläche AE bildet, die Seilkräfte T_1; T_2 und der gegenseitige Druck der Kugeln zu bestimmen.

Lösung: $\operatorname{tg}\Theta = -\dfrac{P_2 + P_1\cos\alpha}{P_1\sin\alpha}$; $T_1 = P_1\dfrac{\sin\left(\Theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$;

$$T_2 = P_2\frac{\sin\left(\Theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}; \quad N = \pm P_2\frac{\cos\Theta}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

169. Zwei gleiche Zylinder vom Radius r und dem Gewicht P tragen einen dritten Zylinder vom Gewicht Q und dem Radius R. Die beiden Zylinder liegen auf einer waagerechten Fläche und sind mit einem undehnbaren Faden der Länge $2r$ verbunden.

Es sind die Fadenkraft sowie der Zylinderdruck auf die Fläche und der gegenseitige Druck der Zylinder zu bestimmen. Die Reibung ist zu vernachlässigen.

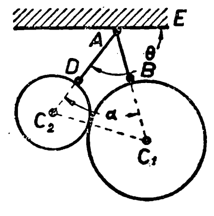
Lösung: Der Druck jedes einzelnen Zylinders auf die Fläche beträgt: $P + \dfrac{Q}{2}$.

Der Druck zwischen dem oberen und jedem unteren Zylinder beträgt:

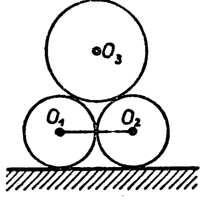
$$\frac{Q(R + r)}{2\sqrt{R^2 + 2rR}}.$$

Die Fadenkraft beträgt:

$$\frac{Qr}{2\sqrt{R^2 + 2rR}}.$$



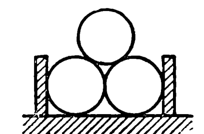
Aufgabe 168



Aufgabe 169

170. Drei gleiche Rohre wiegen $P = 120$ kg und liegen so, wie auf der Zeichnung angegeben.

Es ist der Druck jedes untenliegenden Rohres auf den Boden und auf die seitlichen Haltewände zu bestimmen. Reibung ist zu vernachlässigen.

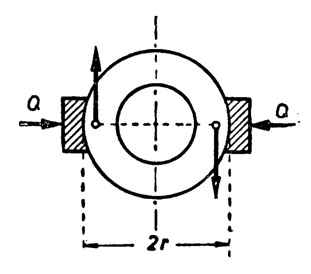


Lösung: Bodendruck: 180 kg;
Seitenwändedruck auf jede Wand: 34,6 kg.

171. Eine Welle wird durch zwei Kräfte mit einem Moment $M = 100$ mkg belastet. Auf der Welle sitzt ein Bremsrad vom Radius $r = 25$ cm.

Mit welcher Kraft Q müssen die Bremsbacken an das Rad drücken, damit dieses in Ruhe bleibt? Der Reibungskoeffizient der Ruhe zwischen den Rädern und den Backen beträgt $\mu = 0{,}25$.

Lösung: $Q = 800$ kg.



172. Eine Straßenbahntür gleitet auf dem Boden in einer Fuge. Der Reibungskoeffizient μ ist nicht höher als 0,5.

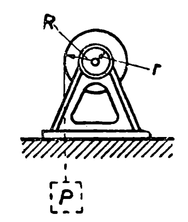
Es ist der höchste Punkt h zu bestimmen, an dem man den Türgriff anbringen kann, damit beim Öffnen die Tür nicht kippt. Türbreite $l = 0{,}8$ m, der Schwerpunkt der Tür liegt auf ihrer senkrechten Symmetrieachse.

Lösung: $h = \dfrac{l}{2\mu} = 0{,}8$ m.

173. Eine Seiltrommel vom Gewicht Q und dem Radius R trägt über ein Seil die Last P. Der Radius der Wellenzapfen beträgt $r = \dfrac{R}{2}$, der Reibungskoeffizient der Lager ist 0,05.

Bei welchem Verhältnis $\dfrac{Q}{P}$ sinkt die Last P mit gleichmäßiger Geschwindigkeit?

Lösung: $\dfrac{Q}{P} = 39$.



174. Ein Konsol, welches durch die vertikale Kraft $P = 600$ kg belastet wird, ist mit zwei Bolzen an der Wand befestigt.

Es ist die Schraubenkraft, die notwendig ist, um das Konsol an der Wand zu befestigen, zu bestimmen. Vorsichtshalber soll die Berechnung unter der Annahme durchgeführt werden, daß nur der obere Bolzen angezogen wird. Das Konsol soll durch Reibungsschluß gehalten werden. Der Reibungskoeffizient zwischen Wand und Konsol beträgt $\mu = 0{,}3$; $\mu < \dfrac{b}{a}$.

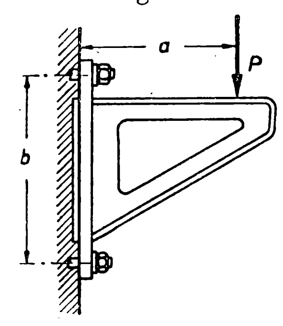
Anweisung: Unter Schraubenkraft wird die Kraft verstanden, die längs der Bolzenachse wirkt. Sie setzt sich zusammen aus zwei Teilen. Der erste dient dazu, das Konsol nicht um den unteren Bolzen kippen zu lassen, der zweite drückt das Konsol so an die Wand, daß der gewünschte Reibungsschluß entsteht.

Lösung: 2000 kg.

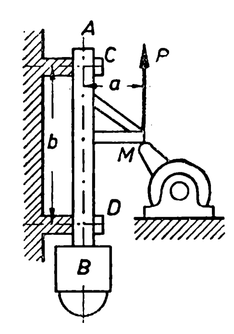
175. Ein Rammbär AB wird von dem Nocken M, der auf eine Welle aufgesetzt ist, nach oben gezogen. Der Bär wiegt 180 kg. Der Abstand zwischen den Führungen C und D beträgt $b = 1{,}5$ m. Der Abstand des Nockenberührungspunktes von der Bärachse $a = 0{,}15$ m.

Es ist die Kraft P zu bestimmen, die den Bär hebt. Dabei soll die Reibungskraft zwischen den Führungen C und D und dem Bär beachtet werden. Reibungskoeffizient $\mu = 0{,}15$.

Lösung: $P = 186$ kg.

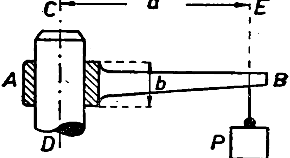


Aufgabe 174



Aufgabe 175

176. Ein waagerechter Ausleger sitzt mit einer Buchse A lose auf einem senkrechten runden Ständer CD. Die Länge der Buchse betägt $b = 2$ cm. Im Abstand a von der Ständerachse trägt der Ausleger eine Last P. Es ist unter Vernachlässigung des Auslegergewichtes der Abstand a so zu bestimmen, daß das System in Ruhe bleibt. Der Reibungskoeffizient zwischen Ausleger und Ständer beträgt 0,1.



Lösung: $a \geqq 10$ cm.

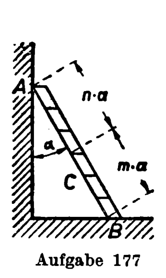
177. An einer senkrechten Wand lehnt eine Leiter AB, die mit ihrem unteren Ende auf dem waagerechten Boden ruht. Der Reibungskoeffizient zwischen Leiter und Wand ist μ_1, zwischen Leiter und Boden μ_2. Die Leiter wiegt mit dem darauf befindlichen Mann p. Das Gewicht greift im Punkt C an, der die Leiterlänge in zwei Teile im Verhältnis $m : n$ teilt.

Es ist der größte Winkel α, den die Leiter mit der Wand in der Gleichgewichtslage bilden kann, zu bestimmen. Weiterhin sollen der Normaldruck der Wand N_A und des Bodens N_B für diesen Wert α ermittelt werden.

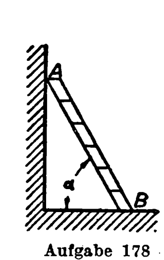
Lösung: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{(m+n)\,\mu_2}{m - n\,\mu_1\,\mu_2}$; $N_A = \frac{p \cdot \mu_2}{1 + \mu_1\,\mu_2}$; $N_B = \frac{p}{1 + \mu_1\,\mu_2}$.

178. Eine Leiter AB vom Gewicht P stützt sich an einer glatten Wand ab und ruht auf einem waagerechten rauhen Fußboden. Die Reibungskraft im Punkt B beträgt $\mu \cdot N$, wobei μ der Ruhereibungskoeffizient und N der Normaldruck am Boden ist. Unter welchem Winkel α zum Boden muß die Leiter aufgestellt werden, damit ein Mann mit einem Gewicht p hinaufsteigen kann?

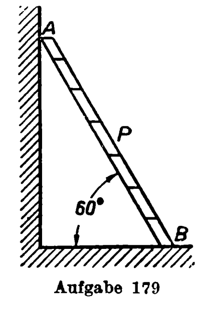
Lösung: $\operatorname{tg} \alpha \geqq \dfrac{P + 2p}{2\mu (P + p)}$.



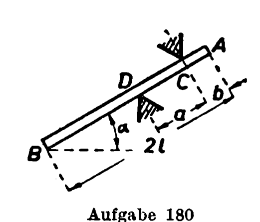
Aufgabe 177



Aufgabe 178



Aufgabe 179



Aufgabe 180

179. Eine Leiter AB steht auf rauhem Fußboden und lehnt an einer ebenfalls rauhen Wand, wobei sie mit dem Fußboden einen Winkel von 60° bildet. Auf der Leiter befindet sich eine Last P. Unter Vernachlässigung des Leitergewichtes ist graphisch der größte Abstand BP, bei dem die Leiter noch in Ruhestellung bleibt, zu bestimmen. Der Reibungswinkel der Wand und des Bodens beträgt 15°.

Lösung: $BP = \dfrac{1}{2} AB$.

180. Eine schwere Stange AB liegt auf zwei Böcken C und D mit einem Abstand $CD = a$, $AC = b$ auf. Der Reibungskoeffizient der Stange an den Böcken beträgt μ, der Neigungswinkel der Stange α.

Wie groß muß die Stangenlänge $2l$ sein, damit die Stange im Gleichgewicht bleibt, die Stangenstärke wird dabei vernachlässigt.

Lösung: $2l \geqq 2b + a + \dfrac{a}{\mu} \cdot \operatorname{tg} \alpha$; $l > a + b \cdot$

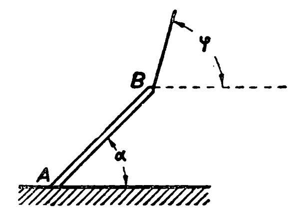
Die erste Bedingung gilt für $\alpha > \varrho$, wobei $\varrho = \operatorname{arctg} \mu$ der Reibungswinkel ist. Für $\alpha < \varrho$ gilt die zweite Bedingung. Sie entsteht, wenn in obiger Gleichung $\alpha = \varrho$ wird.

Bei $l < a + b$ ist ein Gleichgewicht der Stange nicht mehr möglich.

181. Ein Balken ruht im Punkt A auf rauhen waagerechtem Boden und wird im Punkt B von einem Seil gehalten. Der Reibungskoeffizient zwischen Balken und Boden sei μ. Der Winkel α, den der Balken mit dem Boden bildet, beträgt $\alpha = 45°$.

Bei welchem Winkel φ des Seiles rutscht der Balken?

Lösung: $\operatorname{tg} \varphi = 2 + \dfrac{1}{\mu}$.

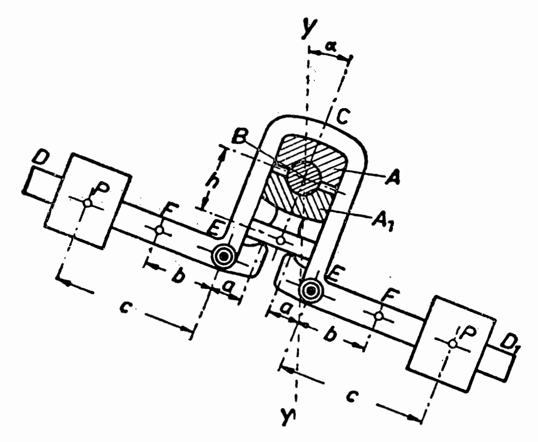


182. Eine Stange gleitet mit ihren Enden auf einem Kreis vom Radius a. Der senkrechte Abstand der Stange vom Kreismittelpunkt OC beträgt b, der Reibungskoeffizient zwischen der Stange und dem Kreise μ. Das System befindet sich in einer senkrechten Ebene.

Es ist bei Gleichgewicht der Stange der Winkel φ zu ermitteln, der sich zwischen der Geraden OC und dem senkrechten Kreisdurchmesser bildet.

Lösung: $\operatorname{ctg} \varphi \geqq \dfrac{b^2 (1 + \mu^2)}{a^2 \mu} - \mu.$

183. Um den Lagerreibungskoeffizienten zu ermitteln, wird das abgebildete Gerät benutzt. Es besteht aus zwei Lagerschalen AA_1, in denen der Zapfen B läuft. Die beiden Lagerhälften werden über eine Spannschelle C durch zwei Hebel D und D_1 zusammengedrückt. Das Gesamtgewicht des Gerätes, d. h. des Lagers, der Spannschelle, der Hebel und der Last, beträgt $Q = 40$ kg. Der Schwerpunkt liegt unterhalb der Zapfenachse im Abstand $h = 120$ mm. Das Gewicht jedes einzelnen Hebels beträgt $p = 7$ kg. Die beiden Lasten P sind je 8 kg schwer, das Lagerunterteil wiegt $q = 6$ kg. Weiterhin sind folgende Abstände gegeben:



$a = 30$ mm
$b = 510$ mm (Schwerpunktsabstand des Hebels).
$c = 900$ mm

Beim Drehen des Zapfens weicht die Geräteachse von der Vertikalen yy um einen Winkel $\alpha = 5°$ aus. Es ist der Reibungskoeffizient μ zwischen Zapfen und Lager zu bestimmen, wenn der Zapfendurchmesser $d = 100$ mm beträgt.

Lösung: $\mu = 0{,}0057$. Der Reibungskoeffizient wird aus der Gleichung ermittelt:

$$\left\{ \left(2\,\frac{pb + Pc}{a} - q\right) + \left[2\,\frac{pb + Pc}{a} + (Q - q)\right] \right\} \cdot \mu\,\frac{d}{2} = Q\,h \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

184. Ein Walzwerk hat zwei Walzen vom Durchmesser $d = 50$ cm, die sich in entgegengesetzter Richtung drehen, wie es auf der Zeichnung durch den Pfeil angegeben ist. Der Walzenabstand beträgt $a = 0{,}5$ cm.

Wie stark darf das zu walzende Blech b sein, wenn der Reibungskoeffizient zwischen glühendem Stahl und gußeisernen Walzen $\mu = 0{,}1$ ist?

Beim Walzen ist es notwendig, daß das Blech von den drehenden Walzen erfaßt wird, d. h., daß die horizontale Komponente der Resultierenden aus Normaldruck und Reibungskraft in A und B nach rechts gerichtet ist.

Lösung: $b \leqq 0{,}75$ cm.

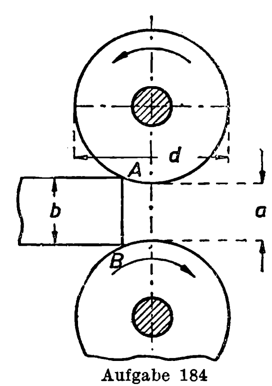
185. Eine Scheibe vom Radius R ist mit zwei Zapfen vom Radius r versehen, die auf zwei mit dem Radius R_0 gekrümmten Flächen AB aufliegen. Über die Scheibe läuft ein Seil, an dessen Enden die Lasten P und P_1 hängen, wobei $P > P_1$.

Es ist der geringste Wert der Last P_1 zu ermitteln, bei dem die Scheibe in Gleichgewichtsstellung bleibt, wobei angenommen werden soll, daß der Reibungskoeffizient der Zapfen auf den Zylinderflächen AB μ beträgt und das Gewicht von Scheibe und Zapfen Q ist.

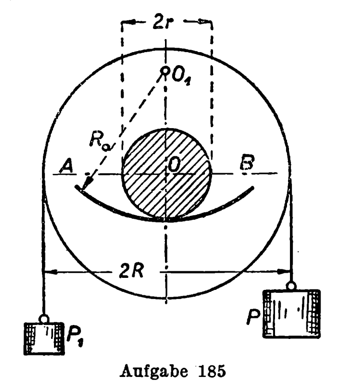
In der abgebildeten Lage befindet sich das System nicht im Gleichgewicht.

Lösung: Im Gleichgewicht bildet die Zylinderachse AB mit der Vertikalen einen Winkel, der gleich dem Reibungswinkel ist.

$$P_1 = \frac{P\,(R\sqrt{1+\mu^2} - \mu r) - \mu r Q}{R\sqrt{1+\mu^2} + \mu r}.$$



Aufgabe 184



Aufgabe 185

186. Zwischen zwei Platten AO und BO, die mit einem festen Gelenk O verbunden sind, befindet sich ein Zylinder, dessen Mittelpunkt senkrecht über dem Gelenk steht. Die Platten werden von zwei gleichen horizontalen und entgegengesetzt gerichteten Kräften P, die in den Punkten A und B angreifen, an den Zylinder gedrückt. Das Gewicht des Zylinders beträgt Q, sein Radius r. Der Reibungskoeffizient zwischen dem Zylinder und den Platten beträgt μ, der Winkel $AOB = 2\,\alpha$, der Abstand $AB = a$.

Welcher Bedingung hat die Kraft P zu genügen, um den Zylinder im Gleichgewicht zu halten?

Lösung: 1) $\operatorname{tg}\alpha > \mu$; $\dfrac{r}{a}\,\dfrac{Q}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \leqq P \leqq \dfrac{r}{a}\,\dfrac{Q}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}$;

2) $\operatorname{tg}\alpha \leqq \mu$; $P \geqq \dfrac{r}{a}\,\dfrac{Q}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}$.

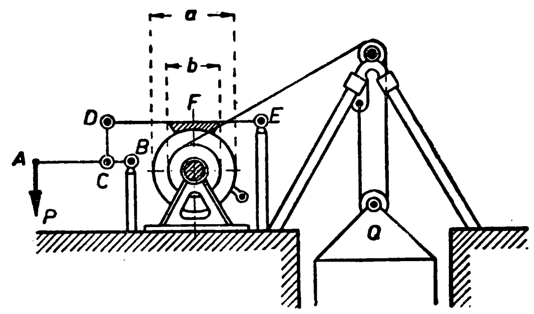
187. Für eine Schachtanlage wird eine Lastwinde mit Bremse benutzt, wie sie auf der Zeichnung angegeben ist. Auf der Trommel, um die die Zugkette gewickelt ist, sitzt ein Holzrad, an welches über ein Hebelsystem die Bremsbacke gedrückt wird.

Raddurchmesser $a = 50$ cm, Trommeldurchmesser $b = 20$ cm, $ED = 120$ cm, $FE = 60$ cm, $AB = 1$ m, $BC = 10$ cm.

Wie groß muß die Kraft P sein, um die Last $Q = 800$ kg, die an einer losen Rolle hängt, im Gleichgewicht zu halten?

Der Reibungskoeffizient für Holz auf Stahl beträgt $\mu = 0{,}4$.

Die Bremsbackengewichte sind zu vernachlässigen.

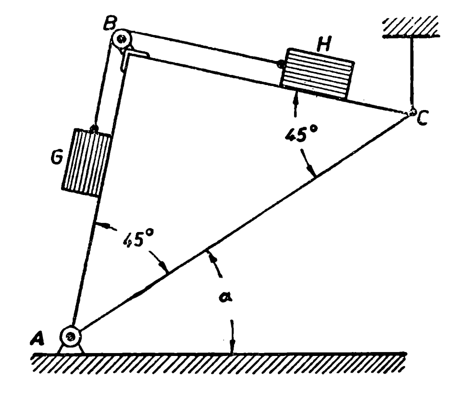


Lösung: $P = 20$ kg.

188. Auf den Seiten AB und BC des Prismas ABC liegen zwei gleiche Körper G und H vom Gewicht P, die durch ein Seil, das im Punkt B über eine Rolle läuft, verbunden sind. Der Reibungskoeffizient zwischen den Körpern und dem Prisma ist μ. Die Winkel betragen $BAC = BCA = 45°$.

Es ist unter Vernachlässigung der Rollenreibung die Größe des Winkels α, den die Seite AC mit der Waagerechten bildet, zu bestimmen, bei dem die Last G abzusinken beginnt.

Lösung: tg $\alpha = \mu$.



189. Wie tief ist ein Pfeiler einer Eisenbahnbrücke, die über einen Fluß führt, in den Flußgrund einzulassen, wenn man annimmt, daß das Stützengewicht und die anfallende Last durch den Erddruck auf den Boden der Stützen und durch die seitliche Reibung aufgenommen wird? Der Flußgrund besteht aus feinkörnigem mit Wasser durchtränktem Sand und kann als flüssiges Medium angesehen werden. Die Belastung jeder Stütze beträgt 150 t, das Gewicht der Stütze pro 1 m Höhe 8 t. Die Stützenhöhe gegenüber dem Flußgrund beträgt 9 m, die Höhe des Wasserspiegels über dem Flußgrund 6 m. Die Grundfläche der

Stütze ist 3,5 m², die seitliche Stützenfläche pro 1 m Höhe 7 m². Das Gewicht von 1 m³ mit Wasser durchtränktem Sand beträgt 1,8 t, 1 m³ Wasser wiegt bekanntlich 1 t. Der Reibungskoeffizient zwischen der Stahlarmierung, in der sich die aus Stein gebaute Stütze befindet, und dem Sand beträgt 0,18. Für die Reibungsberechnung ist anzunehmen, daß der mittlere Seitendruck pro 1 m² Stützenfläche $6 + 0{,}9\,h$ (t) beträgt.

Lösung: $h = 11$ m.

190. Es ist der Neigungswinkel α einer Ebene zu ermitteln, bei dem eine Rolle vom Radius $r = 50$ mm mit gleichmäßiger Geschwindigkeit abrollt. Das Material von Rolle und Ebene ist Stahl. Der Hebelarm der rollenden Reibung beträgt $f = 0{,}05$ mm.

Da der Winkel sehr klein ist, kann mit $\alpha = \operatorname{tg} \alpha$ gerechnet werden.

Lösung: $\alpha = 3'\,26''$.

191. Welche Kraft P ist zur gleichmäßigen Bewegung einer 300 kg schweren Zylinderrolle vom Durchmesser 60 cm erforderlich? Der Hebelarm der rollenden Reibung beträgt $f = 0{,}5$ cm, der Winkel zwischen Kraft P und Ebene $\alpha = 30°$.

Lösung: $P = 5{,}76$ kg.

192. Auf einer Ebene liegt eine Kugel vom Radius R und dem Gewicht Q. Der Gleitreibungskoeffizient beträgt μ, der Hebelarm der rollenden Reibung f.

Unter welchen Voraussetzungen wird die waagerechte Kraft P, die im Kugelzentrum angreift, die Kugel in eine gleichmäßige Bewegung versetzen?

Lösung: $\frac{f}{R} < \mu$; $P = Q \cdot \frac{f}{R}$.

5. Graphische Statik

Aus den Aufgabenlösungen der graphischen Statik sind die mit (+) bezeichneten Zahlen als Zugkräfte, die mit (—) versehenen Zahlen als Druckkräfte zu entnehmen.

193. Es sind die Auflagerreaktionen eines Trägers von 8 m Stützweite, die von drei Lasten hervorgerufen werden, graphisch zu bestimmen und analytisch zu überprüfen. Die Lasten wiegen 2 t, 3 t und 1 t und sind nach den Angaben der Zeichnung verteilt. Das Balkengewicht ist zu vernachlässigen.

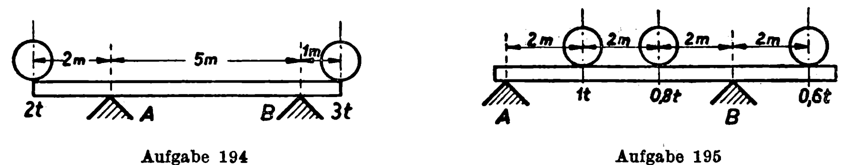
Lösung: $R_A = 3{,}25$ t; $R_B = 2{,}75$ t.

194. Es sind die Auflagerreaktionen eines 8 m langen Konsolträgers mit einer Stützweite von 5 m graphisch zu bestimmen und analytisch zu überprüfen. An den Enden des Trägers hängen Lasten von 2 t und 3 t Gewicht. Das Balkengewicht ist zu vernachlässigen.

Lösung: $R_A = 2{,}2$ t; $R_B = 2{,}8$ t.

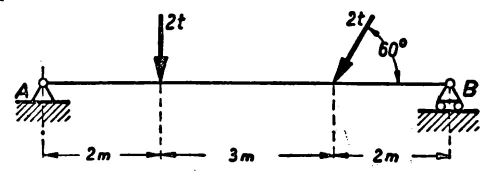
195. Es sind die Auflagerreaktionen eines 8 m langen Konsolträgers mit einer Stützweite von 6 m graphisch zu bestimmen und analytisch zu überprüfen. Die Lagen der Lasten von 1 t, 0,8 t und 0,6 t Gewicht sind aus der Zeichnung ersichtlich. Das Balkengewicht ist zu vernachlässigen.

Lösung: $R_A = 0{,}73$ t; $R_B = 1{,}67$ t.



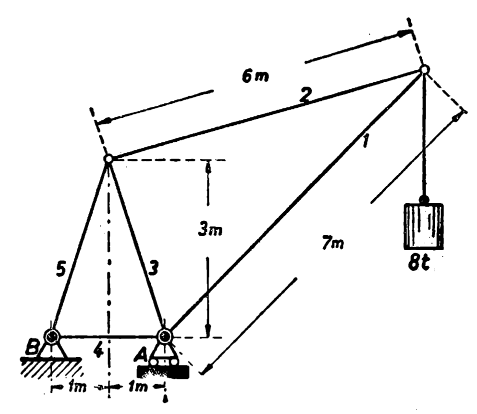
Aufgabe 194 Aufgabe 195

196. Der gewichtslose Träger AB wird, wie in der Zeichnung angegeben, durch zwei Kräfte belastet. Es sind die Auflagerreaktionen graphisch zu bestimmen und analytisch zu überprüfen.



Lösung: $R_A = 2{,}17$ t; $R_B = 1{,}81$ t.

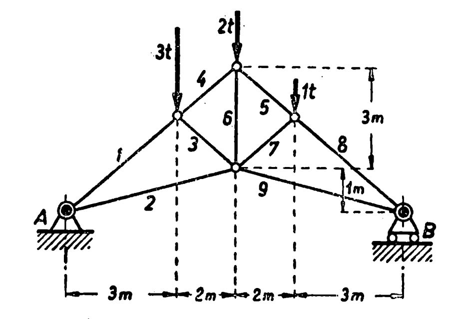
197. Es sind die Auflagerreaktionen und die Stabkräfte für den gezeichneten Stabverband bei einer Belastung von 8 t zu bestimmen. Das Stabgewicht ist zu vernachlässigen.



Lösung: $R_A = 26$ t; $R_B = 18$ t.

Stab-Nr.	1	2	3	4	5
Stabkräfte in t	− 16,4	+ 11,5	− 14,3	− 6	+ 19

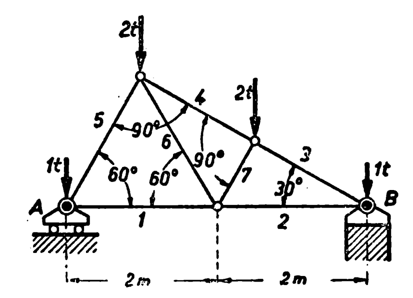
198. Es sind die Auflagerreaktionen und die Stabkräfte für den gezeichneten Dachstuhl graphisch zu bestimmen und analytisch zu überprüfen.



Lösung: $R_A = 3{,}4$ t; $R_B = 2{,}6$ t.

Stab-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Stabkräfte in t	— 7,3	+ 5,8	— 2,44	— 4,7	— 4,7	+ 3,9	—0,81	— 5,5	+ 4,4

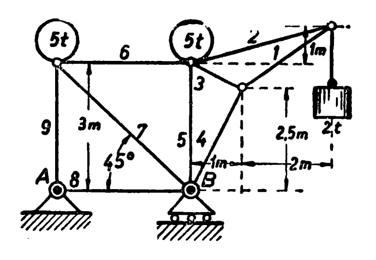
199. Es sind die Auflagerreaktionen und die Stabkräfte für den gezeichneten Stabverband zu bestimmen.



Lösung: $R_A = 3{,}25$ t; $R_B = 2{,}75$ t.

Stab-Nr.	1	2	3	4	5	6	7
Stabkräfte in t	+ 1,3	+ 3,03	— 3,5	— 2,5	— 2,6	+ 1,73	— 1,73

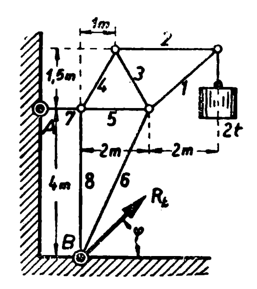
200. Es sind die Auflagerreaktionen und die Stabkräfte für den gezeichneten Kran graphisch zu bestimmen und analytisch zu überprüfen.



Lösung: $R_A = 3$ t; $R_B = 9$ t.

Stab-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Stabkräfte in t	—6,0	+ 5,1	— 3,13	— 5,4	— 2,0	+ 2,0	—2,83	0	— 3,0

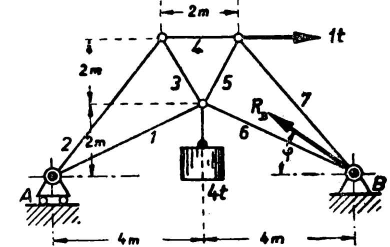
201. Es sind die Auflagerreaktionen und die Stabkräfte für den gezeichneten Kran bei einer Belastung von 2 t graphisch zu bestimmen und analytisch zu überprüfen.



Lösung: $R_A = 2\,\mathrm{t}$; $R_B = 2{,}83\,\mathrm{t}$; $\varphi = 45°$.

Stab-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
Stabkräfte in t	— 3,33	+ 2,67	— 2,4	+ 2,4	+ 0,67	— 4,47	+ 2	+ 2

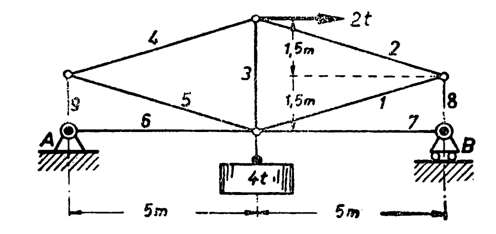
202. Es sind die Auflagerreaktionen und die Stabkräfte für den gezeichneten Stabverband graphisch zu bestimmen und analytisch zu überprüfen.



Lösung: $R_A = 1{,}5\,\mathrm{t}$; $R_B = 2{,}7\,\mathrm{t}$; $\varphi = 68°$.

Stab-Nr.	1	2	3	4	5	6	7
Stabkräfte in t	+ 2	— 3	+ 2,7	— 3	+ 3,6	+ 1,57	— 4

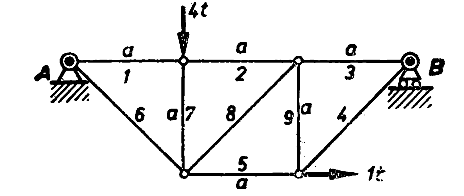
203. Es sind die Auflagerreaktionen und die Stabkräfte für den gezeichneten Stabverband graphisch zu bestimmen und analytisch zu überprüfen.



Lösung: $X_A = -2\,\mathrm{t}$; $Y_A = 1{,}4\,\mathrm{t}$; $Y_B = 2{,}6\,\mathrm{t}$.

Stab-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Stabkräfte in t	+ 4,5	— 4,5	+ 2	—2,44	+ 2,44	+ 2	0	— 2,6	— 1,4

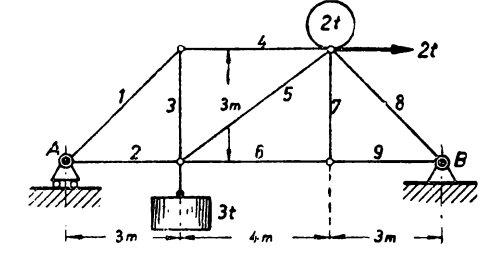
204. Es sind die Auflagerreaktionen und die Stabkräfte für den gezeichneten Stabverband graphisch zu bestimmen und analytisch zu überprüfen.



Lösung: $X_A = -1\,\text{t}$; $Y_A = 3\,\text{t}$; $Y_B = 1\,\text{t}$.

Stab-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Stabkräfte in t	—2	—2	—1	+1,41	+2	+4,24	—4	+1,41	—1

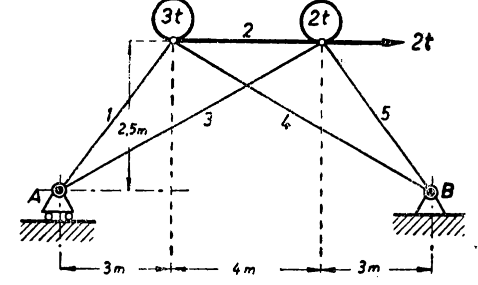
205. Es sind die Auflagerreaktionen und die Stabkräfte für den gezeichneten Stabverband graphisch zu bestimmen und analytisch zu überprüfen.



Lösung: $Y_A = 2{,}1\,\text{t}$; $X_B = -2\,\text{t}$; $Y_B = 2{,}9\,\text{t}$.

Stab-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Stabkräfte in t	—2,97	+2,1	+2,1	—2,1	+1,5	0,9	0	—4,1	+0,9

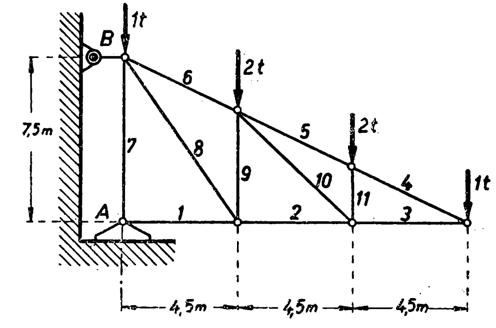
206. Es sind die Auflagerreaktionen und die Stabkräfte für den gezeichneten Stabverband graphisch zu bestimmen und analytisch zu überprüfen. Die Stäbe Nr. 3 und 4 sind im Kreuzungspunkt nicht verbunden.



Lösung: $Y_A = 2{,}2\,\text{t}$; $X_B = -2\,\text{t}$; $Y_B = 2{,}8\,\text{t}$.

Stab-Nr.	1	2	3	4	5
Stabkräfte in t	—6	—7	+4,9	+2,53	—5,7

207. Es sind die Auflagerreaktionen und die Stabkräfte für die gezeichnete hängende Überdachung zu bestimmen.

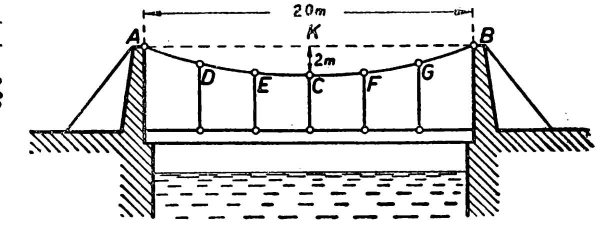


Lösung: $X_A = 5{,}4\,\text{t}$; $Y_A = 6\,\text{t}$; $X_B = -5{,}4\,\text{t}$.

Stab-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Stabkräfte in t	—5,4	—3,6	—1,8	+2,06	+2,06	+4,1	—6	+3,5	—3	+2,7	—2

208. Eine 20 m lange Kettenbrücke, die in der Mitte um $CK = 2$ m durchhängt, wird von zwei Ketten getragen. Die Brückenbelastung beträgt 1,6 t pro laufenden Meter.

Es ist die Kettenkraft im mittleren Punkt C zu bestimmen. Dabei ist anzunehmen, daß die Kettenlinie $ADECFGB$ eine Parabel bildet.

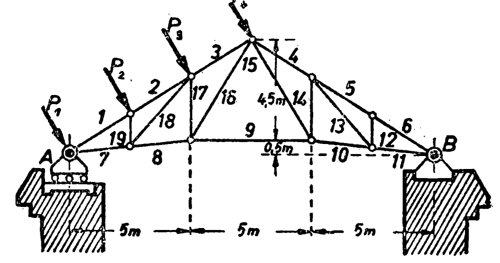


Lösung: 24 t.

209. In den Knoten eines Dachstuhls (vgl. Abbildung) entstehen durch den Winddruck Kräfte, die senkrecht auf das Dach wirken:

$P_1 = P_4 = 312{,}5$ kg;
$P_2 = P_3 = 625$ kg.

Es sind die durch den Winddruck entstehenden Auflagerreaktionen und Stabkräfte zu bestimmen.



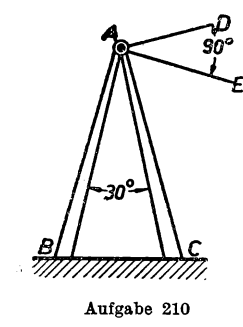
Lösung: $Y_A = 997$ kg; $X_B = 1040$ kg; $Y_B = 563$ kg;
$S_1 = -1525$ kg; $S_2 = -1940$ kg; $S_3 = -1560$ kg;
$S_4 = S_5 = S_6 = -970$ kg; $S_7 = +1100$ kg;
$S_8 = 440$ kg; $S_9 = -215$ kg; $S_{10} = S_{11} = -230$ kg;
$S_{12} = S_{13} = S_{14} = 0$; $S_{15} = -26$ kg; $S_{16} = +1340$ kg;
$S_{17} = -1130$ kg; $S_{18} = +1050$ kg; $S_{19} = -750$ kg.

II. Räumliches Kräftesystem

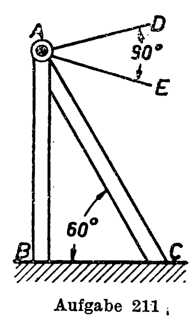
6. Kräfte, deren Wirkungslinien sich in einem Punkte schneiden

210. Ein Mast besteht aus zwei gleich langen Balken AB und AC, die miteinander an der Spitze durch ein Gelenk verbunden sind. Der Winkel BAC beträgt 30°. An dem Mast sind zwei waagerechte Drähte AD und AE befestigt, die miteinander einen rechten Winkel bilden. Jede einzelne Seilkraft beträgt 100 kg. Es sind die Kräfte in den Balken zu bestimmen. Die Fläche BAC halbiert den Winkel DAE. Das Balkengewicht ist zu vernachlässigen.

Lösung: $S_B = -S_C = 273$ kg.



Aufgabe 210

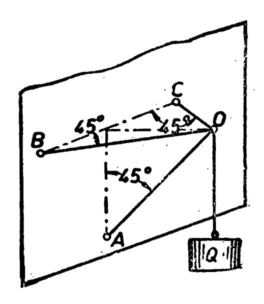


Aufgabe 211

211. Zwei waagerechte Drähte einer Telegraphenleitung werden vom Telegraphenmast AB gehalten. Die beiden Drähte bilden einen Winkel $DAE = 90°$, die in ihnen wirkenden Kräfte betragen für $AD = 12$ kg und für $AE = 16$ kg. Im Punkt A greift eine am Mast gelenkig befestigte Stütze AC an. Es ist der Winkel α zwischen den beiden Flächen BAC und BAE, bei dem der Mast keine seitliche Biegung erhält, zu bestimmen. Weiterhin soll die Stützenkraft ermittelt werden, wenn die Stütze unter einem Winkel von 60° angesetzt ist. Das Gewicht von Mast und Stütze ist zu vernachlässigen.

Lösung: $\alpha = \arcsin \frac{3}{5} = 36°\,50'$; $S = -40$ kg.

212. Eine Last $Q = 100$ kg wird mit Hilfe des Balkens AO getragen, der im Punkt A gelenkig befestigt ist und von zwei Ketten BO und CO gehalten wird. Die beiden Ketten haben gleiche Länge und bilden, wie der Balken, mit der Wand einen Winkel von 45°. Es sind die Kraft S im Balken und die Kettenkraft T zu ermitteln.



Lösung: $S = -141$ kg; $T = 71$ kg.

213. Es sind die Kräfte S_1 und S_2 in den Stangen AB und AC und die Kraft T im Kranseil AD zu bestimmen. Die Winkel betragen:

$$\sphericalangle\, CBA = \sphericalangle\, BCA = 60°;\ \sphericalangle\, EAD = 30°.$$

Die Last P wiegt 300 kg, die Fläche ABC liegt horizontal, in den Punkten A, B und C haben die Stangen Gelenkbefestigung.

Lösung: $T = 600$ kg; $S_1 = S_2 = -300$ kg.

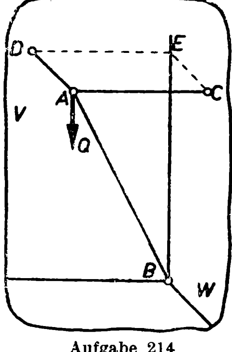
214. Es sind die Kräfte in der Stange AB und in den Ketten AC und AD für eine Last $Q = 42$ kg zu bestimmen. Gegeben ist:

$$AB = 145 \text{ cm},\ AC = 80 \text{ cm},\ AD = 60 \text{ cm}.$$

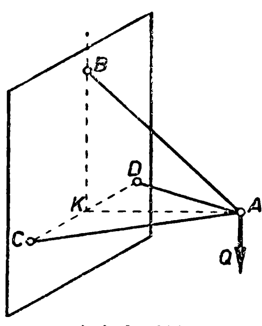
Die Rechtecksfläche $CADE$ liegt horizontal, die Flächen V und W vertikal. Im Punkt B befindet sich ein Gelenk.

Lösung: $T_C = 32$ kg;
$T_D = 24$ kg;
$T_B = -58$ kg.

Aufgabe 213



Aufgabe 214



Aufgabe 215

215. Es sind die Kräfte im Seil AB und in den Stangen AC und AD für eine Last $Q = 180$ kg zu bestimmen. Gegeben ist:

$$AB = 170 \text{ cm},\ AC = AD = 100 \text{ cm},\ CD = 120 \text{ cm},\ CK = KD.$$

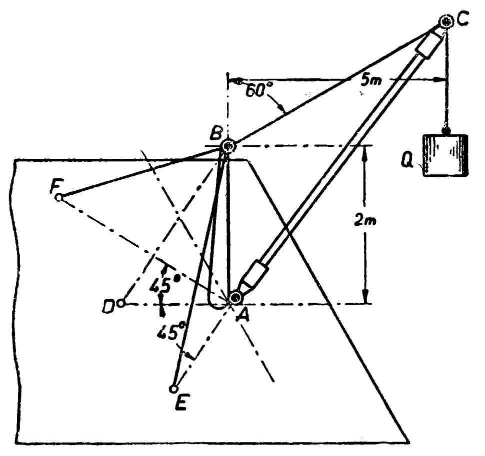
Die Dreiecksfläche CDA liegt horizontal, in den Punkten A, C und D befinden sich Gelenkbefestigungen.

Lösung: $S_{AB} = 204$ kg; $T_{AC} = T_{AD} = -60$ kg.

216. Ein transportabler Kran trägt eine Last $Q = 2$ t (vergl. Zeichnung); $AB = AE = AF = 2$ m. Der Winkel EAF beträgt 90°, die Kranfläche ABC teilt diesen Winkel in zwei gleiche Teile.

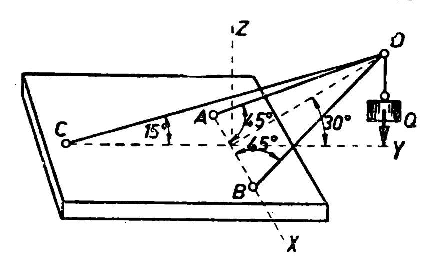
Es sind die Kraft P_1, die die senkrechte Stütze AB auf Druck beansprucht, und die Kräfte P_2, P_3 und P_4, von denen die Seile BC, BE und BF gedehnt werden, zu bestimmen. Das Gewicht der Kranteile ist zu vernachlässigen.

Lösung: $P_1 = 4{,}2$ t; $P_2 = 5{,}8$ t;
$P_3 = P_4 = 5$ t.



217. Eine Last $Q = 1$ t hängt, wie aus der Zeichnung ersichtlich, am Punkt D. In den Punkten A, B und C sind die Stangen gelenkig angeschlossen. Es sind die Auflagerreaktionen A, B und C zu bestimmen.

Lösung: $R_A = R_B = 2{,}64$ t; $R_C = 3{,}35$ t.



218. Ein Luftballon, der von zwei Seilen gehalten wird, steht unter Windeinfluß. Die Seile bilden miteinander einen rechten Winkel; die Fläche, in der sie sich befinden, schließt mit der Ebene einen Winkel von 60° ein. Die waagerecht liegende Windrichtung befindet sich in der gleichen Ebene, in der obiger 60°-Winkel gemessen wurde. Der Ballon mit Gasinhalt wiegt 250 kg, er hat ein Volumen von 215,4 m³. 1 m³ Luft wiegt 1,3 kg. Es sind die Seilkräfte T_1 und T_2 und die Resultierende P der Winddruckkräfte auf den Ballon zu bestimmen.

Lösung: $T_1 = T_2 = 24{,}5$ kg; $P = 17{,}3$ kg.

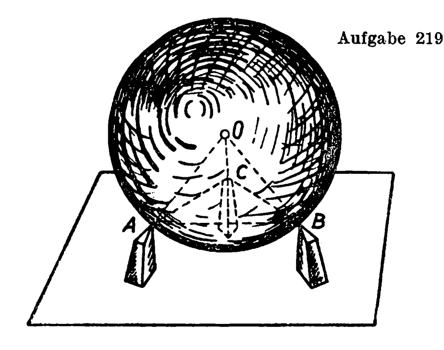
219. Ein kugelförmiger Gasbehälter vom Radius $R = 10$ m wiegt gefüllt $Q = 200$ t. Der Behälter ruht auf drei Stützen A, B und C, die in einer horizontalen Ebene liegen. Die Stützen bilden ein gleichschenkliges Dreieck von der Schenkellänge $a = 10$ m. In A befindet sich ein Kugelgelenk, in B und C Kolbenlager. Letztere können nur Kräfte in Richtung der Radien OB und OC übertragen. Es sind die Auflagerreaktionen in A, B und C zu bestimmen, wenn neben dem Gewicht noch ein Winddruck von $p = 120$ kg/m² wirkt. Die Wirkungslinie der Windkraft liegt in einer Ebene, die AO enthält und BC halbiert.

Lösung: $R_A = 125$ t; $R_B = R_C = 60$ t.

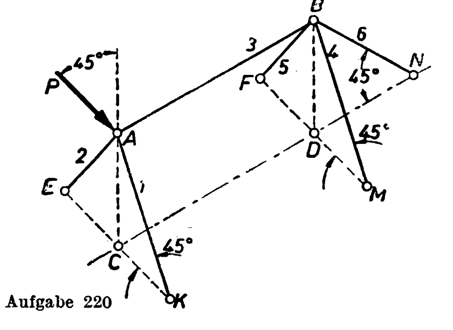
220. Auf der Zeichnung ist ein räumlicher Träger dargestellt, der aus den sechs Stäben 1, 2, 3, 4, 5, 6 besteht. Die Kraft P wirkt auf den Knoten A in der Ebene des Rechteckes $ABCD$, wobei ihre Wirkungslinie mit der Vertikalen CA einen Winkel von 45° bildet. Die Dreiecke EAK und FBM sind gleich; die Winkel der gleichschenkligen Dreiecke EAK, FBM und NDB in den Spitzen A, B und D betragen 90°.

Für $P = 1$ t sind die Stabkräfte zu bestimmen.

Lösung: $S_1 = -0{,}5$ t; $S_4 = +0{,}5$ t;
$S_2 = -0{,}5$ t; $S_5 = +0{,}5$ t;
$S_3 = -0{,}707$ t; $S_6 = -1$ t.



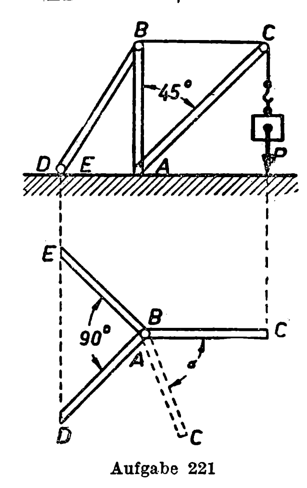
Aufgabe 219



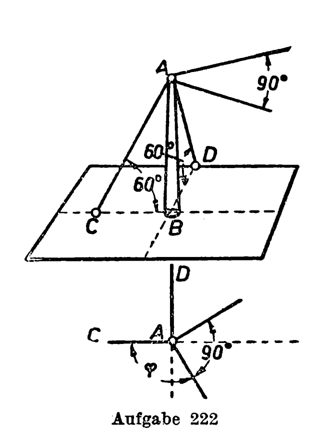
Aufgabe 220

221. Es sind die Kräfte in der senkrechten Säule und in den beiden Stützen des gezeichneten Kranes in Abhängigkeit vom Winkel α zu bestimmen. Gegeben ist: $AB = BC = AD = AE$. In den Punkten A, B, D und E sind Gelenkbefestigungen angebracht.

Lösung: $S_{BD} = P(\cos\alpha - \sin\alpha)$; $S_{BE} = P(\cos\alpha + \sin\alpha)$;
$S_{AB} = -P\sqrt{2}\cos\alpha$.



Aufgabe 221



Aufgabe 222

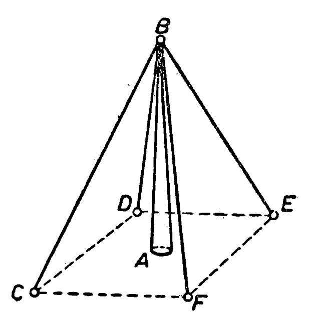
222. Ein Mast AB, der eine Freileitung trägt, wird von zwei Halteseilen AC und AD gehalten. Der Winkel CBD beträgt 90°. Es sind die Kräfte im Mast und in den Halteseilen in Abhängigkeit vom Winkel φ, der von einem der beiden Kabelzweige mit der Fläche CBA gebildet wird, zu bestimmen. Die Kabelzweige liegen waagerecht, haben gleiche Seilkraft T und bilden miteinander einen rechten Winkel.

Lösung: $S_{AC} = 2\,T(\sin\varphi - \cos\varphi)$; $S_{AD} = 2\,T(\sin\varphi + \cos\varphi)$;
$S_{AB} = -2\sqrt{3}\,T\sin\varphi$.

Unter folgender Bedingung sind die beiden Halteseile gespannt: $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$.
Bei $\varphi < \frac{\pi}{4}$ oder $\varphi > \frac{3\pi}{4}$ muß ein Halteseil durch eine Stange ersetzt werden.

223. Ein Mast AB wird von vier symmetrisch verteilten Halteseilen in senkrechter Lage gehalten. Der von zwei benachbarten Seilen gebildete Winkel beträgt 60°.

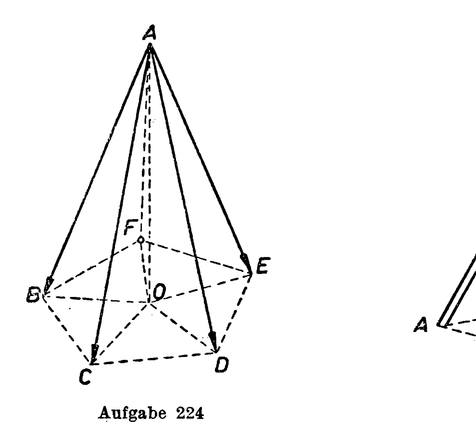
Es ist der Mastdruck auf die Erde zu bestimmen, wenn die Seilkraft jedes Halteseiles 100 kg beträgt und der Mast ein Gewicht von 200 kg aufweist.



Lösung: 483 kg.

224. Vier Kanten AB, AC, AD und AE einer regelmäßigen fünfeckigen Pyramide stellen Kräfte dar, die im Maßstab 1 kg = 1 m gezeichnet sind. Es sollen Größe und Richtung der resultierenden Kraft ermittelt werden. Die Richtung ist dabei durch den Abstand x vom Punkte O bis zu dem Punkt, an dem die Resultierende die Grundfläche durchstößt, anzugeben und die Lage dieses Abstandes zu einem der gegebenen Punkte zu bestimmen. Gegeben ist: Pyramidenhöhe $AO = 10$ m, Umkreisradius $OC = 4{,}5$ m.

Lösung: $R = 40{,}25$ kg; $x = 1{,}125$ m;
x liegt auf einem Strahl, der CD halbiert und durch O verläuft.



Aufgabe 224

Aufgabe 225

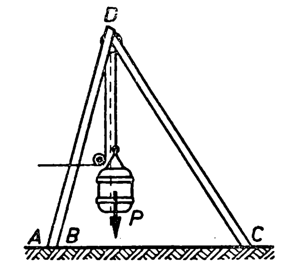
225. An der Spitze des Dreifußes $ABCD$ hängt eine Last E von 10 kg. Die Dreifußstützen haben gleiche Länge und bilden miteinander gleiche Winkel.

Es sind die in jeder Stütze wirkenden Kräfte zu bestimmen. Der Winkel zwischen Stütze und Seil BE beträgt 30°.

Lösung: 3,85 kg.

226. Es sind die Kräfte S in den Stützen AD, BD und CD eines Dreifußes, die mit der Ebene einen Winkel von 60° bilden, zu bestimmen. Das Gewicht der zu hebenden Last beträgt 3 t. Weiterhin ist AB = BC = AC.

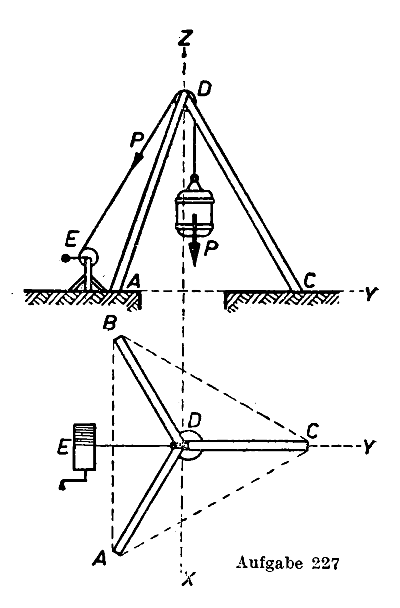
Lösung: $S = 2{,}3$ t.



227. Mit Hilfe des Dreifußes $ABCD$ und der Winde E soll eine Last $P = 3$ t aus dem Schacht gehoben werden. Es sind die Kräfte in den Dreifußstützen beim gleichmäßigen Heben der Last zu bestimmen, wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist und die kleinsten Winkel, die von den Stützen und der Ebene gebildet

werden, 60° betragen. Das Windenseil ED nimmt ebenfalls einen Winkel von 60° zur Ebene ein. Die Stellung von Winde und Dreifuß ist aus der Zeichnung ersichtlich.

Lösung: $S_A = S_B = 3{,}15$ t; $S_C = 0{,}155$ t.



Aufgabe 227

228. Auf einem reibungsfreien Fußboden steht ein dreifüßiges Stativ. Seine Fußenden sind so mit Bindfäden verbunden, daß die Stativfüße und die Fäden ein regelmäßiges Tetraeder bilden. An der Stativspitze hängt eine Last P.

Es sind die Fußbodenreaktionen R und die Fadenkräfte T als Funktion von P zu bestimmen.

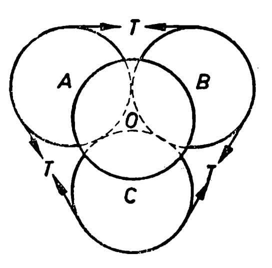
Lösung: $R = \frac{1}{3} P$; $T = \frac{P}{3\sqrt{6}}$.

229. Die gleiche Aufgabe ist für den Fall zu lösen, daß die Stativfüße nicht an den Enden, sondern in ihrer Mitte durch Bindfäden verbunden sind, wobei zu beachten ist, daß jedes in der Fußmitte angreifende Fußgewicht p beträgt.

Lösung: $R = \frac{1}{3} P + p$: $T = \frac{2P + 3p}{18} \sqrt{6}$.

230. Drei gleiche Kugeln A, B und C liegen auf einer glatten Ebene. Die Kugeln berühren sich gegenseitig und werden von einem Bindfaden, der sie in der Äquatorebene umschlingt, zusammengehalten. Eine vierte Kugel vom gleichen Radius und gleicher Beschaffenheit, die 10 kg wiegt, liegt auf den drei Kugeln.

Es ist die Fadenkraft T, die durch den Druck der oberen Kugel verursacht wird, zu bestimmen. Die gegenseitige Reibung der Kugeln und die Flächenreibung derselben ist zu vernachlässigen.



Lösung: $T = 1{,}36$ kg.

231. In den Punkten A, B und C, die auf rechtwinkligen Koordinatenachsen im gleichen Abstand l vom Koordinatenursprung O liegen, sind Fäden $AD = BD = CD = L$ befestigt, die im Punkt D verbunden sind. Punkt D hat die Koordinaten:

$$x = y = z = \frac{1}{3} (l - \sqrt{3L^2 - 2l^2}).$$

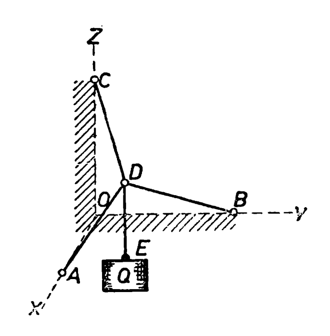
In diesem Punkt hängt die Last Q.

Es sind die Seilkräfte T_A, T_B und T_C zu bestimmen, unter der Annahme, daß

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\, l < L < l.$$

Lösung: $T_A = T_B = \dfrac{l - \sqrt{3L^2 - 2l^2}}{3l\sqrt{3L^2 - 2l^2}}\, LQ;$

$$T_C = \frac{l + 2\sqrt{3L^2 - 2l^2}}{3l\sqrt{3L^2 - 2l^2}}\, LQ.$$



7. Reduktion von Kräftesystemen

232. Die Abbildung zeigt einen Würfel, an dessen Ecken Kräfte angreifen.

In welchem Verhältnis müssen die Kräfte F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 und F_6 zueinander stehen, damit sich der Würfel im Gleichgewicht befindet?

Lösung: $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6$.

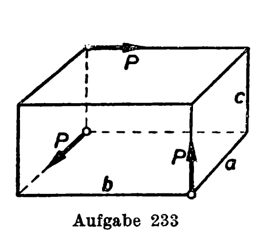
233. Längs dreier sich nicht schneidender und nicht paralleler Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipeds wirken drei gleiche Kräfte P.

Welche Beziehung muß zwischen den Kanten a, b und c bestehen, damit das System eine Resultierende besitzt?

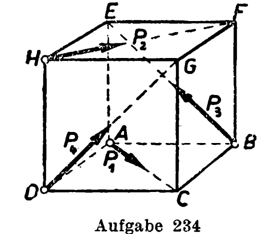
Lösung: $a = b - c$.

234. An vier Ecken A, H, B und D eines Würfels sind vier gleiche Kräfte $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$ angesetzt, wobei P_1 in Richtung AC, P_2 in Richtung HF, P_3 in Richtung BE und P_4 in Richtung DG wirken. Für dieses System soll die Resultierende gefunden werden.

Lösung: Die Resultierende der Größe $2\,P$ liegt in Richtung der Diagonalen DG.



Aufgabe 233



Aufgabe 234

235. An einem Tetraeder $ABCD$ der Kantenlänge a wirken folgende Kräfte: F_1 entlang der Kante AB, F_2 entlang der Kante CD und F_3 im Punkte E, der Kantenmitte von BD. Die Größe der Kräfte F_1 und F_2 ist beliebig, während die Kraftkomponenten von F_3 in Richtung der Achsen x, y und z betragen:

$$F_2 \frac{5\sqrt{3}}{6}; \quad -\frac{F_2}{2}; \quad -F_2 \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Wenn dieses Kräftesystem eine Resultierende besitzt, dann sind die Koordinaten x und z des Schnittpunktes der Wirkungslinie der Resultierenden mit der Ebene Oxz zu bestimmen.

Lösung: Für das System kann eine Resultierende angegeben werden, da die Projektionen des Hauptvektors und des Hauptmomentes auf die Koordinatenachsen folgende Werte haben:

$$V_x = F_2 \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad V_y = F_1 - 0{,}5 F_2; \quad V_z = 0;$$

$$M_x = 0; \quad M_y = 0; \quad M_z = -a \frac{\sqrt{3}}{6} (F_1 + F_2).$$

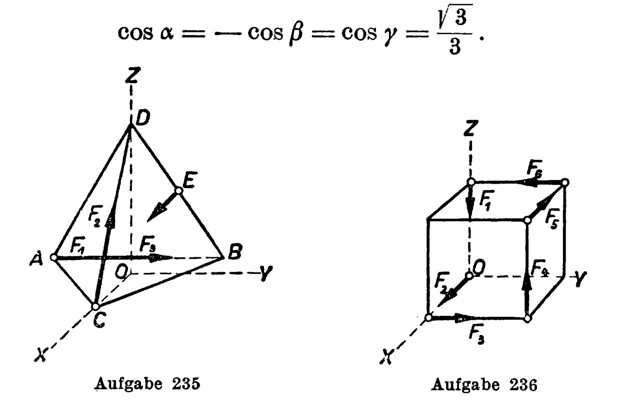
Koordinate des Schnittpunktes auf der Oxz-Ebene:

$$x = \frac{M_z}{V_y} = -\frac{a\sqrt{3}\,(F_1 + F_2)}{6F_1 - 3F_2}; \quad z = 0.$$

236. An den Spitzen eines Würfels, dessen Kanten 5 cm lang sind, wirken sechs gleiche Kräfte von je 2 kg (vgl. Zeichnung). Dieses Kräftesystem ist auf Elementaraktionen zu reduzieren.

Lösung: Das System läßt sich in ein Kräftepaar verwandeln, dessen Moment vom Betrage $20 \cdot \sqrt{3}$ kgcm mit den Koordinatenachsen folgende Winkel bildet:

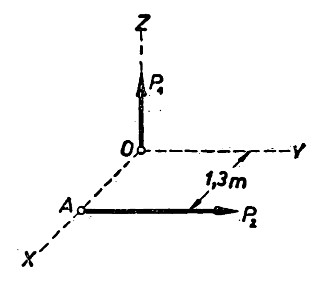
$$\cos\alpha = -\cos\beta = \cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Aufgabe 235 Aufgabe 236

237. Das gezeichnete Kräftesystem enthält die Kraft $P_1 = 8$ kg, die entlang Oz gerichtet ist, und die parallel zu Oy verlaufende Kraft $P_2 = 12$ kg. Der Abstand OA beträgt 1,3 m. Es ist der Wert des Hauptvektors der Kräfte V und der Wert des Hauptmomentes M, bezogen auf einen willkürlichen Punkt, der auf der

Momentenachse liegt, zu bestimmen. Weiterhin sollen die Winkel α, β und γ, die von der Momentenachse mit den Koordinatenachsen gebildet werden, und die Koordinaten x und y ihres Berührungspunktes mit der Ebene Oxy ermittelt werden.



Lösung: $V = 14{,}4$ kg; $M = 8{,}65$ mkg; $\alpha = 90°$;
$\beta = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$; $\gamma = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$; $x = 0{,}9$ m; $y = 0$.

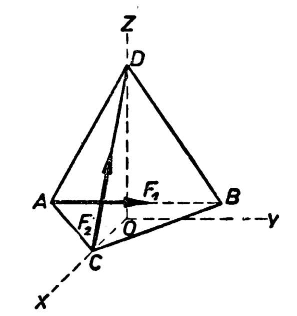
238. Drei Kräfte P_1, P_2 und P_3 liegen in den Koordinatenebenen und sind zu den Koordinatenachsen parallel, wobei ihre Richtung beliebig sein kann. Die Kraftansatzpunkte A, B und C haben die Abstände a, b und c vom Koordinatenursprung. Welchen Bedingungen müssen die Kraftgrößen entsprechen, damit sie zu einer Resultierenden zusammengefaßt werden können? Welchen Bedingungen müssen diese Kraftwerte entsprechen, damit die Momentenachse, die durch den Koordinatenursprung geht, bestehen bleibt?

Lösung: $\frac{a}{P_1} + \frac{b}{P_2} + \frac{c}{P_3} = 0$; $\frac{P_1}{bP_3} = \frac{P_2}{cP_1} = \frac{P_3}{aP_2}$.

In der ersten Gleichung sind P_1, P_2 und P_3 skalare Kraftwerte.

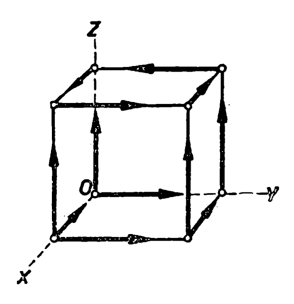
239. An einem Tetraeder $ABCD$ der Kantenlänge a ist eine Kraft F_1 längs der Kante AB und eine Kraft F_2 längs der Kante CD angesetzt.

Es sind die Koordinaten x und y des Schnittpunktes der Momentenachse mit der Ebene Oxy zu bestimmen.



Lösung: $x = \frac{a\sqrt{3}}{6}\,\frac{2F_2^2 - F_1^2}{F_1^2 + F_2^2}$; $y = -\frac{a}{2}\,\frac{F_1F_2}{F_1^2 + F_2^2}$.

240. Längs der Würfelkanten der Länge a wirken zwölf gleiche Kräfte P (vgl. Zeichnung). Dieses Kräftesystem ist in einen kanonischen Zustand zu verwandeln, dabei sind die Koordinaten x und y des Schnittpunktes der Momentenachse mit der Ebene Oxy zu bestimmen.



Lösung: $V = 2P\sqrt{6}$; $M = \frac{2}{3}Pa\sqrt{6}$;

$\cos\alpha = -\cos\beta = -\frac{1}{2}\cos\gamma = -\frac{1}{6}\sqrt{6}$;

$x = y = \frac{2}{3}a$.

241. Längs der Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipeds, die entsprechend 10 m, 4 m und 5 m lang sind, wirken sechs Kräfte: $P_1 = 4$ kg, $P_2 = 6$ kg, $P_3 = 3$ kg, $P_4 = 2$ kg, $P_5 = 6$ kg und $P_6 = 8$ kg (vgl. Zeichnung).

Dieses Kräftesystem ist in einen kanonischen Zustand zu verwandeln. Dabei sind die Koordinaten x und y des Schnittpunktes der Momentenachse mit der Ebene Oxy zu bestimmen.

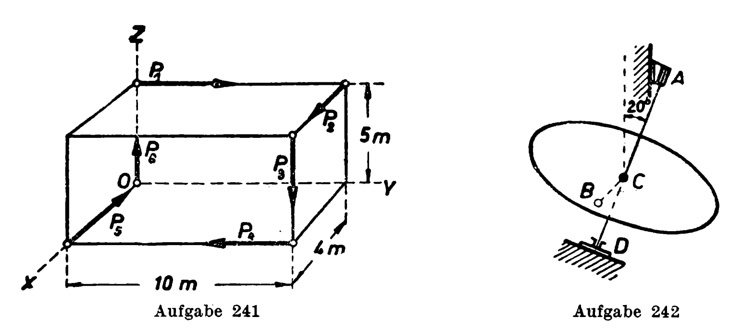
Lösung: $V = 5{,}4$ kg; $M = 47{,}5$ mkg; $\cos\alpha = 0$; $\cos\beta = 0{,}37$; $\cos\gamma = 0{,}93$; $x = +11{,}9$ m; $y = -10$ m.

8. Gleichgewicht beliebiger Kräftesysteme

242. Die geneigt angebrachte Plattform eines Pferdetretrades sei um die Achse ACD mit einer Neigung von 20° drehbar. Im Punkt B, am Ende des horizontalen Radius $CB = 3$ m, wirkt das Gewicht des 400 kg schweren Pferdes.

Es ist das Drehmoment, welches übertragen wird, zu bestimmen.

Lösung: 410 mkg.



Aufgabe 241 Aufgabe 242

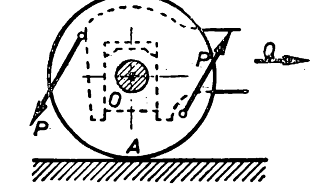
243. Eine Windmühle besitzt vier Flügel, die einen Anstellwinkel $\alpha = 15°$ mit der senkrecht zur Drehachse stehenden Fläche bilden. Der Winddruck auf jeden Flügel beträgt 100 kg und wirkt senkrecht zur Flügelfläche. Es kann angenommen werden, daß die Resultierende in 3 m Abstand von der Drehachse wirkt.

Es ist das Drehmoment, welches übertragen wird, zu bestimmen.

Lösung: 311 mkg.

244. Ein Elektromotor, der auf der Achse O des Radsatzes eines Straßenbahnwagens sitzt, versucht die Achse gegen den Uhrzeiger zu drehen. Das wirkende Moment beträgt 600 mkg, der Radradius 60 cm.

Es ist die Zugkraft Q des Radsatzes zu bestimmen, wenn die Räder auf waagerechten Schienen stehen.



Lösung: $Q = 1$ t.

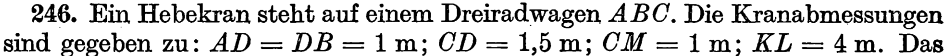
245. An den Enden der Achsen AO, BO und CO befinden sich Kreisscheiben, an denen Kräftepaare Momente ausüben. Alle drei Achsen liegen in einer Ebene, der Winkel AOB beträgt 90°, die Scheibenradien und die dazugehörigen Kräfte betragen

für Scheibe A: $R_A = 15$ cm, $P_A = 10$ kg;
für Scheibe B: $R_B = 10$ cm, $P_B = 20$ kg;
für Scheibe C: $R_C = 5$ cm, $P_C = $ P.

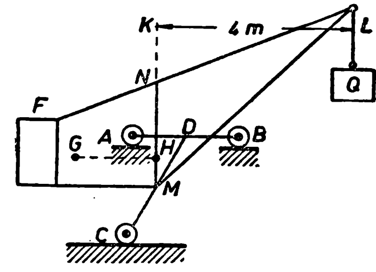
Es sind die Größe P und der Winkel $BOC = \alpha$ so zu bestimmen, daß sich das Dreischeibensystem im Gleichgewicht befindet.

Lösung: $P = 50$ kg; $\alpha = \text{arctg}\,(-0{,}75) = 143°\,10'$.

246. Ein Hebekran steht auf einem Dreiradwagen ABC. Die Kranabmessungen



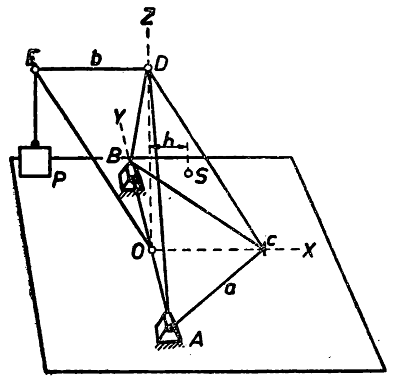
sind gegeben zu: $AD = DB = 1$ m; $CD = 1{,}5$ m; $CM = 1$ m; $KL = 4$ m. Das Gleichgewicht des Kranes wird durch das Gegengewicht F hergestellt. Das Krangewicht mit Gegengewicht beträgt $P = 10$ t und wirkt im Punkt G, der in der Fläche $LMNF$ im Abstand $GH = 0{,}5$ m von der Kranachse MN liegt. Die Last Q wiegt 3 t.



Es ist der Raddruck auf die Schienen für die Stellung des Kranes zu bestimmen, bei der die Fläche LMN parallel zu AB steht.

Lösung: $N_A = \frac{5}{6}$ t; $N_B = 7\frac{5}{6}$ t; $N_C = 4\frac{1}{3}$ t.

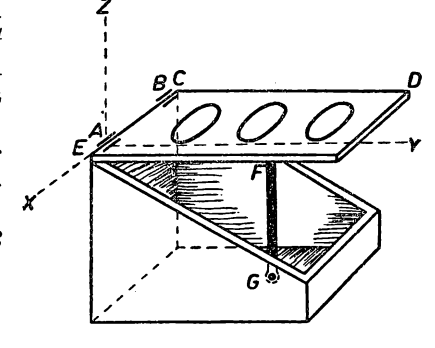
247. Das Gerüst eines Hebekranes hat die Form einer Pyramide, deren waagerechte Grundfläche das gleichseitige Dreieck ABC bildet. Die Mitte der vertikalen Seite, die durch das gleichschenklige Dreieck ADB gebildet wird, stellt die senkrechte Kranachse dar. Der Ausleger OED, der die Last P trägt, ist um die beiden Gelenke O und D drehbar. Das Gerüst ist in A und B durch Lager, in C durch einen Bolzen am Fundament befestigt.



Es sind die Auflagerreaktionen zu bestimmen, wenn der Ausleger in der Ebene DOC steht. Das Lastgewicht beträgt $P = 1200$ kg; das Krangewicht $Q = 600$ kg. Der Abstand des Schwerpunktes von der Achse OD beträgt $h = 1$ m, $a = 4$ m, $b = 4$ m.

Lösung: $Z_A = Z_B = 1506$ kg; $Z_C = -1212$ kg.

248. Der Deckel eines Lichtschachtes wird in waagerechter Lage von der Stütze FG gehalten, die im Abstand $EF = 1{,}5$ m von der Deckelachse angreift. Das Deckelgewicht beträgt $P = 180$ kg, die Deckellänge $CD = 2{,}3$ m, die Deckelbreite $CE = 0{,}75$ m, der Abstand der Gelenke A und B vom Deckelrand $AE = BC = 0{,}15$ m.



Es sind die Gelenkreaktionen in A und B und die Stützenkraft S zu bestimmen.

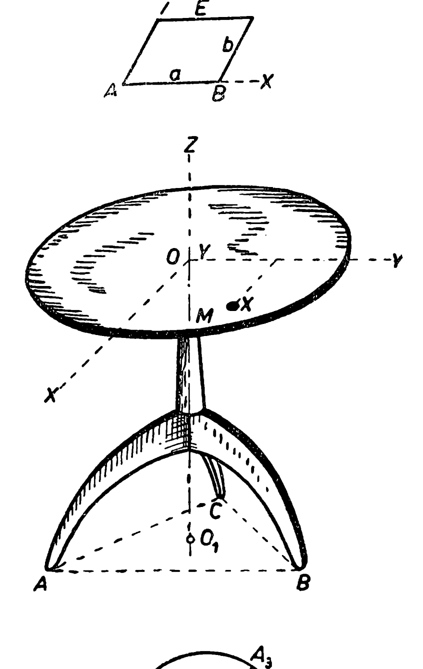
Lösung: $Z_A = -94$ kg; $Z_B = 136$ kg; $S = 138$ kg.

249. Eine waagerecht liegende rechtwinklige Platte mit den Kantenlängen a und b und dem Gewicht P stützt sich auf drei geschliffene Auflagepunkte ab. Die Auflager A und B liegen in den Ecken des Rechtecks, die Lage des Punktes E ist unbestimmt. Der Druck auf die Stützen in den Punkten A und B beträgt

$$N_A = \frac{P}{4} \text{ und } N_B = \frac{P}{5}.$$

Es sind der Druck N_E und die Koordinaten dieses Punktes E zu bestimmen.

Lösung: $N_E = \frac{11}{20} P$; $x = \frac{6}{11} a$; $y = \frac{10}{11} b$.



250. Ein Tisch steht auf drei Füßen, deren Enden A, B und C ein gleichseitiges Dreieck der Kantenlänge a bilden. Das Tischgewicht P wirkt in der Vertikalen OO_1 (z-Achse), welche durch das Zentrum O_1 des Dreiecks ABC hindurchgeht. Auf dem Tisch liegt eine Last p im Punkt M, dessen Koordinaten x und y sind. Die Achse Oy verläuft parallel zu AB.

Es ist die Kraft jedes Fußes auf den Boden zu bestimmen.

Lösung:
$$N_A = \frac{P+p}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} x - y\right) \frac{p}{a};$$
$$N_B = \frac{P+p}{3} + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{3} x\right) \frac{p}{a};$$
$$N_C = \frac{P+p}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{x}{a} p.$$

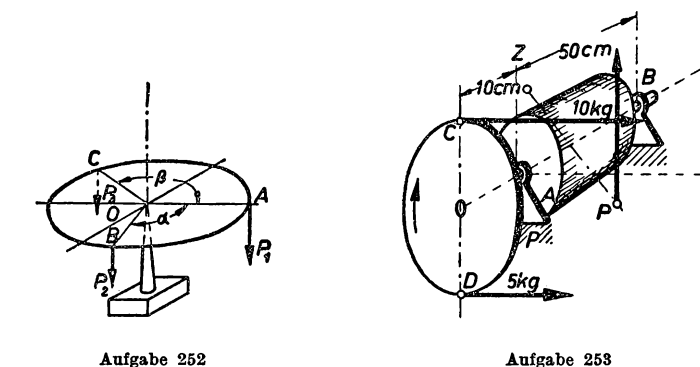
251. Ein runder Tisch steht auf drei Füßen A_1, A_2 und A_3, im Zentrum O befindet sich eine Last. Welchen Bedingungen müssen die Winkel φ_1, φ_2 und φ_3 genügen, damit der Druck auf die Tischfüße A_1, A_2 und A_3 im Verhältnis $1:2:3$ steht.

Lösung: $\varphi_1 = 150°$; $\varphi_2 = 90°$; $\varphi_3 = 120°$.

252. Eine runde Platte, deren Gewicht vernachlässigt wird, stützt sich in waagerechter Lage im Zentrum auf die Spitze O ab. Ohne das Gleichgewicht zu stören, sind am Rande der Platte Gewichte $P_1 = 1{,}5$ kg; $P_2 = 1$ kg und $P_3 = 2$ kg angebracht.

Es sind die Winkel α und β zu bestimmen.

Lösung: $\alpha = 75°\ 30'$; $\beta = 151°$.



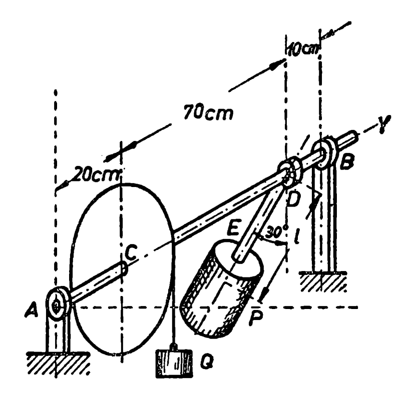
Aufgabe 252 Aufgabe 253

253. Die Riemenscheibe CD einer Dynamomaschine hat einen Radius von 10 cm. Die Abmessungen der Welle AB sind aus der Zeichnung zu ersehen. Die Riemenkraft des oberen Riemenstranges beträgt 10 kg, die des unteren 5 kg. Es ist das Drehmoment M und die Lagerreaktionen in A und B bei gleichmäßiger Drehbewegung zu bestimmen. Das Gewicht der Maschinenteile, welches ein Kräftepaar $(P,\ P)$ hervorruft, bleibt unbeachtet.

Lösung: $M = 50$ cmkg; $X_A = -18$ kg; $X_B = 3$ kg.

254. Eine in A und B gelagerte waagerechte Welle trage eine Scheibe C vom Radius 20 cm, an deren Umfang eine Last $Q = 25$ kg hängt. Weiterhin ist an der Welle eine Stange DE angebracht, an deren Ende ein Gewicht $P = 100$ kg befestigt ist. $AC = 20$ cm, $CD = 70$ cm, $BD = 10$ cm. In der Gleichgewichtslage weicht die Stange DE von der Vertikalen um einen Winkel von 30° ab.

Es sind der Abstand l zwischen dem Schwerpunkt des Gewichtes P und der Welle AB und die Lagerreaktionen in A und B zu bestimmen.



Lösung: $l = 10$ cm; $Z_A = 30$ kg; $Z_B = 95$ kg.

255. Eine waagerechte Welle AB trägt die Zahnräder C und D, die einen Radius von 1 m bzw. 10 cm haben. Die anderen Abmessungen sind aus der Zeichnung ersichtlich. An dem Rad C wirkt in tangentialer Richtung eine waagerechte Kraft $P = 10$ kg, am Zahnrad D ebenfalls in tangentialer Richtung eine vertikale Kraft Q.

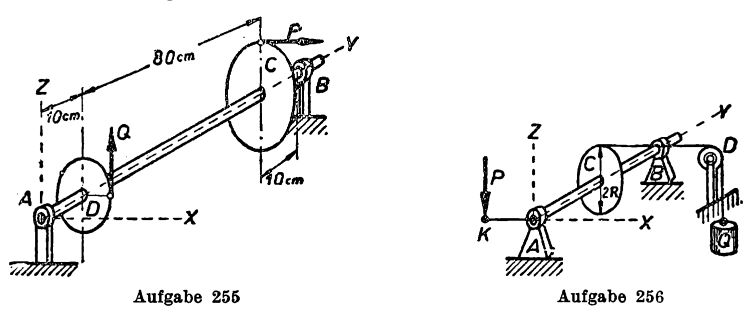
Es sind die Kraft Q und die Lagerreaktionen bei A und B in der Gleichgewichtslage zu bestimmen.

Lösung: $Q = 100$ kg; $X_A = -1$ kg; $X_B = -9$ kg;
$Z_A = -90$ kg; $Z_B = -10$ kg.

256. Mit Hilfe der gezeichneten Winde hebt ein Arbeiter eine Last $Q = 80$ kg. Der Trommelradius beträgt $R = 5$ cm, die Kurbellänge $AK = 40$ cm; $AC = CB = 50$ cm.

Es sind der Druck P auf den Handgriff und der Achsendruck der Winde auf die Lager A und B zu bestimmen, wenn der Griff AK horizontal gerichtet ist und die Kraft P senkrecht darauf steht.

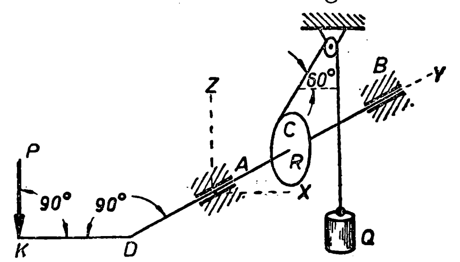
Lösung: $P = 10$ kg; $X_A = 40$ kg; $Z_A = -10$ kg;
$X_B = 40$ kg; $Z_B = 0$.



Aufgabe 255 Aufgabe 256

257. Mit Hilfe der schematisch dargestellten Hebewinde wird eine Last $Q = 100$ kg gleichmäßig gehoben. Der Trommelradius beträgt $R = 5$ cm, die Handgrifflänge $KD = 40$ cm; $DA = 30$ cm; $AC = 40$ cm; $CB = 60$ cm. Das von der Trommel ablaufende Seil bildet mit der Waagerechten einen Winkel von 60°.

Es sind der Druck P auf den Handgriff sowie die Auflagerreaktionen in A und B zu bestimmen, wenn der Griff KD sich in waagerechter Stellung befindet.



Lösung: $P = 12{,}5$ kg; $X_A = -30$ kg; $Z_A = -35{,}7$ kg;
$X_B = -20$ kg; $Z_B = -38{,}4$ kg.

258. Auf die Trommel AB einer Hebewinde ist ein Seil gewickelt, welches eine Last Q trägt. Am Ende der Trommelwelle sitzt ein Rad C, dessen Radius sechsmal größer ist als der Trommelradius. Die anderen Abmessungen sind aus der Zeichnung ersichtlich. Das auf das Rad C aufgewickelte Seil, an dem die Last $P = 6$ kg hängt, läuft unter einem Winkel $\alpha = 30°$ ab.

Es ist die Größe des Gewichtes für den Gleichgewichtszustand der Winde zu bestimmen. Weiterhin sollen die Lagerreaktionen in A und B ermittelt werden, wobei das Wellengewicht und die Reibung an der Scheibe D außer acht zu lassen sind.

Lösung: $Q = 36$ kg; $X_A = -6{,}93$ kg; $Z_A = 16$ kg;
$X_B = 1{,}73$ kg; $Z_B = 23$ kg.

Aufgabe 258

Aufgabe 259

259. Zur Messung der durch die Riemenscheiben A und B übertragbaren Kraft dient ein Dynamometer, wie es schematisch auf der Zeichnung dargestellt ist. Die Scheiben A und B drehen sich um die starre Achse OO_1. Die Scheibe A ist mit dem Zahnrad C fest verbunden, das gleiche gilt für die Scheibe B und das Zahnrad D. Beide Zahnräder stehen mit den Zahnrädern E und F im Eingriff, die sich um die vertikale Achse LL_1 drehen können. Die Zahnraddurchmesser C, D, E und F betragen je 20 cm. Das Drehmoment der Scheibe A beträgt 1200 kgcm und ist gleich dem Bremsmoment der Scheibe B. Die um OO_1 drehbare Achse LL_1 wird durch die Federwaage P, die am starren Punkt K befestigt ist, in ihrer Lage festgehalten.

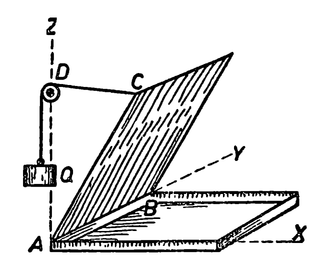
Es ist der Druck, der von den Zahnrädern E und F auf die Achse LL_1 erzeugt wird, zu bestimmen und die Waagenanzeige P zu ermitteln, wenn $LE = 50$ cm beträgt und die Richtung LK senkrecht zur Fläche OLO_1 steht.

Lösung: $N_E = N_F = 120$ kg; $P = 40$ kg.

260. Ein rechteckiger Deckel vom Gewicht $P = 40$ kg wird durch das Gegengewicht Q gehalten, das den Deckel um 60° öffnet.

Bei Außerachtlassung der Rollenreibung in D sind das Gewicht Q und die Gelenkreaktionen in A und B zu bestimmen. Die Rolle D liegt auf einer Vertikalen durch A; $AD = AC$.

Lösung: $Q = 10{,}4$ kg; $X_A = 10$ kg; $Z_A = 17{,}3$ kg;
$X_B = 0$; $Z_B = 20$ kg.



261. Ein rechteckiger Kistendeckel $ABCD$ kann sich um die waagerechte Achse AB in den an den Punkten A und B angebrachten Scharnieren drehen. Das waagerechte Seil CE läuft parallel zu Ax und hält den Deckel unter einem Winkel $DAx = 30°$.

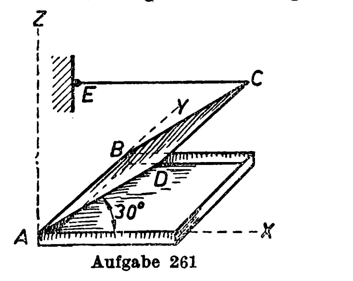
Es sind die Reaktionen in den Scharnieren bei einem Deckelgewicht von 2 kg zu bestimmen.

Lösung: $X_A = 0$; $Z_A = 1$ kg; $X_B = 1{,}73$ kg; $Z_B = 1$ kg.

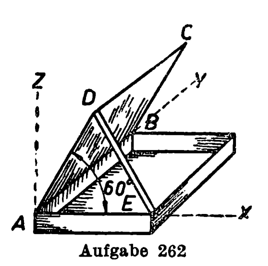
262. Der Deckel einer rechteckigen Kiste $ABCD$ wird auf einer Seite durch einen Stab DE gestützt. Der Deckel wiegt 12 kg. $AD = AE$. Der Winkel DAE beträgt 60°.

Es sind die Reaktionen in den Gelenken A und B sowie die Kraft S im Stab zu bestimmen, wobei sein Gewicht unbeachtet bleibt.

Lösung: $X_A = 1{,}73$ kg; $Z_A = 3$ kg; $X_B = 0$; $Z_B = 6$ kg; $S = 3{,}45$ kg.



Aufgabe 261



Aufgabe 262

263. Ein Rahmen $ABDC$ wiegt $Q = 10$ kg und bildet mit der senkrechten Ebene einen Winkel von 60°. Gegeben ist $BD = BH$, $CE = ED$. Das Seil EF läuft parallel zur Geraden DH.

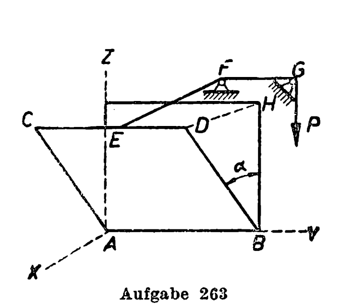
Es ist die Kraft P zu bestimmen, die notwendig ist, um den Rahmen im Gleichgewicht zu halten, und die Scharnierreaktionen in A und B zu ermitteln.

Lösung: $P = 5$ kg; $X_A = X_B = 2{,}17$ kg; $Z_A = Z_B = 3{,}75$ kg.

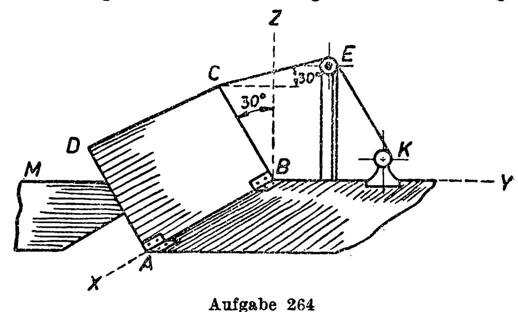
264. Die Trennstelle $ABCD$ einer Eisenbahnbrücke wiegt 1500 kg und wird von einer Kette CE, die über die Rolle E auf eine Winde K läuft, gehoben. Die Rolle E liegt in der vertikalen Ebene BMC.

Es sind für die auf der Zeichnung zum Ausdruck gebrachte Stellung die Kettenkraft sowie die Gelenkreaktionen in den Punkten A und B zu bestimmen.

Lösung: $T = 375$ kg; $Y_A = 0$; $Z_A = 750$ kg; $Y_B = -325$ kg; $Z_B = 562{,}5$ kg.



Aufgabe 263

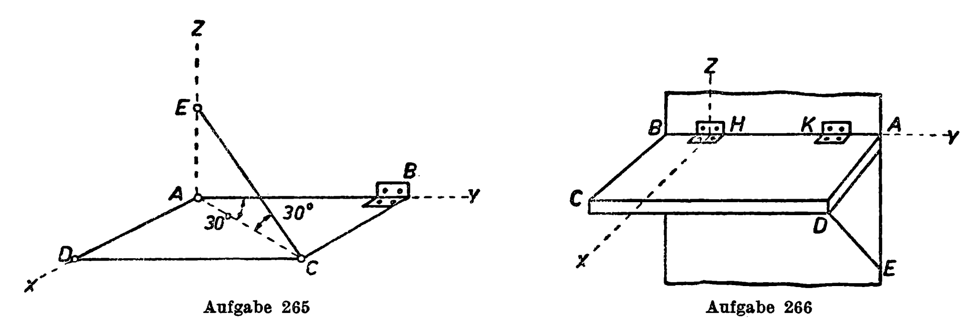


Aufgabe 264

265. Ein rechtwinkliger Rahmen wiegt 20 kg und ist an der Wand mit Hilfe des Gelenkes A und des Scharnieres B befestigt. Der Rahmen wird vom Seil CE, das im Punkt C an den Rahmen und im Punkt E an der Wand befestigt ist, in waagerechter Lage gehalten. Der Punkt E liegt auf einer Vertikalen, die durch den Punkt A geht, $\sphericalangle\, ECA = \sphericalangle\, BAC = 30°$.

Es sind die Seilkraft und die Stützreaktionen zu bestimmen.

Lösung: $T = 20$ kg; $X_A = 8{,}66$ kg; $Y_A = 15$ kg;
$Z_A = 10$ kg; $X_B = Z_B = 0$.



Aufgabe 265

Aufgabe 266

266. Ein aufklappbares Brett $ABCD$ kann sich um die Achse AB drehen. Es wird in der waagerechten Lage von einer Stütze ED gehalten, die durch das Gelenk E an der vertikalen Wand BAE befestigt ist. Das Brett mit daraufliegender Last P wiegt 80 kg, die Last wirkt im Schnittpunkt der Diagonalen des Rechteckes $ABCD$. Es sind folgende Abmessungen gegeben: $AB = 150$ cm; $AD = 60$ cm; $AK = BH = 25$ cm. Stützenlänge $ED = 75$ cm.

Wie groß wird die Stützenkraft S bei Nichtbeachtung des Stützengewichtes, und wie groß werden die Reaktionen in den Scharnieren K und H?

Lösung: $S = 66\frac{2}{3}$ kg; $X_K = -66\frac{2}{3}$ kg; $Z_K = -10$ kg; $X_H = 13\frac{1}{3}$ kg;
$Z_H = 50$ kg.

267. Eine quadratische Platte mit der Kantenlänge $a = 30$ cm und dem Gewicht $P = 5$ kg ist im Punkt A durch ein Kugelgelenk und im Punkt B durch ein Scharnier befestigt. Die Kante AB verläuft horizontal. Im Punkt E liegt die Platte auf einer Spitze auf. Im Punkt H wirkt auf die Platte parallel zur Kante AB eine Kraft F.

Es sind die Reaktionen in den Punkten A, B und E zu ermitteln, wenn $CE = ED$, $BH = 10$ cm und $F = 10$ kg ist. Die Platte bildet mit der Ebene xy einen Winkel α von 30°.

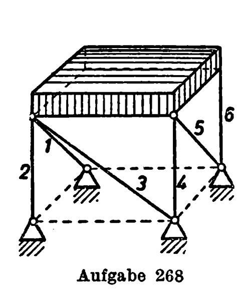
Lösung: $X_A = 10$ kg; $Y_A = 2{,}35$ kg; $Z_A = -0{,}11$ kg;
$Y_B = -3{,}43$ kg; $Z_B = 3{,}23$ kg; $R_E = 2{,}17$ kg.

268. Eine waagerechte Platte vom Gewicht P hat die Form eines rechteckigen Parallelepipeds. Die Platte ist durch sechs Stangen am Erdboden befestigt. Es sind die Kräfte in den Stützstangen, die durch das Plattengewicht hervorgerufen werden, zu bestimmen, wenn die Stangenenden an der Platte und am Erdboden mit Kugelgelenken befestigt sind.

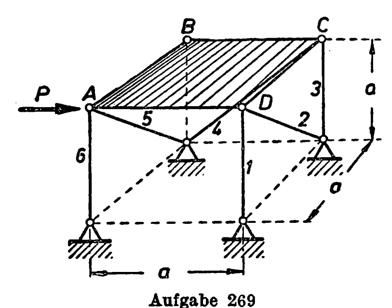
Lösung: $S_1 = S_3 = S_4 = S_5 = 0;\ S_2 = S_6 = -\frac{P}{2}.$

269. Es sind die Kräfte in sechs Stützstangen zu bestimmen, die eine quadratische Platte $ABCD$ halten. Entlang der Kante AD wirkt eine horizontale Kraft P; die Abmessungen sind aus der Zeichnung ersichtlich.

Lösung: $S_1 = P;\ S_2 = -P\sqrt{2};\ S_3 = -P;\ S_4 = P\sqrt{2};$
$S_5 = P\sqrt{2};\ S_6 = -P.$



Aufgabe 268

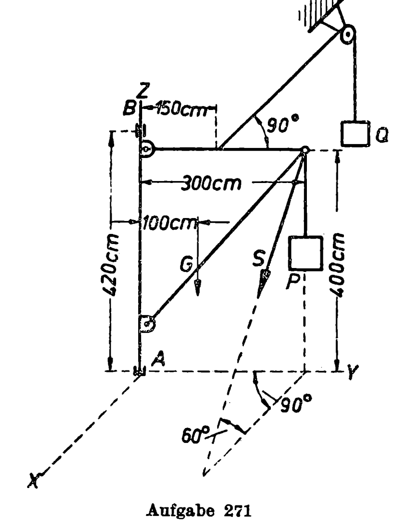


Aufgabe 269

270. Eine Tür mit einer vertikalen Drehachse AB ist geöffnet und bildet einen Winkel $CAD = 60°$. In dieser Lage wird die Tür durch zwei Seile gehalten. Das Seil CD läuft über eine Rolle und trägt die Last $P = 32$ kg; das andere Seil EF ist im Punkt F am Fußboden befestigt. Die Tür wiegt 64 kg und hat eine Breite von $AD = AC = 180$ cm; sie ist $AB = 240$ cm hoch. Bei Vernachlässigung der Rollenreibung sind die Seilkraft T und die Reaktionen des Halslagers im Punkt A und des Spurlagers im Punkt B zu bestimmen.

Lösung: $T = 32$ kg; $X_A = 6{,}9$ kg;
$Y_A = -28$ kg; $X_B = 20{,}8$ kg;
$Y_B = 44$ kg; $Z_B = 64$ kg.

Aufgabe 270



Aufgabe 271

271. Es sind die Reaktionen des Halslagers B und des Spurlagers A eines Kranes sowie die Spannkraft S des Halteseiles zu bestimmen, wenn der gezeichnete Kran durch ein waagerechtes Seil abgezogen wird, das über eine Rolle läuft und ein Gewicht $Q = 100$ kg trägt. Der Neigungswinkel des Seiles beträgt 60°. Der Kran wiegt $G = 2$ t, die Last $P = 4$ t. Die Abmessungen sind auf der Zeichnung angegeben. Die Rollenreibung ist zu vernachlässigen.

Lösung: $S = 100$ kg; $X_A = 2{,}4$ kg; $Y_A = 3395$ kg;
$Z_A = 6087$ kg; $X_B = 47{,}6$ kg; $Y_B = -3395$ kg.

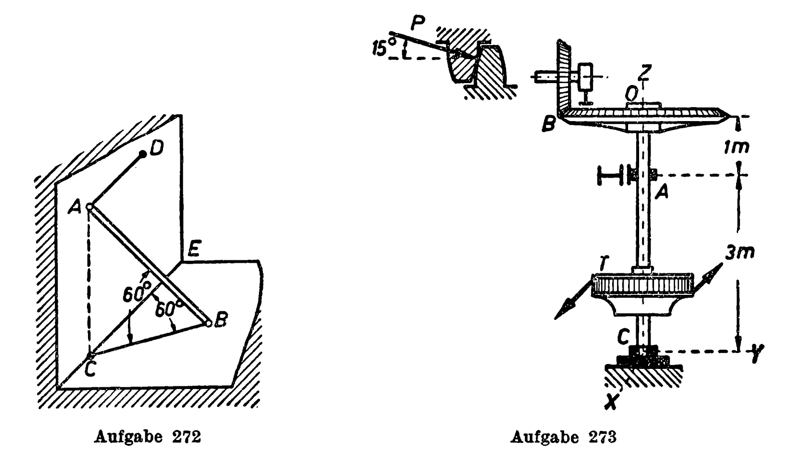
272. Eine Stange AB wird in ihrer geneigten Lage von zwei waagerechten Seilen AD und BC gehalten. Im Punkt A lehnt sich die Stange an eine senkrechte Wand an, auf der sich auch der Punkt D befindet. Im Punkt B berührt die Stange den Fußboden. Die Punkte A und C liegen auf einer Vertikalen. Die Stange wiegt 8 kg. Die Reibung in den Punkten A und B bleibt unbeachtet.

Es ist zu überprüfen, ob die Stange im Gleichgewicht bleibt und wie groß die Seilkräfte T_A und T_B und die Stützreaktionen der Flächen sind. $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCE = 60°$.

Lösung: $T_A = 1{,}15$ kg; $T_B = 2{,}3$ kg;
$R_A = 2$ kg; $R_B = 8$ kg.

273. Ein Kräftepaar, das eine Wasserturbine T dreht und ein Moment von 120 mkg bewirkt, wird durch den Druck auf den Zahn B des Kegelzahnrades OB und die Auflagerreaktionen ausgeglichen. Der Zahndruck steht senkrecht zum Radius $OB = 0{,}6$ m und bildet zu der Radebene einen Winkel $\alpha = 15°$. Es sind die Reaktionen des Fußlagers C und des Halslagers A zu bestimmen, wenn die Turbine einschließlich Welle und Rad 1,2 t wiegt. Das Gewicht wirkt in Richtung der Achse OC; $AC = 3$ m; $AO = 1$ m.

Lösung: $X_A = 267$ kg; $X_C = -67$ kg; $Y_A = -Y_C = 10{,}8$ kg; $Z_C = 1254$ kg.



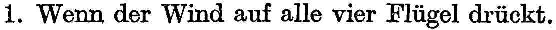
Aufgabe 272

Aufgabe 273

274. Eine Windmühle mit waagerechter Achse besteht aus vier symmetrisch angeordneten Flügeln, deren Flächen mit der vertikalen Ebene, die senkrecht zur Achse AC steht, gleiche Anstellwinkel von 30° bilden. In 2 m Abstand von der Achse wirkt auf jeden Flügel eine resultierende Winddruckkraft von 120 kg. Im Punkt A stützt sich die Mühlenachse auf ein Halslager, im Punkt C auf ein Spurlager und wird durch den senkrechten Druck P auf den Zahn des Rades B im Gleichgewicht gehalten. Der Radius des Rades B beträgt 1,2 m. Die Abstände sind:

$BC = 0{,}5$ m, $AB = 1$ m; $AF = 0{,}5$ m.

Es sind der Druck P und die Auflagerreaktionen für folgende zwei Fälle zu ermitteln:

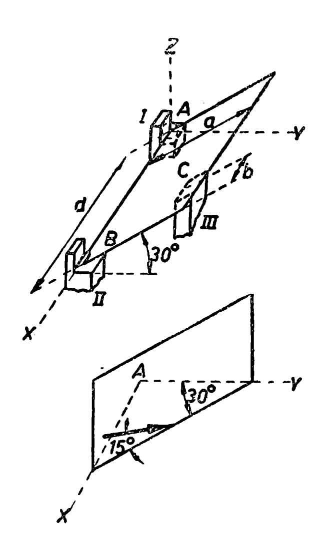

1. Wenn der Wind auf alle vier Flügel drückt.


2. Wenn der Flügel D entfernt wird und die Linie DE vertikal steht.

Lösung: 1) $P = 400$ kg; $Z_A = 133$ kg; $Y_C = -416$ kg; $Z_C = 266{,}6$ kg
$X_A = X_C = 0$;

2) $P = 300$ kg; $X_A = 80$ kg; $Z_A = -38{,}6$ kg;
$X_C = -20$ kg; $Y_C = -312$ kg; $Z_C = 339$ kg.

275. Eine rechtwinklige Überdachung, deren Kante AB horizontal liegt, bildet mit der Ebene einen Winkel von 30°. Das Dach ist an der Säule I mit dem Kugelgelenk A und an der Säule II durch ein Scharnier B befestigt. Außerdem stützt sich das Dach im Punkt C auf die schräge Fläche der Säule III ab. Gegeben sind folgende Maße: $a = 3$ m, $d = 6$ m, $b = 2$ m, 1 m² Dachfläche wiegt 20 kg. Das Dach steht unter einem gleichmäßig verteilten Winddruck mit einer resultierenden Windkraft von 900 kg. Die Windkraft wirkt unter einem Winkel von 15° auf die vertikale Ebene und bildet mit der Achse Ay einen Winkel von 30°.



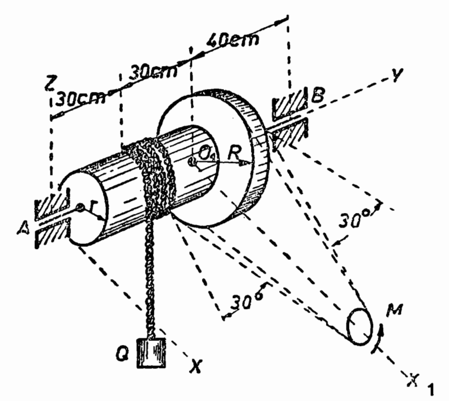
Es sind die Auflagerreaktionen zu bestimmen.

Lösung: $R_C = 445$ kg; $X_A = 435$ kg;
$Y_A = -208$ kg; $Z_A = 222$ kg;
$Y_B = -323$ kg; $Z_B = -14{,}8$ kg.

276. Eine Last Q wird vom Motor M mit Hilfe eines Riementriebes gleichmäßig gehoben.

Es sind die Auflagerreaktionen in A und B und die Riemenkraft zu bestimmen, wenn die Riemenstränge einen Winkel von 30° bilden (die Achse O_1x_1 verläuft parallel zur Achse Ax). Gegeben sind: $r = 10$ cm, $R = 20$ cm, $Q = 1$ t. Die

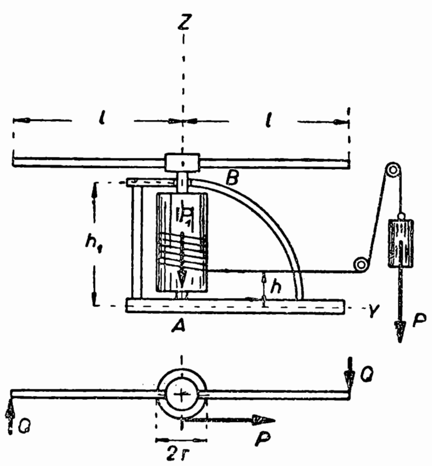
Spannkraft des ziehenden Riementeils ist zweimal so groß wie die Kraft des gezogenen Teiles, d. h. $T_1 = 2\,T_2$.



Lösung: $T_1 = 1$ t; $T_2 = 0{,}5$ t; $X_A = -0{,}52$ t;
$Z_A = 0{,}6$ t; $X_B = -0{,}78$ t; $Z_B = 0{,}15$ t.

277. Zum Heben eines 300 kg schweren Rammbären dient eine senkrechte Winde, deren Welle einen Radius $r = 20$ cm hat. Am unteren Ende stützt sich die Welle auf das Fußlager A ab, am oberen Ende wird sie vom Halslager B gehalten. Zwei Arbeiter drehen die Winde mit Hilfe des $l = 1{,}5$ m langen Drehhebels.

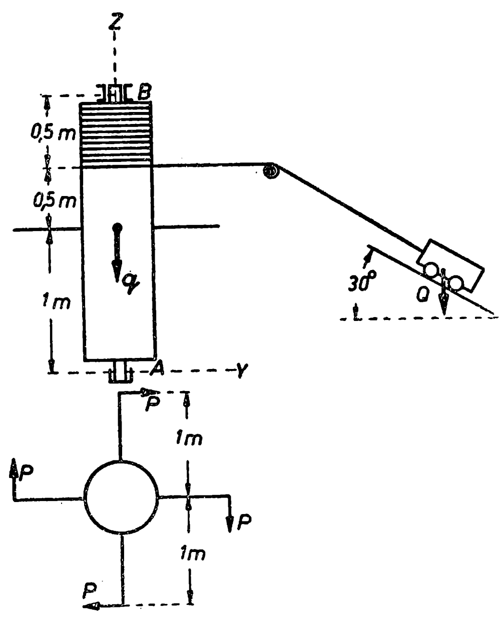
Es ist die Kraft Q jedes Arbeiters, die für ein gleichmäßiges Heben des Rammbären erforderlich ist, zu bestimmen. Weiterhin sollen die Reaktionen in den Lagern A und B ermittelt werden. Gegeben ist $h_1 = 1$ m, $h = 30$ cm und das Gewicht der drehbaren Windenteile $P_1 = 100$ kg.



Lösung: $Q = 20$ kg; $X_A = 0$;
$Y_A = -210$ kg; $Z_A = 100$ kg;
$X_B = 0$; $Y_B = -90$ kg.

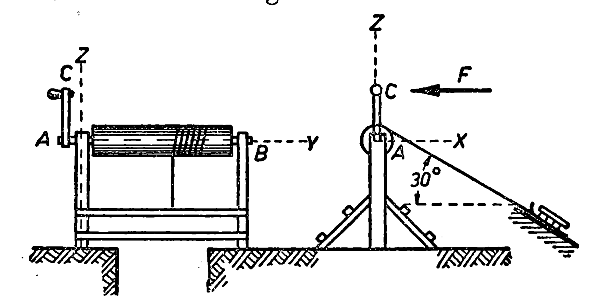
278. Mit der gezeichneten Vorrichtung wird eine beladene Lore gleichmäßig hochgezogen. Das Gewicht der Lore beträgt Q.

Es sind die Kräfte P zu bestimmen, die an den vier Hebeln wirken müssen. Außerdem sollen die Stützreaktionen A und B ermittelt werden, wenn das Gewicht der Trommel $q = 0{,}1$ t, ihr Durchmesser $d = 24$ cm, $Q = 1$ t und die Hebellängen $l = 1$ m betragen. Die Trommelachse steht senkrecht und läuft in den Lagern A und B.



Lösung: $Y_A = -125$ kg; $Z_A = 100$ kg;
$Y_B = -375$ kg; $X_A = X_B = 0$; $P = 15$ kg.

279. Eine Handwinde, die zur Beförderung von Gestein aus einem schrägen Schacht dient, besteht aus einer 1,5 m langen Holzwelle von 0,25 m Durchmesser. Die Welle läuft in den Lagern A und B und wird mit der Handkurbel AC gedreht. Es ist die Kraft zu bestimmen, die im Punkt C senkrecht zur Handkurbel wirkt. Gleichfalls sind die Lagerreaktionen bei vertikaler Lage der Handkurbel zu ermitteln. Das Wellengewicht beträgt 30 kg, der beladene Schlitten wiegt 100 kg. Der Reibungskoeffizient des Schlittens auf dem Holzbelag ist $\mu = 0{,}5$. Der Neigungswinkel des Schachtes beträgt 30°. Die Handkurbel ist 0,5 m lang, die Abwicklungsstelle des Seiles von der Welle ist vom Lager B

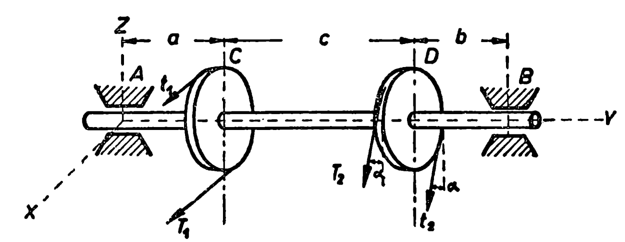


50 cm entfernt. Der Abstand zwischen der Handkraft F und der Vertikalen, die durch das Lager A geht, ist zu vernachlässigen. Die Welle wird mit gleichmäßiger Geschwindigkeit gedreht.

Lösung: $X_A = -3{,}61$ kg; $Z_A = 30{,}6$ kg;
$X_B = -53{,}9$ kg; $Z_B = 46{,}1$ kg; $F = 23{,}3$ kg.

280. Die waagerechte Welle einer Transmission ist mit zwei Riemenscheiben versehen und wird in den Lagern A und B abgestützt. Die Radien der Scheiben betragen: $r_1 = 20$ cm, $r_2 = 25$ cm; der Scheibenabstand von den Lagern: $a = b = 50$ cm; der Abstand zwischen den Scheiben beträgt $c = 100$ cm. Die Kräfte der Riemenstränge der Scheibe C wirken waagerecht und haben die Größe $T_1 = 2\,t_1 = 500$ kg. Die Kräfte der Riemenstränge der Scheibe D bilden mit der Senkrechten einen Winkel $\alpha = 30°$ und haben die Größe $T_2 = 2\,t_2$.

Es sind die Riemenkräfte T_2 und t_2 und die Auflagerreaktionen bei Gleichgewicht zu bestimmen.



Lösung: $T_2 = 400$ kg; $t_2 = 200$ kg; $X_A = -637{,}5$ kg; $Z_A = 130$ kg;
$X_B = -412{,}5$ kg; $Z_B = 390$ kg.

281. Der Pleuelstangendruck einer Dampfmaschine, der in der Mitte D des Halszapfens einer gekröpften Welle angreift, beträgt $P = 2000$ kg und wirkt unter einem Winkel von 10°, wobei die Fläche ODO_1 mit der Vertikalen einen Winkel von 30° bildet. Vom Schwungrad wird das Moment durch ein Seil zur Arbeitsmaschine übertragen. Die Seilstränge laufen parallel und bilden einen Neigungswinkel von 30°. Die Kraft P wird durch die Seilkräfte T und t und die Lagerreaktionen A und B im Gleichgewicht gehalten. Das Schwungrad wiegt 1300 kg, sein Durchmesser ist $d = 2$ m, die Summe der Seilkräfte $T + t = 750$ kg. Die auf der Zeichnung angegebenen Abstände betragen: Abstand des Punktes D von der Achse OO_1 $r = 125$ mm, $l = 250$ mm, $m = 300$ mm, $n = 450$ mm.

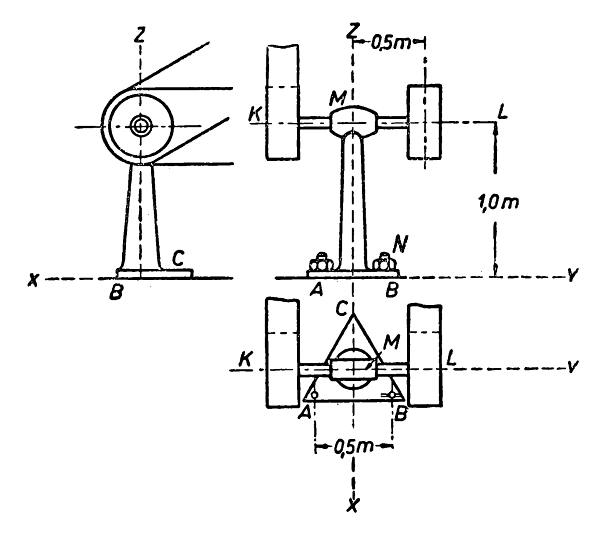
Es sind die Lagerreaktionen A und B und die Seilkräfte T und t zu bestimmen.

Lösung: $X_A = -571$ kg; $Z_A = -447$ kg; $X_B = -2048$ kg; $Z_B = 1025$ kg;
$T = 492$ kg; $t = 258$ kg.

282. Um die Drehungen einer Welle auf eine andere parallele Welle zu übertragen, wird der gezeichnete Riemenscheibenträger verwendet. Auf einer Welle sind dabei zwei gleiche Riemenscheiben aufgekeilt. Die Welle dreht sich im Lager M, das an der Säule MN befestigt ist. Die dreieckige Bodenplatte der Säule ist mit zwei Bolzen A und B am Boden befestigt, im Punkt C liegt die Platte frei auf. Der Bolzen A führt durch ein rundes Loch der Platte, der Bolzen B durch ein Schlitzloch, welches in Richtung AB liegt. Die Säulenachse verläuft durch das Zentrum des Dreiecks ABC.

Es sind die Reaktionen R_A, R_B und R_C zu bestimmen, wenn der Abstand der Achse KL vom Boden 1 m, der Abstand von der Mitte der Riemenscheibe zur Säulenachse 0,5 m und die Kräfte der vier Riemenstränge je 60 kg betragen.

Die Stränge des rechten Riemens verlaufen waagerecht, die linken Riemenstränge bilden mit der Waagerechten einen Winkel von 30°. Die gesamte Anlage wiegt 300 kg, das Gewicht wirkt längs der Säulenachse. Die gegebenen Abmessungen betragen: $AB = BC = CA = 50$ cm.

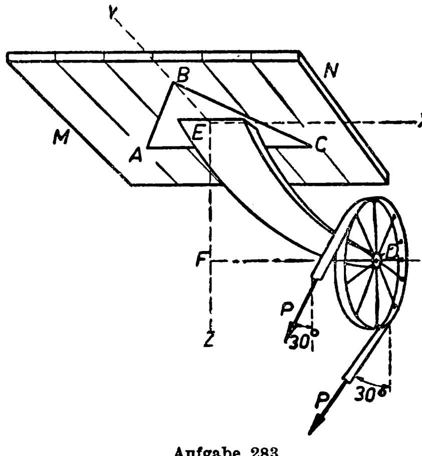


Lösung: $X_A = 96$ kg; $Y_A = 0$; $Z_A = -239$ kg;
$X_B = 128$ kg; $Z_B = -119$ kg; $Z_C = 597$ kg.

283. Das Konsol der Riemenscheibe D ist an der waagerechten Decke MN befestigt. In den Punkten A und C befinden sich Gelenke, im Punkt B liegt das Dreieck frei auf. Die Punkte ABC bilden ein gleichseitiges Dreieck der Schenkellänge 30 cm. Der Mittelpunkt der Riemenscheibe D wird bestimmt durch die Vertikale $EF = 40$ cm, die vom Mittelpunkt E des Dreiecks ABC ausgeht, und durch die Horizontale $FD = 50$ cm, die parallel zum Schenkel AC verläuft. Die Fläche der Riemenscheibe steht senkrecht zur Geraden FD. Die Riemenkraft P jedes einzelnen Riemenstranges beträgt 120 kg und bildet mit der Vertikalen einen Winkel von 30°.

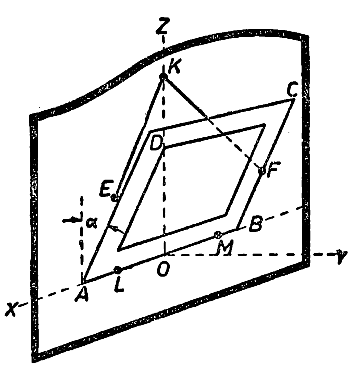
Es sind die Reaktionen in den Auflagern A, B und C zu bestimmen, wobei das Gewicht der einzelnen Teile unbeachtet bleibt.

Lösung: $Y_A = 140$ kg; $Z_A = 185$ kg; $Z_B = 115$ kg;
$Y_C = -260$ kg; $Z_C = -508$ kg.





Aufgabe 283



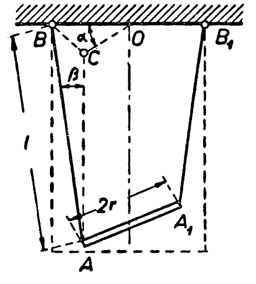
Aufgabe 284

284. Ein gerahmtes Bild in Form des Rechtecks $ABCD$ ist an einer senkrechten Wand durch eine Schnur EKF befestigt. Diese ist so um den Haken gelegt, daß der Rand AB horizontal liegt. Die Punkte E und F bilden die Mitte der Seiten AD und BC. Das Bild hängt unter einem Winkel $\alpha = \operatorname{arctg} {}^3/_4$ geneigt zur Wand. In den Punkten L und M sind zwei Nägel in die Wand geschlagen, auf denen das Bild ruht, wobei $AL = MB$. Das Bild hat folgende Abmessungen: $AB = 60$ cm, $AD = 75$ cm. Sein Gewicht beträgt 20 kg, die Schnur ist 85 cm lang.

Es sind die Seilkraft T und der Druck auf die einzelnen Nägel L und M zu bestimmen.

Lösung: $T = 8{,}5$ kg; $Y_L = Y_M = -4{,}5$ kg;
$Z_L = Z_M = -6$ kg.

285. Eine Stange AA_1 hängt an zwei nicht dehnbaren Fäden der Länge l, die in den Punkten B und B_1 befestigt sind. Die Stangenlänge beträgt $AA_1 = BB_1 = 2r$, ihr Gewicht P kg. Die Stange ist um die senkrechte Achse um einen Winkel α aus der Ebene heraus gedreht. Es sind das Moment M, das auf die Stange wirken muß, um sie im Gleichgewicht zu halten, und die Fadenkraft zu bestimmen,



Lösung: $M = \dfrac{Pr^2 \sin\alpha}{\sqrt{l^2 - 4r^2 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}}}$; $T = \dfrac{l \cdot P}{2\sqrt{l^2 - 4r^2 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}}}$.

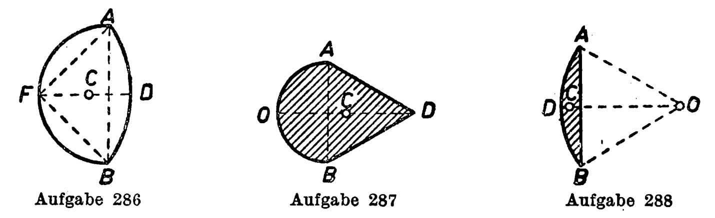
9. Schwerpunkt

286. Es ist die Lage des Schwerpunktes C eines Linienzuges $AFBD$ zu bestimmen, der aus dem Kreisviertel ADB vom Radius $FD = R$ und einem Halbkreisbogen AFB, dessen Durchmesser AB bildet, aufgebaut ist. Die Linienmasse pro Längeneinheit ist konstant.

Lösung: $CF = R\,(\sqrt{2} - 1) + \frac{2R}{\pi}(3 - 2\sqrt{2}) = 0{,}524\,R.$

287. Es ist die Lage des Schwerpunktes C einer Fläche zu bestimmen, die von einem Halbkreis AOB mit dem Radius R und zwei Geraden von gleicher Länge AD und DB umschlossen wird ($OD = 3\,R$).

Lösung: $OC = \frac{3\pi + 16}{3\pi + 12}\,R = 1{,}19\,R.$



Aufgabe 286 Aufgabe 287 Aufgabe 288

288. Es ist die Lage des Schwerpunktes C einer Kreissegmentfläche ADB vom Radius $AO = 30$ cm zu bestimmen, wenn der Winkel $AOB = 60°$ beträgt.

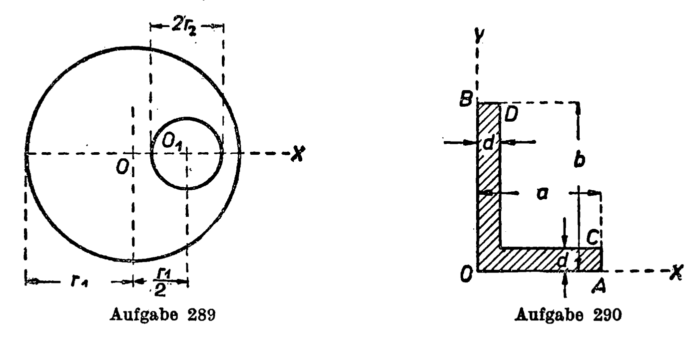
Lösung: $OC = 27{,}7$ cm.

289. Es ist die Schwerpunktslage bei einer Scheibe mit rundem Loch zu bestimmen. Der Scheibenradius beträgt r_1, der Lochradius r_2. Der Mittelpunkt des Loches liegt im Abstand $\frac{r_1}{2}$ vom Scheibenzentrum.

Lösung: $x_c = -\frac{r_1\,r_2^2}{2\,(r_1^2 - r_2^2)}.$

290. Es sind die Schwerpunktskoordinaten für den Querschnitt eines nichtgleichschenkligen Winkels, dessen Schenkel eine Länge $OA = a$, $OB = b$ aufweisen und deren Stärke $AC = BD = d$ ist, zu bestimmen.

Lösung: $x = \frac{a^2 + bd - d^2}{2\,(a + b - d)}$; $y = \frac{b^2 + ad - d^2}{2\,(b + a - d)}.$



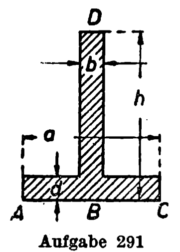
Aufgabe 289 Aufgabe 290

291. Es ist der Schwerpunktsabstand der T-Profilfläche $ABCD$ von der Kante AC aus zu bestimmen, wenn die Höhe des T-Profils $BD = h$, die Breite $AC = a$, die Flanschstärke d und die Stegstärke b beträgt.

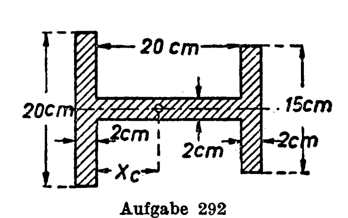
Lösung: $\frac{ad^2 + bh^2 - bd^2}{2\,(ad + bh - bd)}$.

292. Es ist der Schwerpunkt des gezeichneten Doppel-T-Profiles zu ermitteln.

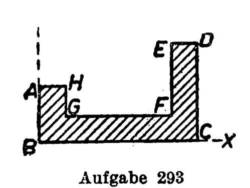
Lösung: $x_c = 9$ cm.



Aufgabe 291



Aufgabe 292



Aufgabe 293

293. Es ist der Schwerpunkt der gezeichneten Fläche zu bestimmen, wenn $AH = 2$ cm, $HG = 1{,}5$ cm, $AB = 3$ cm, $BC = 10$ cm, $EF = 4$ cm, $ED = 2$ cm beträgt.

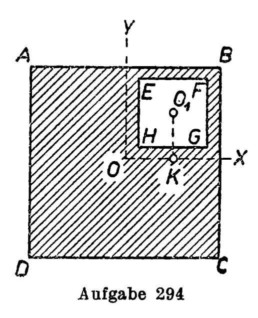
Lösung: $x_c = 5\frac{10}{13}$ cm; $y_c = 1\frac{10}{13}$ cm.

294. Ein quadratisches Brett $ABCD$ mit einer Kantenlänge von 2 m hat ein quadratisches Loch $EFGH$, dessen 0,7 m lange Kanten parallel zu den Kanten $ABCD$ verlaufen. Es sind die Schwerpunktskoordinaten x und y des verbliebenen Bretteils zu bestimmen, wobei gegeben ist, daß $OK = O_1K = 0{,}5$ m beträgt. O und O_1 sind die Schnittpunkte der Quadratdiagonalen.

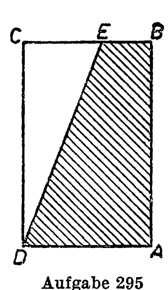
Lösung: $x = y = -0{,}07$ m.

295. Von einem Rechteck $ABCD$ soll das Dreieck DCE so abgeschnitten werden, daß beim Aufhängen des Trapezes $ABED$ in E die Kante AD waagerecht liegt. $AD = a$.

Lösung: $BE = 0{,}366\,a$.



Aufgabe 294



Aufgabe 295

296. Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ der Kantenlänge a. Innerhalb des Quadrates ist der Punkt E zu finden, der den Schwerpunkt der Platte bildet, wenn man aus dem Quadrat ein gleichschenkliges Dreieck AEB herausschneidet.

Lösung: $x = \frac{a}{2}$; $y = 0{,}61\,a$.

297. Vier Mann tragen eine dreieckige Platte. Zwei davon greifen an den Ecken an, die beiden anderen an den Kanten der dritten Ecke. Wie groß muß der Abstand von der dritten Ecke sein, damit jeder von ihnen $^1/_4$ der vollen Plattenlast trägt?

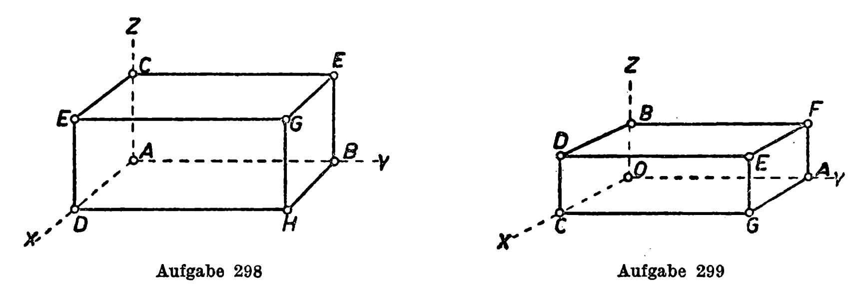
Lösung: In einem Abstand, der $^1/_3$ der Kantenlänge beträgt.

298. An den Spitzen eines rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen Kanten $AB = 20$ cm, $AC = 10$ cm, $AD = 5$ cm lang sind, greifen Lasten an. Es ist der Schwerpunkt des Lastensystems zu bestimmen, wenn folgende Lasten wirken: in A — 1 kg, in B — 2 kg, in C — 3 kg, in D — 4 kg, in E — 5 kg, in F — 3 kg, in G — 4 kg, in H — 3 kg.

Lösung: $x_c = 3{,}2$ cm; $y_c = 9{,}6$ cm; $z_c = 6$ cm.

299. Es sind die Schwerpunktskoordinaten eines rechtwinkligen Parallelepipeds zu bestimmen, dessen Schenkel von gleichartigen Stäben gebildet werden. Die Stäbe haben Längen von $OA = 8$ dm, $OB = 4$ dm, $OC = 6$ dm; ihr Gewicht beträgt $OA = 250$ g; OB, OC und CD je 75 g; $CG = 200$ g; $AF = 125$ g; AG und GF je 50 g; BD, BF, DE und EF je 25 g.

Lösung: $x = 2{,}625$ dm; $y = 4$ dm; $z = 1{,}05$ dm.



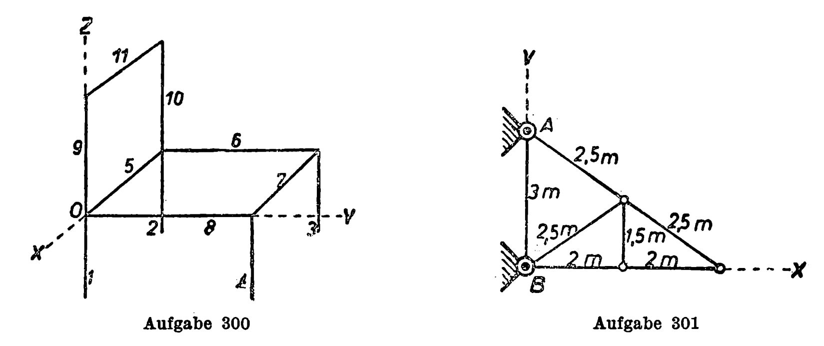
Aufgabe 298 Aufgabe 299

300. Es sind die Schwerpunktskoordinaten eines Körpers zu bestimmen, der aus Stangen von gleicher Länge und gleichem Gewicht besteht. Der Körper hat die Form eines Stuhles. Jede Stange ist 44 cm lang.

Lösung: $x = -22$ cm; $y = 16$ cm; $z = 0$.

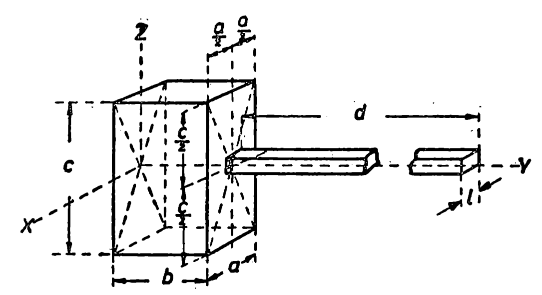
301. Es sind die Schwerpunktskoordinaten des gezeichneten ebenen Trägers, der aus sieben Stäben besteht, zu bestimmen. Das Stabgewicht pro m Stablänge ist für alle Stäbe gleich.

Lösung: $x = 1{,}47$ m; $y = 0{,}94$ m.



Aufgabe 300 Aufgabe 301

302. Es sind die Schwerpunktskoordinaten eines Holzhammers, der aus einem rechtwinkligen Parallelepiped besteht und dessen Griff quadratischen Querschnitt hat, zu bestimmen. Gegeben sind $a = 10$ cm; $b = 8$ cm; $c = 18$ cm; $d = 40$ cm; $l = 3$ cm.



Lösung: $x = 0$; $y = 8{,}8$ cm; $z = 0$.

303. Der Rumpf eines leichten Kreuzers wiegt 1900 t. Der Schwerpunkt desselben befindet sich in einer Höhe $y_1 = 6$ m über dem Kiel. Nach dem Stapellauf wurden im Schiffsrumpf Hauptmaschinen und Kessel eingebaut. Die Hauptmaschinen wiegen 450 t, ihr Schwerpunkt liegt in $y_2 = 3$ m Höhe. Die Kessel wiegen 500 t und haben ihren Schwerpunkt in einer Höhe von $y_3 = 4{,}6$ m.

Es ist die Schwerpunktskoordinate y_c des Gesamtsystems zu bestimmen.

Lösung: $y_c = 5{,}28$ m.

304. Auf einem Schiff mit einer Wasserverdrängung von 4500 t wird eine 30 t schwere Last vom Bug nach dem Heck des Schiffes um einen Abstand von 60 m verschoben. Um wieweit verlagert sich dabei der Schwerpunkt des Gesamtsystems?

Lösung: um 0,4 m.

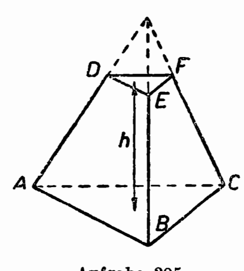
305. Für ein Tetraeder $ABCDEF$, das parallel zur Grundfläche abgeschnitten ist, sind gegeben: die Fläche $ABC = a$, die Fläche $DEF = b$ und der Abstand zwischen den beiden Flächen h. Es ist der Schwerpunktsabstand z des gestutzten Tetraeders vom Boden ABC aus zu bestimmen.

Lösung: $z = \frac{h}{4}\,\frac{a + 2\sqrt{ab} + 3b}{a + \sqrt{ab} + b}.$

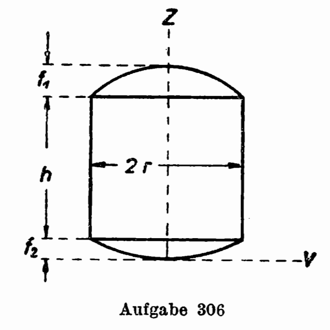
306. Der Körper einer Ankerunterwasserboje hat eine zylindrische Form mit kugeligen Böden. Der Radius des Zylinders beträgt $r = 0{,}4$ m, die Höhe desselben $h = 2r$; die Höhe der kugeligen Böden beträgt: $f_1 = 0{,}5r$, $f_2 = 0{,}2r$.

Es ist der Schwerpunkt der Bojenkörperoberfläche zu ermitteln.

Lösung: $x_c = y_c = 0;$
$z_c = 1{,}267\,r$
$= 0{,}507$ m.



Aufgabe 305



Aufgabe 306

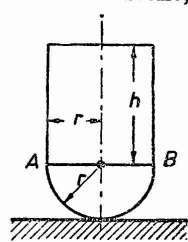
307. Zwei Hälften eines Zylinders werden mit einem Faden, der über den Zylinder läuft, zusammengehalten. An den Fadenenden sind Gewichte von P kg angehängt. Der Zylinder wiegt Q kg. Die Berührungsfläche der beiden Zylinderhälften steht vertikal. Es ist der geringste Wert P zu bestimmen, bei dem die beiden Zylinderhälften in Ruhestellung auf der horizontalen Ebene verbleiben.

Lösung: $P = \frac{2}{3}\,\frac{Q}{\pi}$ kg.



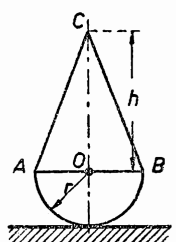
308. Es ist die Höhe h des Zylinderteiles zu ermitteln, bei dem der Körper, der aus einem Zylinder und einer Halbkugel gleicher Dichte vom Radius r besteht, noch in stabiler Gleichgewichtslage bleibt, wenn er mit der Halbkugelfläche auf einer glatten horizontalen Ebene steht.

Der Schwerpunkt des ganzen Körpers hat sich dabei mit dem Halbkugelzentrum zu decken. Der Schwerpunktsabstand der Halbkugel vom Zentrum beträgt $\frac{3}{8}\,r$.



Lösung: $h = \frac{r}{\sqrt{2}}.$

309. Es ist die Höhe h des Konus zu ermitteln, bei dem der Körper, der aus dem Konus und einer Halbkugel gleicher Dichte vom Radius r besteht, noch in stabiler Gleichgewichtslage bleibt (vgl. vorherige Aufgabe).



Lösung: $h = r\sqrt{3}.$

ZWEITER TEIL

KINEMATIK

III. Punktbewegung

10. Bewegungsgleichung und Bewegungsbahn der Punktbewegung

310. Eine Last, die frei an einem Seile hängt, führt Schwingungen nach der Gleichung $x = a \sin\left(kt + \frac{3\pi}{2}\right)$ aus, wobei a in cm und k in $\frac{1}{\text{sec}}$ gemessen wird. Es sind die Schwingungsamplitude der Last und die Kreisfrequenz zu bestimmen, wenn die Schwingungsperiode 0,4 sec beträgt und im Anfangsmoment $x_0 = -4$ cm ist. Man zeichne eine Abstandskurve.

Lösung: $a = +4$ cm; $k = 5\pi \frac{1}{\text{sec}}$.

311. Aus den Gleichungen der Punktbewegung sind die Gleichungen der Bewegungsbahnen zu ermitteln:

1) $x = 20t^2 + 5$, $y = 15t^2 + 3$. — *Lösung:* Gerade $3x - 4y = 3$. Die Bewegung beginnt im Punkt $x = 5$, $y = 3$.

2) $x = 4t - 2t^2$, $y = 3t - 1{,}5t^2$. — *Lösung:* Gerade $3x - 4y = 0$; $-\infty < x \leqq 2$; $-\infty < y \leqq 1{,}5$.

3) $x = 5 + 3\cos t$, $y = 4\sin t$. — *Lösung:* Ellipse $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

4) $x = at^2$, $y = bt$. — *Lösung:* Parabel $ay^2 - b^2x = 0$.

5) $x = 5\sin\frac{\pi}{2}t$, $y = 4\cos\frac{\pi}{2}t$. — *Lösung:* Ellipse $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$.

6) $x = 5\cos t$, $y = 3 - 5\sin t$. — *Lösung:* Kreis $x^2 + (y-3)^2 = 25$.

7) $x = 3 + 4\cos t$, $y = 2 + 5\sin t$. — *Lösung:* Ellipse $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$.

8) $x = 3\cos\left(\frac{\pi}{8} + \pi t\right)$, $y = 4\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi t\right)$. — *Lösung:* Ellipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{xy}{6}\sin\frac{\pi}{8} = \cos^2\frac{\pi}{8}$.

312. Aus den Gleichungen der Punktbewegung sind die Gleichung der Bewegungsbahn und die auf der Bewegungsbahn zurückgelegte Strecke zu ermitteln.

1) $x = 3\,t^2$, $y = 4\,t^2$. *Lösung:* Strahl $4\,x - 3\,y = 0$; $s = 5\,t^2$.

2) $x = 3 \sin t$, $y = 3 \cos t$. *Lösung:* Kreis $x^2 + y^2 = 9$; $s = 3\,t$.

3) $x = a \cos^2 t$, $y = a \sin^2 t$. *Lösung:* Abschnitt der Geraden $x + y - a = 0$, $0 \leqq x \leqq a$; $s = \alpha \sqrt{2} \sin^2 t$.

4) $x = 5 \cos 5\,t^2$, $y = 5 \sin 5\,t^2$. *Lösung:* Kreis $x^2 + y^2 = 25$; $s = 25\,t^2$.

313. Ein Brückenkran bewegt sich entlang einer Werkstatt nach der Gleichung $x = t$; auf dem Kran rollt in Querrichtung die Laufkatze gemäß der Gleichung $y = 1{,}5$ t (x und y werden in m, t in sec gemessen). Die Last wird mit einer Geschwindigkeit $v = 0{,}5$ m/sec gehoben.

Es ist die Bewegungsbahn des Lastschwerpunktes zu bestimmen. In ursprünglicher Lage befand sich der Lastschwerpunkt in der horizontalen Ebene Oxy; Oz ist vertikal nach oben gerichtet.

Lösung: Die Bewegungsbahn ist eine Gerade der Form:
$y = 1{,}5\,x$; $z = 0{,}5\,x$.

314. Eine Punktbewegung, die eine LISSAJOUS-Figur beschreibt, wird von folgenden Gleichungen bestimmt: $x = 3 \sin t$; $y = 2 \cos 2\,t$ (t in sec).

Es ist die Gleichung der Bewegungsbahn zu ermitteln. Sie ist zu zeichnen und die Bewegungsrichtung des Punktes in verschiedenen Zeitabschnitten anzugeben. Weiter ist die Zeit anzugeben, die vom Bewegungsbeginn bis zum Überschneiden der Achse Ox durch die Bewegungsbahn verstreicht.

Lösung: Teil der Parabel: $4\,x^2 + 9\,y = 18$, für den gilt $|x| \leqq 3$, $|y| \leqq 2$;

$$t_0 = \frac{\pi}{4}\,\text{sec}.$$

315. Es ist die Bewegungsbahn eines Punktes zu bestimmen, der gleichzeitig zwei harmonische Schwingungen gleicher Frequenz ausübt, die jedoch verschiedene Amplituden und Phasen haben. Die Schwingungen erfolgen um zwei gegenseitig im Lot stehende Achsen.

$$x = a \sin (kt + \alpha), \quad y = b \sin (kt + \beta).$$

Lösung: Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2\,xy}{ab} \cos (\alpha - \beta) = \sin^2 (\alpha - \beta)$.

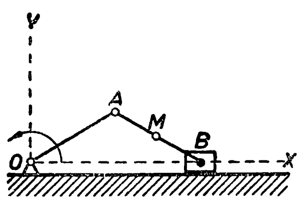
316. Es ist die Gleichung der Bewegungsbahn eines Punktes zu ermitteln, die sich aus der Überlagerung senkrecht aufeinander stehender Schwingungen verschiedener Frequenz ergibt:

1) $x = a \sin 2\,\omega\,t$; $y = a \sin \omega\,t$;
2) $x = a \cos 2\,\omega\,t$; $y = a \cos \omega\,t$.

Lösung: 1) $x^2 a^2 = 4\,y^2 (a^2 - y^2)$; $|x| \leqq a$; $|y| \leqq a$;
2) $2\,y^2 - ax - a^2 = 0$; $|x| \leqq a$; $|y| \leqq a$.

317. Eine Kurbel OA dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = 10\ \text{sec}^{-1}$. Die Länge $OA = AB$ beträgt 80 cm.

Es sind die Bewegungsgleichungen und die Gleichung der Bewegungsbahn des mittleren Punktes M der Kurbelstange sowie die Bewegungsgleichung des Gleitstückes B zu ermitteln, wenn sich das Gleitstück bei Beginn der Bewegung in der äußersten rechten Lage befand. Die Koordinatenachsen sind aus der Zeichnung zu ersehen.



Lösung: 1) Die Bewegungsbahn des Punktes M ist eine Ellipse:

$$\frac{x^2}{120^2} + \frac{y^2}{40^2} = 1;$$

Die Bewegungsgleichungen des Punktes M:

$x = 120 \cdot \cos 10\,t,$

$y = \ \ 40 \cdot \sin\ 10\,t.$

2) Die Bewegungsgleichung des Gleitstückes B:

$x = 160 \cos 10\,t.$

318. Die Bewegungsgleichungen des Punktes eines Radreifens, welcher auf einer geraden Schiene ohne zu gleiten rollt, lauten: $x = a\,(kt - \sin kt)$; $y = a\,(1 - \cos kt)$. Es sind die Zeiten zu bestimmen, bei welchen der Punkt die tiefste, mittlere und höchste Lage auf der Bewegungsbahn einnimmt. Die Achse Oy ist nach oben gerichtet.

Lösung: 1) $\frac{2\pi}{k}\lambda$ sec; 2) $\left(\frac{\pi}{2k} + \frac{2\pi}{k}\lambda\right)$ sec; 3) $\left(\frac{\pi}{k} + \frac{2\pi}{k}\lambda\right)$ sec,

wobei $\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots.$

319. Es sind die Bewegungsgleichungen und die Gleichung der Bewegungsbahn eines Punktes eines Lokomotivrades vom Radius $R = 1$ m zu ermitteln, wenn sich die Lokomotive auf einer geraden Strecke mit konstanter Geschwindigkeit von 20 m/sec bewegt. Anzunehmen ist, daß das Rad ohne zu gleiten rollt. Die Bewegung beginnt im Koordinatenursprung, der auf dem Berührungspunkt von Schiene und Rad liegt.

Lösung: Die Bewegungsbahn ist eine Zykloide; Bewegungsgleichungen:

$x = 20\,t - \sin\ 20\,t;$

$y = 1 - \cos\ 20\,t.$

320. Eine vom Flugzeug abgeworfene Bombe bewegt sich nach den Gleichungen: $x = 40\,t$, $y = 4{,}9\,t^2$ (x, y in m, t in sec); als Koordinatenursprung wird der Abwurfspunkt der Bombe angenommen. Die Achse Ox ist horizontal, die Achse Oy vertikal nach unten gerichtet.

Es soll die Gleichung der Bewegungsbahn der Bombe ermittelt und die Fallzeit bestimmt werden. Weiter soll die Entfernung vom Abwurfspunkt zum Einschlag der Bombe in waagerechter Richtung ermittelt werden, wenn das Flugzeug in einer Höhe von 3000 m fliegt.

Lösung: $y = 0{,}00306\,x^2$; $t = 24{,}74$ sec; $L = 989{,}6$ m.

321. Es sind die Bewegungsgleichungen eines Geschosses gegeben:

$$x = 250\,t;\ y = 430\,t - 4{,}9\,t^2$$

(t in sec, x, y in m). Es sind Flugdauer, Schußweite und die Gleichung der Bewegungsbahn des Geschosses zu bestimmen.

Lösung: $t = 87{,}75$ sec; $L = 21{,}94$ km,
$y = 1{,}72\,x - 0{,}0000784\,x^2$.

11. Punktgeschwindigkeit

322. Ein Zug bewegt sich nach der Gleichung: $s = 0{,}1\,t^2 + t$ (t in sec, s in m). Es sind zu ermitteln:

1) die mittleren Zuggeschwindigkeiten in aufeinanderfolgenden sechs Zeitabständen von je 10 sec, vom Bewegungsbeginn aus gerechnet;

2) die mittlere Geschwindigkeit während der ersten Minute.

Lösung: 1) 2, 4, 6, 8, 10, 12 m/sec; 2) 7 m/sec.

323. Die Schlittenbewegung einer Exzenterpresse ist durch die Gleichung gegeben: $x = e\,(1 - \cos \omega\,t)$, wobei x in cm, t in sec angegeben sind und e die Exzentrizität, ω die Winkelgeschwindigkeit darstellen (e und ω sind konstant).

Es sind zu bestimmen:

1) Nach welcher Zeit ändert sich die Bewegungsrichtung des Schlittens das erste und das zweite Mal (Beginn der Bewegung bei $t = 0$)?

2) Nach welcher Zeit hat die Geschwindigkeit das erste Mal ihr Maximum erreicht?

3) Bewegungsdauer für eine Umdrehung des Exzenters.

Lösung: 1) $t_1 = \dfrac{\pi}{\omega}$ sec; $t_2 = \dfrac{2\,\pi}{\omega}$ sec; 2) $t = \dfrac{\pi}{2\,\omega}$ sec; 3) $T = \dfrac{2\,\pi}{\omega}$ sec.

324. Eine Last, die an einer Stahlfeder hängt, führt geradlinige harmonische Schwingungen aus.

Es ist die Gleichung der Lastbewegung anzugeben, wenn

1) bei $t = 0$, $x_0 = 0$; $v_0 = 62{,}8$ cm/sec,

2) pro Minute 120 Schwingungen ausgeführt werden.

Es sind die Verschiebungs- und Geschwindigkeitsdiagramme zu zeichnen.

Lösung: $x = 5 \sin 4\,\pi\,t$ (x zählt von der mittleren Lage der Last aus).

325. Ein Punkt führt harmonische Schwingungen nach folgendem Gesetz aus: $x = a \sin kt$.

Es sind die Amplitude a und die Kreisfrequenz k der Schwingung zu ermitteln, wenn für $x = x_1$ gerade $v = v_1$ und für $x = x_2$ gerade $v = v_2$ ist.

Lösung: $a = \sqrt{\dfrac{v_1^2\,x_2^2 - v_2^2\,x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}$; $k = \sqrt{\dfrac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2}}$.

326. Eine Kurbelzapfenbewegung wird durch folgende Gleichungen erfaßt:

$$x = 15 \sin \frac{\pi}{4} t; \; y = 15 \cos \frac{\pi}{4} t \; (x, y \text{ in cm}, t \text{ in sek}).$$

Es sind die Zapfengeschwindigkeiten in x- und y-Richtung zu bestimmen, wenn sich der Zapfen auf einer der Koordinatenachsen befindet. Außerdem ist die Gleichung des Hodographen anzugeben.

Lösung: Für $x = 0$, $y = 15$ cm $v_x = \frac{15}{4} \pi$ cm/sec; $v_y = 0$.

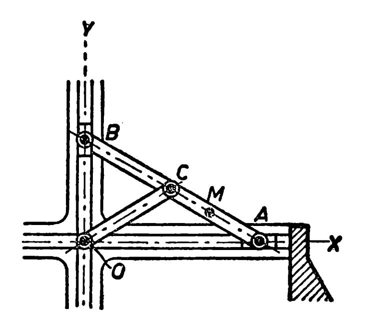
Für $x = 15$ cm, $y = 0$ $v_x = 0$; $v_y = -\frac{15}{4} \pi$ cm/sec.

Für $x = 0$, $y = -15$ cm $v_x = -\frac{15}{4} \pi$ cm/sec; $v_y = 0$.

Für $x = -15$ cm, $y = 0$ $v_x = 0$; $v_y = \frac{15}{4} \pi$ cm/sec.

Als Hodograph gilt der Kreis: $x_1^2 + y_1^2 = \frac{225}{16} \pi^2$.

327. Die Länge eines Ellipsenzirkels beträgt $AB = 40$ cm, die Kurbellänge $OC = 20$ cm, $AC = CB$. Die Kurbel dreht sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse O.



Es sind die Gleichungen der Bewegungsbahn und des Hodographen für den Punkt M, der im Abstand $AM = 10$ cm vom Ende A entfernt liegt, zu bestimmen.

Lösung: $\frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{100} = 1$; $\frac{x_1^2}{900\,\omega^2} + \frac{y_1^2}{100\,\omega^2} = 1$.

328. Ein Punkt beschreibt eine LISSAJOUS-Figur, die den folgenden Gleichungen entspricht: $x = 2 \cos t$, $y = 4 \cos 2t$ (x und y in cm; t in sec).

Es sind Größe und Richtung der Geschwindigkeit des Punktes, wenn er sich auf der Achse Oy befindet, zu ermitteln.

Lösung: 1) $v = 2$ cm/sec; $\cos(v, x) = -1$.
2) $v = 2$ cm/sec; $\cos(v, x) = 1$.

329. Ein Punkt beschreibt eine LISSAJOUS-Figur, den Gleichungen entsprechend: $x = 4 \sin \frac{\pi}{2} t$; $y = 3 \sin \frac{\pi}{2} t$ (t in sec, x, y in cm).

Es sind Größe und Richtung der Punktgeschwindigkeit für $t = 0$; $t = 1$ sec, $t = 2$ sec zu ermitteln.

Lösung: 1) $v_0 = \frac{5}{2} \pi$ cm/sec; $\cos(v_0, x) = \frac{4}{5}$; $\cos(v_0, y) = \frac{3}{5}$.

2) $v_1 = 0$.

3) $v_2 = \frac{5}{2} \pi$ cm/sec; $\cos(v_2, x) = -\frac{4}{5}$;

$\cos(v_2, y) = -\frac{3}{5}$.

330. Es sind die Geschwindigkeit eines Punktes M auf der Mitte einer Kurbelstange und die Geschwindigkeit des zugehörigen Gleitstückes zu ermitteln. Gegeben sind: $r = l = a$ und $\varphi = \omega t$, mit $\omega =$ konstant.

Lösung: 1) $v = \frac{a}{2} \omega \sqrt{8 \sin^2 \omega t + 1}$.

2) $v = 2 a \omega \sin \omega t$.

331. Eine Bombe, die von einem Flugzeug abgeworfen wird, bewegt sich nach der Gleichung $x = v_0 t$, $y = h - \frac{g t^2}{2}$. Die Achse Ox hat horizontale Richtung, die Achse Oy ist vertikal nach oben gerichtet.

Es sind zu ermitteln:

1) die Gleichung der Bewegungsbahn;
2) die Bombengeschwindigkeit (Größe und Richtung) zu dem Zeitpunkt, in dem die Bombe die Achse Ox schneidet;
3) die Wurfentfernung;
4) Hodographengleichung der Bombengeschwindigkeit und die Geschwindigkeit v_1 des Punktes, der den Hodographen zeichnet.

Lösung: 1) $y = h - g \frac{x^2}{2 v_0^2}$;

2) $v = \sqrt{v_0^2 + 2 g h}$; $\cos(v, x) = \frac{v_0}{v}$; $\cos(v, y) = -\frac{\sqrt{2 g h}}{v}$;

3) $x = v_0 \sqrt{\frac{2 h}{g}}$;

4) Der Hodograph bildet eine senkrechte Gerade, die vom Koordinatenursprung einen Abstand von v_0 hat:

$$\frac{v_0}{v_{1y}} = -g.$$

332. Es sind die Bewegungsgleichungen und die Gleichung der Bewegungsbahn des Punktes eines Lokomotivradreifens vom Radius $R = 1$ m, der einen Abstand $a = 0{,}5$ m von der Achse hat, zu bestimmen. Das Rad rollt ohne zu gleiten auf einer waagerechten Strecke. Die Achsengeschwindigkeit des Rades beträgt $v = 10$ m/sec. Die Ox-Achse deckt sich mit der Schiene, die Achse Oy mit dem Punktradius der tiefsten Punktlage (Anfangslage). Weiterhin soll die Geschwindigkeit dieses Punktes für die Augenblicke bestimmt werden, in denen der Raddurchmesser, auf dem er liegt, horizontale und vertikale Lage hat.

Lösung: Verkürzte Zykloide: $x = 10 t - 0{,}5 \sin 10 t$,

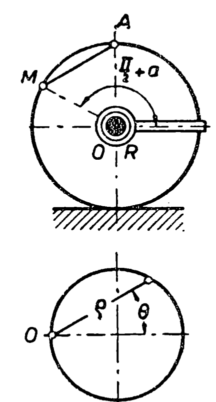
$y = 1 - 0{,}5 \cos 10 t$.

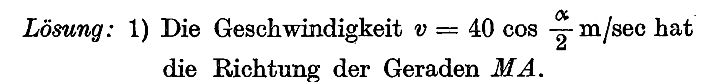
Geschwindigkeiten: 1) 11,18 m/sec; 2) 5 m/sec; 15 m/sec.

333. Die Geschwindigkeit einer Lokomotive beträgt $v_0 = 72$ km/h, ihr Radradius $R = 1$ m. Das Rad rollt ohne zu gleiten auf einer geraden Schiene.

1) Es sind Richtung und Größe der Geschwindigkeit v eines Punktes M am Radreifen, dessen Radius mit der Geschwindigkeitsrichtung v_0 einen Winkel $\frac{\pi}{2} + \alpha$ bildet, zu bestimmen.

2) Es ist ein Geschwindigkeitshodograph des Punktes M aufzubauen und die Geschwindigkeit v des Punktes, der den Hodographen zeichnet, zu bestimmen.




Lösung: 1) Die Geschwindigkeit $v = 40 \cos \frac{\alpha}{2}$ m/sec hat die Richtung der Geraden MA.

2) $\varrho = 2\, v_0 \cos \theta$, wobei θ zu $\frac{\alpha}{2}$ zugeordnet ist.

Der Radius des Hodographen beträgt $r = v_0$;

$$v_1 = \frac{v_0^2}{R} = 400 \text{ m/sec}^2.$$

334. Es sind die Bewegungsgleichungen und die Gleichung der Bewegungsbahn für den Punkt M eines Eisenbahnwagenrades vom Radius $R = 0{,}5$ m zu ermitteln. Der Punktabstand von der Achse beträgt $a = 0{,}6$ m, er liegt bei Bewegungsbeginn um 0,1 m tiefer als die Schiene. Der Wagen bewegt sich auf gerader Strecke mit einer Geschwindigkeit von $v = 10$ m/sec. Weiterhin soll die Zeit bestimmt werden, die vom Beginn der Bewegung bis zum Durchlaufen der Tiefst- bzw. Höchstlage des Punktes benötigt wird. Wie groß sind in diesen Augenblicken die Geschwindigkeitsprojektionen auf die Achsen Ox und Oy? Die Achse Ox deckt sich mit der Schiene, die Achse Oy geht durch die tiefste Punktlage hindurch.

Lösung: Verlängerte Zykloide:
$x = 10\,t - 0{,}6 \sin 20\,t$; $y = 0{,}5 - 0{,}6 \cos 20\,t$;
bei $t = \frac{\pi k}{10}$ sec wird die tiefste Punktlage, $v_x = -2$ m/sec, $v_y = 0$;
bei $t = \frac{\pi}{20}(1 + 2\,k)$ sec wird die höchste Punktlage durchlaufen,
$v_x = 22$ m/sec, $v_y = 0$, wobei $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

335. Es ist die Gleichung der Bewegungsbahn, die ein Schiff beschreibt, welches den konstanten Peilwinkel α auf einen festen Punkt hält, in Polarkoordinaten (r, φ) anzugeben (α ist der Winkel zwischen Geschwindigkeitsrichtung und Peilrichtung). Gegeben ist: α; $r_{\varphi=0} = r_0$. Das Schiff ist als Punkt anzusehen, der sich in einer Ebene bewegt. Der Pol wird durch einen willkürlichen unbeweglichen Punkt in dieser Ebene gebildet. Weiterhin sollen die Spezialfälle für $\alpha = 0$; $\frac{\pi}{2}$; π untersucht werden.

Lösung: Logarithmische Spirale $r = r_0\, e^{-\varphi \operatorname{ctg} \alpha}$.

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich ein Kreis vom Radius $r = r_0$; für $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ eine Gerade.

12. Punktbeschleunigung

336. Ein Eisenbahnzug fährt mit einer Geschwindigkeit von 72 km/h. Durch das Bremsen erfährt er eine Verzögerung von 0,4 m/sec^2.

Es ist zu ermitteln, in welchem Abstand vom Bahnhof mit dem Bremsen begonnen werden muß und welche Bremszeit erforderlich ist, um den Zug zum Stehen zu bringen.

Lösung: 50 sec; 500 m.

337. Ein Rammbär bewegt sich nach dem Aufschlag auf den Pfahl mit diesem noch 0,02 sec, wobei der Pfahl um 6 cm in die Erde rutscht.

Es ist die Anfangsgeschwindigkeit der Pfahlbewegung zu bestimmen, wenn eine gleichförmige Verzögerung angenommen wird.

Lösung: 6 m/sec.

338. Aus einem senkrecht gehaltenen Röhrchen fließen nacheinander in Abständen von 0,1 sec Wassertropfen, die mit einer Beschleunigung von 981 cm/sec^2 fallen.

Es ist der Abstand zwischen dem ersten und dem zweiten Tropfen eine Sekunde nach dem Abfallen des ersten Tropfens zu ermitteln.

Lösung: 93,2 cm.

339. Während der Beschleunigungsperiode wird die Straßenbahnbewegung auf einer geraden Strecke dadurch charakterisiert, daß der zurückgelegte Weg proportional der dritten Potenz der Zeit ist. Im Laufe der ersten Minute legte die Straßenbahn eine Strecke von 90 m zurück.

Es sind Geschwindigkeit und Beschleunigung für die Zeiten $t = 0$ und $t = 5$ sec zu ermitteln. Zeichne das Weg-Zeit-Diagramm, das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm und das Beschleunigungs-Zeit-Diagramm.

Lösung: $v_0 = 0$; $b_0 = 0$; $v_5 = \frac{15}{8}$ m/min; $b_5 = 45$ m/min^2.

340. Eine Lokomotive fährt mit einer Geschwindigkeit von 15 m/sec. Auf einer 34 m langen Strecke wird Gegendampf gegeben, wodurch die Geschwindigkeit bis auf 5 m/sec abfällt.

Wie lange wird Gegendampf gegeben, und wie groß ist die dadurch entstehende gleichförmige Verzögerung?

Lösung: $t = 3{,}40$ sec; $b = 2{,}94$ m/sec^2.

341. Unter der Annahme, daß die Landungsgeschwindigkeit eines Flugzeuges 100 km/h beträgt, soll die Verzögerung bei der Landung auf einer $l = 100$ m langen Strecke bestimmt werden. Es wird gleichförmige Verzögerung angenommen.

Lösung: $b = 3{,}86$ m/sec^2.

342. Ein Rammbär fällt aus einer Höhe von 2,5 m herab. Um ihn wieder auf seine Ausgangshöhe zu heben, muß man dreimal soviel Zeit, als er zum Fallen benötigt, aufwenden.

Wieviel Schläge wird er in der Minute verrichten, wenn man annimmt, daß der Rammbär beim Fallen eine Beschleunigung von 9,81 m/sec^2 erhält?

Lösung: 21 Schläge in der Minute.

343. Ein Zug mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 54 km/h legt in den ersten 30 sec eine Strecke von 600 m zurück. Unter der Annahme, daß sich der Zug gleichförmig beschleunigt bewegt, sind die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Zuges am Ende der 30. Sekunde zu ermitteln. Die gegebene Zugbewegung geschieht auf einem Radius von $R = 1$ km.

Lösung: $v = 25$ m/sec; $b = 0{,}708$ m/sec^2.

344. Ein Gleitstück bewegt sich in einer geraden Führung mit einer Beschleunigung $b_x = -\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} \cdot t$ m/sec^2. Es ist die Bewegungsgleichung des Gleitstückes zu ermitteln, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit $v_{0x} = 2\pi$ m/sec beträgt und seine Anfangslage, die als Koordinatenursprung angenommen wird, sich mit der mittleren Lage des Gleitstückes deckt. Es sind die Weg-Geschwindigkeits- und Beschleunigungskurven zu zeichnen.

Lösung: $x = 4 \sin \frac{\pi}{2} t$ m.

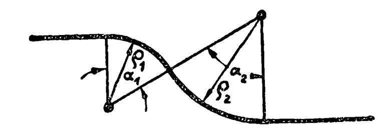
345. Ein Zug bewegt sich mit gleichförmiger Verzögerung auf einem Kreisbogen vom Radius $R = 800$ m und legt eine Strecke $s = 800$ m zurück. Seine Anfangsgeschwindigkeit beträgt $v_0 = 54$ km/h, seine Endgeschwindigkeit $v = 18$ km/h.

Es ist die volle Zugbeschleunigung am Anfang und am Ende des Kreisbogens sowie die Bewegungszeit auf dem Bogen zu bestimmen.

Lösung: $b_0 = 0{,}308$ m/sec^2; $b = 0{,}129$ m/sec^2; $T = 80$ sec.

346. Die Biegung eines Straßenbahngleises besteht aus zwei Bogen mit den Radien $\varrho_1 = 300$ m und $\varrho_2 = 400$ m. Die Winkel betragen $\alpha_1 = \alpha_2 = 60°$.

Man bestimme die Normalbeschleunigungen des Wagens, der sich auf dem Bogen mit einer Geschwindigkeit von $v = 36$ km/h bewegt.



Lösung: $b_{n1} = \frac{1}{3}$ m/sec^2; $b_{n2} = \frac{1}{4}$ m/sec^2.

347. Ein Punkt auf einem Schwungradkranz bewegt sich während der beschleunigten Anfahrbewegung nach der Gleichung $s = 0{,}1\, t^3$ (t in sec, s in m). Der Radius des Schwungrades beträgt 2 m.

Es sind die Normal- und die Tangentialbeschleunigung des Punktes für den Augenblick zu bestimmen, in dem seine Geschwindigkeit $v = 30$ m/sec beträgt.

Lösung: $b_n = 450$ m/sec^2; $b_t = 6$ m/sec^2.

348. Ein Punkt bewegt sich auf einem Kreisbogen vom Radius $R = 20$ cm. Die Bewegung erfolgt nach der Gleichung: $s = 20 \sin \pi t$ (t in sec, s in cm).

Es sind Richtung und Größe der Geschwindigkeit zu ermitteln und die Tangential- und Normal- sowie die Gesamtbeschleunigung des Punktes für $t = 5$ sec zu bestimmen.

Lösung: Die Geschwindigkeit hat die Größe 20π cm/sec, ihre Richtung liegt entgegengesetzt zur positiven Winkelrichtung.
$b_t = 0$; $b_n = b = 20\,\pi^2$ cm/sec^2.

349. Eine geradlinige Punktbewegung erfolgt nach der Funktion:

$s = \frac{g}{a^2}(at + e^{-at})$, wobei a und g konstante Werte darstellen.

Es sind die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes und die Beschleunigung desselben in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit zu bestimmen.

Lösung: $v_0 = 0$; $b = g - av$.

350. Eine Punktbewegung ist durch folgende Gleichungen gegeben:

$$x = 10 \cos 2\pi \frac{t}{5}; \quad y = 10 \sin 2\pi \frac{t}{5}$$

(x und y in cm, t in sec). Es sollen die Bewegungsbahn, Größe und Richtung der Geschwindigkeit und Größe und Richtung der Beschleunigung des Punktes ermittelt werden.

Lösung: Die Bewegungsbahn ist ein Kreis vom Radius 10 cm. Die Geschwindigkeit beträgt $v = 4\pi$ cm/sec und ist mit der Tangente gleichgerichtet. Die Beschleunigung $b = 1{,}6\pi^2$ cm/sec^2 ist zum Zentrum hin gerichtet.

351. Eine Punktbewegung wird durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$x = 20\,t^2 + 5; \quad y = 15\,t^2 - 3$$

(t in sec, x und y in cm).

Es sind Größe und Richtung der Geschwindigkeit und der Beschleunigung für $t = 2$ sec und $t = 3$ sec zu ermitteln.

Lösung: Für $t = 2$ sec; $v = 100$ cm/sec;
für $t = 3$ sec; $v = 150$ cm/sec;
$b = \text{const} = 50$ cm/sec^2;
$\cos(v, x) = \cos(b, x) = 0{,}8$;
$\cos(v, y) = \cos(b, y) = 0{,}6$.

352. Eine Punktbewegung ist durch folgende Gleichungen gegeben:

$$x = a\,(e^{kt} + e^{-kt}), \quad y = a\,(e^{kt} - e^{-kt}),$$

wobei a und k konstante Werte sind.

Es sind die Gleichung der Bewegungsbahn, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes als Funktion des Polstrahles $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ zu ermitteln.

Lösung: Hyperbel: $x^2 - y^2 = 4a^2$; $v = kr$; $b = k^2 r$.

353. Es ist der Krümmungsradius der Bewegungsbahn eines Punktes bei Beginn der Bewegung zu ermitteln, wenn die Bewegungsgleichungen folgende Form haben: $x = 2t$, $y = t^2$ (t in sec, x und y in m).

Lösung: $\varrho_0 = 2$ m.

354. Es sind Geschwindigkeit, Beschleunigung, Wegkurve, Geschwindigkeitskurve und Beschleunigungskurve eines Punktes zu bestimmen, dessen Bewegungsgleichungen folgende Form haben:

$$x = a\cos^2 t;\quad y = a\sin^2 t$$

(t in sec, x und y in cm).

Lösung: $v = a\sqrt{2}\,\sin 2t$ cm/sec; $b = b_t = 2a\sqrt{2}\,\cos 2t$ cm/sec^2.

355. Die Bewegungsgleichungen des Kurbelzapfens beim Anfahren einer Dampfmaschine haben folgende Form:

$$x = 75\cos 4t^2,\quad y = 75\sin 4t^2$$

(x und y in cm, t in sec).

Es sind die Geschwindigkeit, die Tangential- und Normalbeschleunigung des Zapfens zu ermitteln.

Lösung: $v = 600\,t$ cm/sec;
$b_t = 600$ cm/sec^2;
$b_n = 4800\,t^2$ cm/sec^2.

356. Es sind die Beschleunigung und der Krümmungsradius der Bewegungsbahn eines Punktes, der eine LISSAJOUS-Figur beschreibt, für $t = 1$ sec zu ermitteln. Die Bewegungsgleichungen haben die Form:

$$x = 4\sin\frac{\pi}{2}t;\quad y = 3\sin\frac{\pi}{2}t$$

(t in sec, x und y in cm).

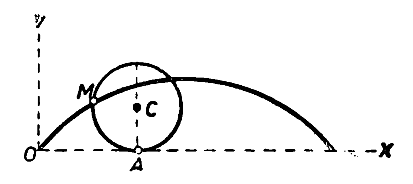
Lösung: $b = 1{,}25\,\pi^2$ cm/sec^2; $\varrho = \infty$.

357. Es ist der Krümmungsradius der Bewegungsbahn eines Punktes für $x = y = 0$ zu bestimmen. Der Punkt beschreibt eine LISSAJOUS-Figur, die folgenden Gleichungen entspricht:

$$x = -a\sin 2\omega t;\quad y = -a\sin\omega t.$$

Lösung: $\varrho = \infty$.

358. Es sind Größe und Richtung der Beschleunigung sowie der Krümmungsradius der Bewegungsbahn eines Radpunktes zu bestimmen. Das Rad rollt auf der waagerechten Achse Ox, wobei der Punkt nach folgenden Bewegungsgleichungen eine Zykloide beschreibt:



$$x = 20t - \sin 20t;\quad y = 1 - \cos 20t$$

(t in sec, x und y in m). Weiterhin soll die Größe des Krümmungsradius für $t = 0$ bestimmt werden.

Lösung: Die Beschleunigung $b = 400$ m/sec^2 hat die Richtung von MC. $\varrho = 2\,MA$; $\varrho_{t=0} = 0$.

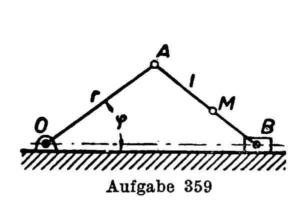
359. Es ist die Bewegungsbahn des Punktes M einer Kurbelstange zu ermitteln, wenn $r = l = 60$ cm, $MB = \frac{1}{3} l$, $\varphi = 4\pi t$ ist. Weiterhin sollen die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes sowie der Krümmungsradius der Bewegung für $\varphi = 0$ bestimmt werden.

Lösung: Ellipse $\frac{x^2}{100^2} + \frac{y^2}{20^2} = 1$; $v = 80\pi$ cm/sec;

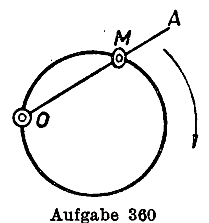
$b = 1600\pi^2$ cm/sec^2; $\varrho = 4$ cm.

360. Auf einem Drahtring vom Radius $R = 10$ cm sitzt ein beweglicher Ring M. Durch den Ring ist eine Stange OA gesteckt, die sich mit konstanter Geschwindigkeit um den Punkt O dreht, der ebenfalls auf dem Kreise liegt. Die Stange legt in 5 Sekunden einen rechten Winkel zurück. Es ist die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung b des Ringes zu ermitteln.

Lösung: $v = 2\pi$ cm/sec; $b = 0{,}4\pi^2$ cm/sec^2.



Aufgabe 359



Aufgabe 360

361. Ein Geschoß wird aus einem Geschütz mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 1600$ m/sec unter einem Winkel von $\alpha_0 = 55°$ abgefeuert. Es ist die theoretische Schußweite und Schußhöhe bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes zu bestimmen. Die Beschleunigung des frei fallenden Körpers beträgt $g = 9{,}81$ m/sec^2.

Lösung: $s = 245$ km; $h = 87{,}5$ km.

362. Es ist zu beweisen, daß sich beim Abweichen des Abschußwinkels vom Winkel größter theoretischer Entfernung ($\alpha = 45°$) um den gleichen Betrag nach oben und unten die gleiche Schußweite ergibt.

363. Eine Punktbewegung ist durch folgende Gleichungen gegeben: $x = v_0 t \cos\alpha_0$, $y = v_0 t \sin\alpha_0 - \frac{1}{2} g t^2$, wobei die Achse Ox horizontal, die Achse Oy senkrecht nach oben gerichtet ist, v_0, g und $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ sind konstante Werte. Es sind zu ermitteln: 1) Punktbewegungsbahn, 2) Koordinate seiner höchsten Lage, 3) Geschwindigkeitsprojektionen auf die Koordinaten in dem Augenblick, in dem der Punkt die Achse Ox schneidet.

Lösung: 1) Parabel $y = x \operatorname{tg}\alpha_0 - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha_0} \cdot x^2$;

2) $x = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha_0$; $y = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha_0$;

3) $v_x = v_0 \cos\alpha_0$; $v_y = \pm v_0 \sin\alpha_0$,

hierbei gilt das obere Vorzeichen für $t = 0$; das untere für die Aufschlagzeit $t = \frac{2 v_0 \sin\alpha_0}{g}$.

364. Eine Punktbewegung sei mit den in voriger Aufgabe gegebenen Gleichungen bestimmt, wobei $v_0 = 20$ m/sec, $\alpha_0 = 60°$, $g = 9{,}81$ m/sec² betragen.

Mit welcher Geschwindigkeit v_1 muß im Augenblick $t = 0$ ein zweiter Punkt den Koordinatenursprung verlassen, damit bei gleichförmiger Bewegung entlang der Achse Ox eine Begegnung mit dem ersten Punkt erfolgt? Weiterhin soll der Abstand x_1 bis zum Begegnungspunkt bestimmt werden.

Lösung: $v_1 = 10$ m/sec; $x_1 = 35{,}3$ m.

365. Von den senkrecht übereinander liegenden Punkten der Höhe h_1, h_2, h_3 aus werden gleichzeitig drei Kugeln mit den Horizontalgeschwindigkeiten von 50, 75 und 100 m/sec Anfangsgeschwindigkeit abgeschossen.

Wie groß müssen die Höhen sein, damit alle drei Kugeln gleichzeitig aufschlagen? Die erste Kugel erreicht eine Schußweite von 100 m. Wie lange fliegen die Kugeln, und mit welcher Geschwindigkeit schlagen sie auf den Boden auf?

Lösung: $h_1 = h_2 = h_3 = 19{,}62$ m; $T = 2$ sec;
$v_1 = 53{,}71$ m/sec; $v_2 = 77{,}52$ m/sec; $v_3 = 101{,}95$ m/sec.

366. Aus einem Geschütz wird ein Geschoß mit einer Geschwindigkeit von 500 m/sec unter 30° abgefeuert.

Mit der Annahme, daß auf das Geschoß nur die Erdbeschleunigung von $g = 9{,}81$ m/sec² wirkt, ist der Geschwindigkeitshodograph des Geschosses und die Punktgeschwindigkeit v_1, die den Hodographen zeichnet, zu ermitteln.

Lösung: Der Hodograph bildet eine senkrechte Gerade, die vom Koordinatenursprung einen Abstand von 432 m aufweist; $v_1 = 9{,}81$ m/sec².

367. Eine Geschoßbewegung wird durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$x = v_0 t \cos \alpha_0, \quad y = v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} g t^2,$$

wobei v_0 und α_0 konstante Werte darstellen. Es sind die Krümmungsradien der Bewegungsbahn für $t = 0$ und für den Augenblick des Aufschlages zu ermitteln.

Lösung: $\varrho = \dfrac{v_0^2}{g \cos \alpha_0}$.

368. Ein Geschoß bewegt sich in senkrechter Ebene nach folgenden Gleichungen: $x = 300\,t$, $y = 400\,t - 5t^2$ (t in sec, x, y in m).

Es sind zu ermitteln:

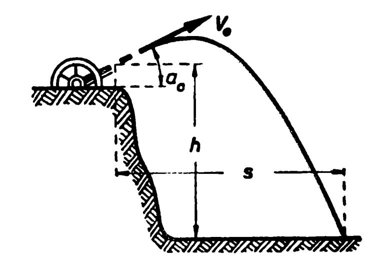
1) Geschwindigkeit und Beschleunigung für $t = 0$.
2) Schußhöhe und Schußweite,
3) Krümmungsradius der Geschoßbahn im Anfangs- und Kulminationspunkt.

Lösung: $v_0 = 500$ m/sec; $b = 10$ m/sec²; $h = 8$ km;
$s = 24$ km; $\varrho_0 = 41{,}67$ km; $\varrho = 9$ km.

369. Es ist die Bewegung eines Geschosses (Bewegungsgleichungen, Bewegungsbahn, Schußhöhe und Schußweite) zu bestimmen. Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt $v_0 = 1000$ m/sec, sie bildet mit der Waagerechten einen Winkel von $\alpha_0 = 60°$, $g = 9{,}81$ m/sec^2.

Lösung: $x = 500\,t$; $y = 866\,t - 4{,}905\,t^2$;
$y = 1{,}732\,x - 10^{-8} \cdot 1962\,x^2$;
$h = 38{,}24$ km; $s = 88{,}3$ km.

370. Aus dem Geschütz einer Küstenbatterie, das $h = 30$ m über dem Meeresspiegel steht, wird ein Geschoß unter dem Winkel $\alpha_0 = 45°$ mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 1000$ m/sec abgefeuert.



In welchem Abstand vom Geschütz trifft das Geschoß auf das Meer auf? Der Luftwiderstand ist zu vernachlässigen.

Lösung: 102 km.

371. Zu ermitteln sind die Tangential- und die Normalbeschleunigung eines Punktes, dessen Bewegung durch folgende Gleichungen bestimmt ist: $x = \alpha\, t$, $y = \beta t - \frac{gt^2}{2}$.

Lösung: $b_t = -\frac{g\,(\beta - gt)}{v}$; $b_n = -\frac{g\,\alpha}{v}$, wobei v die Punktgeschwindigkeit darstellt.

372. Nach dem Verlassen der Bahnstation steigt die Zuggeschwindigkeit eines D-Zuges gleichförmig an, um nach drei Minuten einen Wert von 72 km/h zu erreichen. Die dabei befahrene Strecke hat eine Krümmung vom Radius 800 m. Es sind die Tangential-, die Normal- und die Gesamtbeschleunigung des Zuges nach zwei Minuten Fahrzeit zu ermitteln.

Lösung: $b_t = \frac{1}{9}$ m/sec^2; $b_n = \frac{2}{9}$ m/sec^2; $b = 0{,}25$ m/sec^2.

373. Ein Punkt führt eine gleichmäßige Schraubenbewegung aus. Die Gleichungen dafür sind: $x = 2\cos 4\,t$, $y = 2\sin 4\,t$, $z = 2\,t$, wobei als Maßeinheit m angenommen ist.
Es ist der Krümmungsradius der Bewegungsbahn zu ermitteln.

Lösung: $\varrho = 2\frac{1}{8}$ m.

374. Die Bewegung eines Massenpunktes in Polarkoordinaten ist durch folgende Gleichungen gegeben: $r = ae^{kt}$ und $\varphi = kt$, wobei a und k konstant sind. Es sind die Bahngleichung, die Geschwindigkeit, die Beschleunigung und der Krümmungsradius eines Punktes der Bewegungsbahn als Funktionen seines Ortsvektors r zu ermitteln.

Lösung: $r = a\,e^{\varphi}$ — Logarithmische Spirale;
$v = k\,r\sqrt{2}$; $b = 2\,k^2 r$; $\varrho = r\sqrt{2}$.

IV. Elementarbewegung starrer Körper

13. Drehung des starren Körpers um eine feste Achse

375. Es sind die Winkelgeschwindigkeiten für 1) den Sekundenzeiger, 2) den Minutenzeiger, 3) den Stundenzeiger einer Uhr, 4) die Drehung der Erde um ihre Achse, 5) einer Lavalturbine mit 15000 U/min zu bestimmen.

Lösung: 1) $\omega = \frac{\pi}{30}\,\text{sec}^{-1} = 0{,}1047\,\text{sec}^{-1}$;

2) $\omega = \frac{\pi}{1800}\,\text{sec}^{-1} = 0{,}001745\,\text{sec}^{-1}$;

3) $\omega = \frac{\pi}{21600}\,\text{sec}^{-1} = 0{,}0001455\,\text{sec}^{-1}$;

4) $\omega = \frac{\pi}{43200}\,\text{sec}^{-1} = 0{,}0000727\,\text{sec}^{-1}$;

5) $\omega = 1571\,\text{sec}^{-1}$.

376. Es ist die Bewegungsgleichung einer Dampfturbinenscheibe beim Anfahren aufzustellen. Der Drehwinkel ist der dritten Potenz der Zeit proportional. Bei $t = 3$ sec beträgt $n = 810$ U/min.

Lösung: $\varphi = \pi t^3$ Bg; t in sec.

377. Das Pendel eines Zentrifugalreglers nach WATT, der sich um die vertikale Achse AB mit $n = 120$ U/min dreht, hat zur Zeit $t = 0$ einen Drehwinkel $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$.

Es sind der absolute Drehwinkel φ und die Winkeldifferenz des Pendels nach $^1/_2$ sec zu bestimmen.

Lösung: $\varphi = \frac{13}{6}\pi$; $\Delta\varphi = 2\pi$.

378. Ein Körper, der aus der Ruhestellung eine gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung beginnt, hat sich nach 2 min 3600mal gedreht.

Es ist die Winkelbeschleunigung zu ermitteln.

Lösung: $\varepsilon = \pi\,\text{sec}^{-2}$.

379. Eine Welle, die aus der Ruhestellung eine gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung beginnt, hat sich nach 5 sec 12,5mal gedreht.

Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit nach 5 sec?

Lösung: $\omega = 5$ U/sec $= 10\,\pi\,\text{sec}^{-1}$.

380. Ein Schwungrad, das aus der Ruhestellung eine gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung beginnt, hat nach Verlauf von 10 min eine Winkelgeschwindigkeit, der 120 U/min entsprechen.

Wieviel Umdrehungen macht es in 10 min?

Lösung: 600 Umdrehungen.

381. Ein Rad mit einer starren Achse hat eine Anfangswinkelgeschwindigkeit von 2π sec^{-1}. Nach 10 Umdrehungen bleibt es durch Achsenreibung stehen.

Es ist die Winkelverzögerung des Rades, die als konstant angenommen werden soll, zu bestimmen.

Lösung: $\varepsilon = 0{,}1\,\pi$ sec^{-2}, Verzögerung.

382. Im Augenblick der Motorabschaltung dreht sich eine Flugzeugschraube mit einer Drehzahl von $n = 1200$ U/min und macht bis zum Stillstand noch 80 Umdrehungen.

Wie lange dauert es vom Augenblick der Abschaltung bis zum Stillstand des Motors, bei einer gleichmäßigen Verzögerung der Schraube?

Lösung: 8 sec.

383. Ein Körper führt Schwingungen um eine starre Achse aus. Der Ausschlagwinkel ist durch die Gleichung: $\varphi = 20^\circ \sin\psi$ bestimmt. Der Winkel ψ ist in Winkelgrad durch $\psi = 2\,t$ ausgedrückt; mit t wird die Zeit bezeichnet.

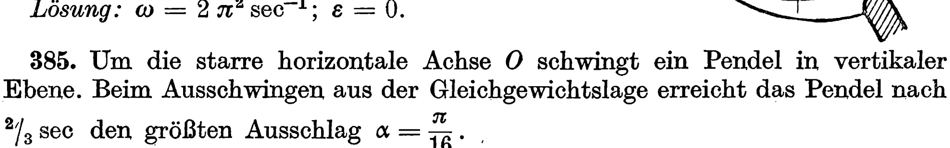
Es sind die Winkelgeschwindigkeit des Körpers im Moment $t = 0$, die Zeitpunkte t_1 und t_2, in denen sich die Drehrichtung ändert, und die Schwingungsdauer T zu ermitteln.

Lösung: $\omega = \frac{1}{810}\pi^2$ sec^{-1}; $t_1 = 45$ sec; $t_2 = 135$ sec; $T = 180$ sec.

384. Die Unruhe einer Uhr führt harmonische Drehschwingungen mit einer Periode $T = {}^1/_2$ sec aus. Der größte Ausschlagswinkel aus der Gleichgewichtslage ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Es sind die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung der Unruhe 2 sec nach dem Durchlaufen der Gleichgewichtslage zu ermitteln.

Lösung: $\omega = 2\,\pi^2$ sec^{-1}; $\varepsilon = 0$.



385. Um die starre horizontale Achse O schwingt ein Pendel in vertikaler Ebene. Beim Ausschwingen aus der Gleichgewichtslage erreicht das Pendel nach ${}^2/_3$ sec den größten Ausschlag $\alpha = \frac{\pi}{16}$.

1) Es ist die Schwingungsgleichung des Pendels unter der Annahme aufzustellen, daß es harmonisch schwingt.
2) In welchem Punkt wird das Pendel die größte Winkelgeschwindigkeit erreichen und wie groß ist diese?

Lösung: 1) $\varphi = \frac{\pi}{16}\sin\frac{3}{4}\pi t$; 2) in senkrechter Lage; $\omega = \frac{3}{64}\pi^2$ sec^{-1}.

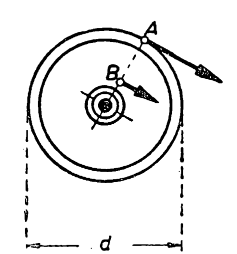
386. Es ist die Geschwindigkeit v und die Zentripetalbeschleunigung eines Punktes, der sich auf der Erdoberfläche in Leningrad befindet, zu ermitteln. Die Drehung der Erde um ihre eigene Achse ist zu berücksichtigen. Leningrad liegt auf dem 60. Breitengrad; Erdradius $\varrho = 6370$ km.

Lösung: $v = 0{,}232$ km/sec; $b = 0{,}0169$ m/sec^2.

387. Ein Schwungrad vom Radius 0,5 m dreht sich gleichmäßig um seine Achse. Die Geschwindigkeit von Punkten, die auf seinem Kranz liegen, beträgt 2 m/sec. Wieviel Umdrehungen pro Minute macht das Rad?

Lösung: $n = 38{,}2$ U/min.

388. Ein Punkt A, der auf dem Kranz einer Scheibe liegt, bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 50 cm/sec. Ein anderer Punkt B, der auf einem Radius durch den Punkt A angenommen wird, bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 10 cm/sec. Der Abstand AB beträgt 20 cm. Es sind die Winkelgeschwindigkeit und der Scheibendurchmesser zu ermitteln.



Lösung: $\omega = 2$ sec^{-1}; $d = 50$ cm.

389. Ein Schwungrad vom Radius $R = 2$ m beginnt aus dem Ruhezustand eine gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung. Nach $t = 10$ sec haben die Punkte, die auf dem Kranz liegen, eine Umfangsgeschwindigkeit $v = 100$ m/sec erreicht.

Es sind die Geschwindigkeit, die Zentripetal- und Tangentialbeschleunigung eines Punktes auf dem Kranz nach $t = 15$ sec zu ermitteln.

Lösung: $v = 150$ m/sec; $b_n = 11\,250$ m/sec^2; $b_t = 10$ m/sec^2.

390. Es ist die Horizontalgeschwindigkeit v zu ermitteln, die man einem Körper am Äquator geben muß, damit er bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes auf einer Kreisbahn frei um die Erde fliegt. Es ist auch die Zeit T zu bestimmen, die der Körper braucht, um in seine Ausgangsstellung zurückzukehren. Erdradius $R = 637 \cdot 10^6$ cm, die Schwerpunktsbeschleunigung am Äquator ist $g = 978$ cm/sec^2.

Lösung: $v = 7{,}9$ km/sec; $T = 1{,}4\,h$.

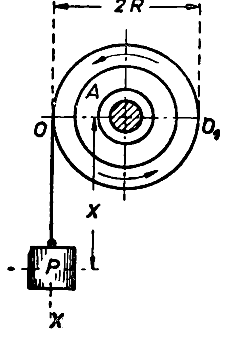
391. Der Neigungswinkel des Beschleunigungsvektors eines Punktes des Schwungradreifens zum Radius ist 60°. Die Tangentialbeschleunigung des Punktes im gegebenen Augenblick beträgt

$$b_t = 10\sqrt{3}\ \text{m/sec}^2.$$

Es ist die Normalbeschleunigung eines anderen Punktes, dessen Abstand von der Drehachse $r = 0{,}5$ m ist, zu ermitteln. Der Schwungradradius ist $R = 1$ m.

Lösung: $b_n = 5$ m/sec^2.

392. Eine Welle A vom Radius $R = 10$ cm wird durch eine Last P zum Drehen gebracht. Die Last hängt an einem Seil. Die Lastbewegung wird durch folgende Gleichung ausgedrückt: $x = 100\,t^2$, wobei x der Abstand der Last von der Horizontalen OO_1 in cm und t in sec ausgedrückt ist.



Es sind die Winkelgeschwindigkeit ω und die Winkelbeschleunigung ε der Welle sowie die Beschleunigung b eines Punktes auf der Welle in einem beliebigen Augenblick t zu ermitteln.

Lösung: $\omega = 20\,t\ \text{sec}^{-1}$; $\varepsilon = 20\ \text{sec}^{-2}$;
$b = 200\sqrt{1 + 400\,t^4}\ \text{cm/sec}^2$.

393. Um einen Radreifen mit horizontaler Achse ist eine Schnur gewickelt, an deren einem Ende eine Last P hängt. In einem beliebigen Augenblick beginnt die Last mit einer konstanten Beschleunigung b_0 zu fallen, wobei das Rad in Drehung versetzt wird.

Es ist die Beschleunigung eines Radreifenpunktes als Funktion der Höhe h, auf die die Last herabsinkt, zu ermitteln. Der Radradius ist R, die Anfangsgeschwindigkeit der Last $v_0 = 0$.

Lösung: $b = \frac{b_0}{R}\sqrt{R^2 + 4h^2}$.

394. Eine Kugel A, die an einer Schnur von $l = 398$ cm Länge hängt, schwingt in vertikaler Ebene um eine starre horizontale Achse O (Mathem. Pendel). Es gilt dafür die Beziehung:

$$\varphi = \frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{2}t;\quad (\varphi \text{ in Bg};\ t \text{ in sec}).$$

Es sind zu ermitteln: 1) der nächste Zeitpunkt nach Bewegungsbeginn, bei dem die Normalbeschleunigung der Kugel $b_n = 0$ ist; 2) der nächste Zeitpunkt, bei dem die Tangentialbeschleunigung der Kugel $b_t = 0$ ist; 3) die gesamte Kugelbeschleunigung bei $t = 1/2$ sec.

Lösung: 1) $t = 1$ sec; 2) $t = 2$ sec; 3) $b = 282{,}95\ \text{cm/sec}^2$.

14. Übertragung von Elementarbewegungen starrer Körper

395. Ein Zahnrad I mit Innenverzahnung vom Durchmesser $D_1 = 360$ mm hat die Drehzahl $n_1 = 100$ U/min.

Wie groß muß der Durchmesser vom Zahnrad II sein, das mit Zahnrad I durch Innenverzahnung gekoppelt ist und 300 U/min machen soll?

Lösung: $D_2 = 120$ mm.

396. Ein Reduziergetriebe überträgt ein Moment von Welle I auf Welle II. Es besteht aus vier Zahnrädern mit den Zähnezahlen $z_1 = 10$, $z_2 = 60$, $z_3 = 12$, $z_4 = 70$.

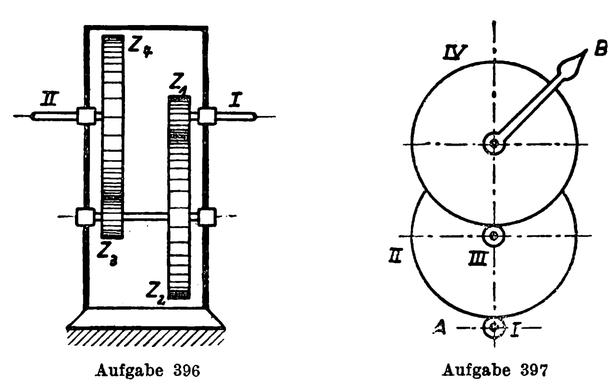
Es ist das Übersetzungsverhältnis des Getriebes zu ermitteln.

Lösung: $k = \frac{1}{35}$.

397. Das Zahnradgetriebe einer Uhr besteht zwischen Sekundenzeiger A und Minutenzeiger B aus vier Zahnrädern mit folgenden Zähnezahlen: $z_1 = 8$, $z_2 = 60$, $z_4 = 64$.

Es ist die Zähnezahl des Zahnrades III zu bestimmen.

Lösung: $z_3 = 8$.



Aufgabe 396 Aufgabe 397

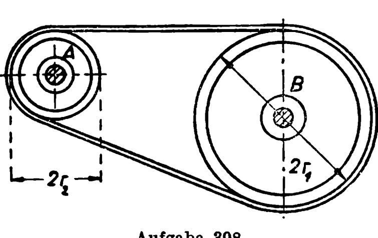
398. Eine Dynamomaschine wird durch einen Riementrieb von der Scheibe B einer Dampfmaschine angetrieben. Die Scheibenradien sind: $r_1 = 75$ cm, $r_2 = 30$ cm. Nach erfolgter Inbetriebsetzung der Dampfmaschine beträgt ihre Winkelbeschleunigung $0{,}4\,\pi\,\text{sec}^{-2}$. Das Gleiten des Riemens auf den Scheiben wird außer acht gelassen.

Nach welcher Zeit hat die Dynamomaschine eine Drehzahl von $n = 300$ U/min erreicht?

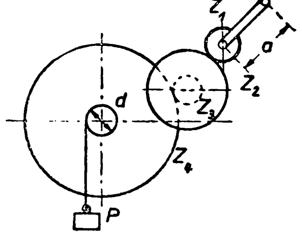
Lösung: 10 sec.

399. Mit der gezeichneten Winde wird durch Drehen am Handgriff a eine Last P gehoben. Durch einen Bremsenschaden beginnt die Last plötzlich zu sinken. Die Gleichung der Lastbewegung lautet: $x = 5\,t^2$ cm (t in sec). Die Achse Ox ist entlang des Seiles nach unten gerichtet, der Trommeldurchmesser d beträgt 200 mm. Die Zähnezahlen der Zahnräder an der Winde sind: $z_1 = 13$, $z_2 = 39$, $z_3 = 11$, $z_4 = 77$. Wie groß sind die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Handgriffendes mit der Länge $a = 400$ mm 2 Sekunden nach dem Bewegungsbeginn?

Lösung: $v = 16{,}80$ m/sec; $b = 705{,}60\ \text{m/sec}^2$.



Aufgabe 398



Aufgabe 399

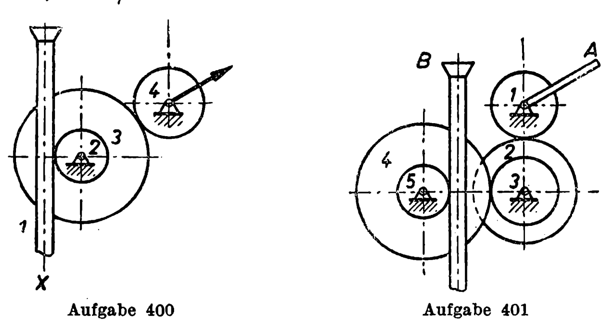
400. Bei einer Meßuhr wird die Bewegung durch die Zahnstange des Meßstiftes 1 auf das Zahnrad 2 übertragen, das mit dem Zahnrad 3 verbunden ist. Zahnrad 3 steht im Eingriff mit Zahnrad 4, Zahnrad 4 trägt den Zeiger. Es ist die Winkelgeschwindigkeit des Zeigers zu ermitteln, wenn die Stiftbewegung durch die Gleichung $x = a \sin kt$ gegeben ist und die Zahnradradien r_2, r_3 und r_4 sind.

Lösung: $\omega_4 = \frac{r_3}{r_2 r_4} ak \cos kt.$

401. Beim Drehen des Griffes A eines Wagenhebers drehen sich die Zahnräder 1, 2, 3, 4 und 5 und bewegen die Zahnstange B.

Es ist die Hubgeschwindigkeit zu ermitteln, wenn man mit dem Handgriff A 30 U/min vollbringt. Die Zähnezahlen der Zahnräder sind: $z_1 = 6$, $z_2 = 24$, $z_3 = 8$, $z_4 = 32$; der Radius vom 5. Zahnrad ist $r_5 = 4$ cm.

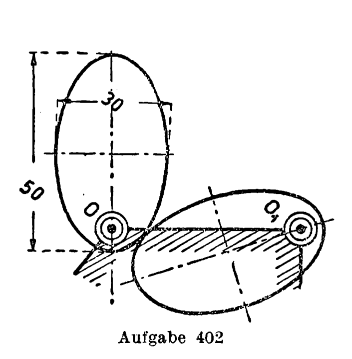
Lösung: $v_B = 7{,}8$ mm/sec.



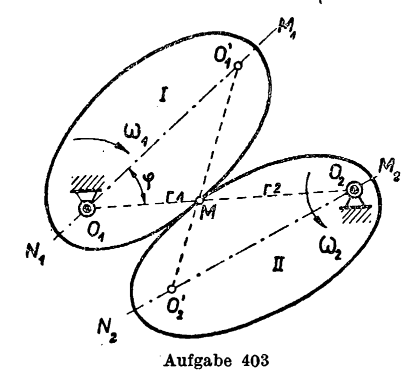
Aufgabe 400 Aufgabe 401

402. Um periodisch veränderliche Winkelgeschwindigkeiten zu erhalten, sind zwei gleiche elliptische Zahnräder miteinander im Eingriff, von denen sich eines gleichmäßig um die Achse O mit 270 U/min dreht und dadurch das zweite Rad um die Achse O_1 bewegt. Die Achsen O und O_1 sind parallel und gehen durch den Ellipsenbrennpunkt hindurch. Der Abstand OO_1 beträgt 50 cm. Die Halbachsen der Ellipsen sind 25 und 15 cm lang. Es ist die niedrigste und die höchste Winkelgeschwindigkeit des Rades O_1 zu ermitteln.

Lösung: $\omega_{\min} = \pi \sec^{-1}$; $\omega_{\max} = 81 \pi \sec^{-1}$.



Aufgabe 402

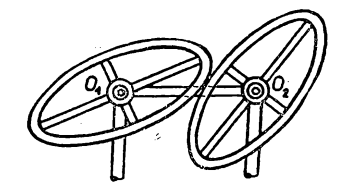


Aufgabe 403

403. Es ist eine Formel für die Drehübertragung eines elliptischen Zahnradpaares mit den Halbachsen a und b aufzustellen. Die Winkelgeschwindigkeit des Rades I ist konstant. Der Achsenabstand O_1O_2 beträgt $2a$; φ ist der Winkel, den die Verbindungsgerade der Drehachsen mit der großen Achse eines elliptischen Rades einschließt. Die Achsen liegen in den Brennpunkten der Ellipsen.

Lösung: $\omega_2 = \omega_1 \dfrac{a^2 - c^2}{a^2 - 2ac\cos\varphi + c^2}$,
wobei $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ die lineare Exzentrizität der Ellipsen ist.

404. Es sind die größte und die kleinste Winkelgeschwindigkeit des ovalen Rades O_2, das mit Rad O_1 verbunden ist, zu ermitteln. Die Drehzahl des Rades O_1 ist $n_1 = 240$ U/min. Die Räderdrehachsen befinden sich in den Ellipsenmittelpunkten. Der Achsabstand beträgt 50 cm. Die Ellipsenhalbachsen sind 40 und 10 cm lang.



Lösung: $\omega_{\min} = 2\pi\,\sec^{-1}$; $\omega_{\max} = 32\pi\,\sec^{-1}$.

405. Es ist zu ermitteln, nach welcher Zeitdauer ein Kegelrad O_1 mit dem Radius $r_1 = 10$ cm eine Winkelgeschwindigkeit erreicht, der $n_1 = 4320$ U/min entsprechen, wenn es aus der Ruhestellung von einem Kegelrad O_2 mit dem Radius $r_2 = 15$ cm angetrieben wird. Das Kegelrad O_2 hat eine gleichmäßige Winkelbeschleunigung von $2\,\sec^{-2}$.

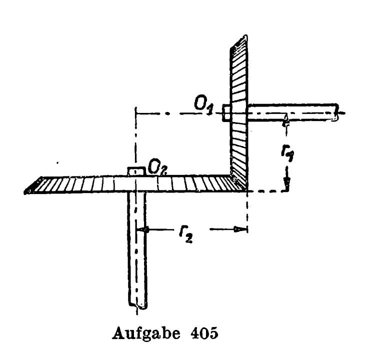
Lösung: $t = 24$ sec.

406. Die Führungswelle I eines Friktionsgetriebes mit 600 U/min verschiebt sich während des Drehens (die Richtung ist auf der Zeichnung durch Pfeil angegeben) so, daß der Abstand d nach $d = (10 - 0{,}5\,t)$ cm (t in sec) verändert wird.

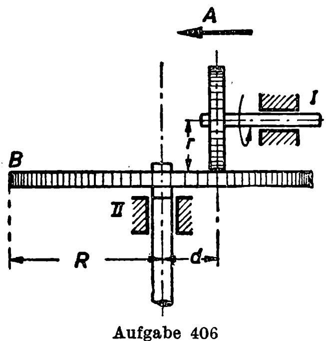
Es sind zu ermitteln: 1) die Winkelbeschleunigung der Welle II als Funktion des Abstandes d, 2) die gesamte Beschleunigung eines Punktes auf dem Radreifen B im Augenblick, wenn $d = r$ ist. Die Radien der Friktionsräder sind gegeben zu $r = 5$ cm, $R = 15$ cm.

Lösung: 1) $\varepsilon = \dfrac{50\pi}{d^2}\,\sec^{-2}$;

2) $b = 30\pi\sqrt{40\,000\,\pi^2 + 1}$ cm/sec^2.



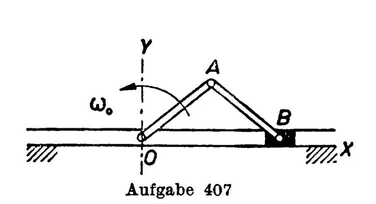
Aufgabe 405



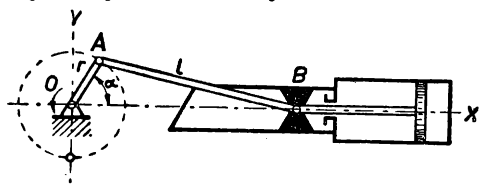
Aufgabe 406

407. Es sind die Gleichungen der Geschwindigkeit und Beschleunigung des Gleitstückes B eines Kurbelmechanismus OAB zu ermitteln, wenn das Pleuel und die Kurbel von gleicher Länge sind: $AB = OA = r$. Die Kurbel OA dreht sich gleichförmig um die Welle O mit $\omega = \omega_0$. Die Achse Ox ist nach rechts gerichtet. Der Koordinatenursprung liegt im Kurbelzentrum O.

Lösung: $x = 2\,r\cos\omega_0 t$; $v_x = -2\,r\,\omega_0 \sin\omega_0 t$; $b_x = -\omega_0^2\,x$.



Aufgabe 407

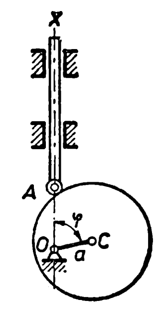


Aufgabe 408

408. Es sind die Gleichungen der Geschwindigkeit und Beschleunigung des Gleitstückes B eines Kurbelmechanismus zu ermitteln, wenn die Kurbel OA sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 dreht. Die Kurbellänge OA ist r, die Pleuellänge AB ist l. Die Achse Ox ist nach rechts gerichtet. Der Koordinatenursprung liegt im Kurbelzentrum O. Das Verhältnis $\frac{r}{l} = \lambda$ ist viel kleiner als 1 ($\lambda \ll 1$); $\alpha = \omega_0 t$.

Lösung:
$$x = r\left(\cos\omega_0 t + \frac{\lambda}{4}\cos 2\,\omega_0 t\right) + 1 - \frac{\lambda}{4}\,r;$$
$$v_x = -r\,\omega_0\left(\sin\omega_0 t + \frac{\lambda}{2}\sin 2\,\omega_0 t\right);$$
$$b_x = -r\,\omega_0^2\,(\cos\omega_0 t + \lambda\cos 2\,\omega_0 t).$$

409. Es ist das Bewegungsgesetz der gezeichneten Stange zu ermitteln. Der Exzenterdurchmesser ist $d = 2\,r$, der Punkt O des Exzenters ist vom Scheibenmittelpunkt C um $OC = a$ entfernt. Die x-Koordinate läuft entlang der Stange. Der Koordinatenursprung liegt in O; $\frac{a}{r} = \lambda$. Der Durchmesser $2\,\varrho$ der Abgriffsrolle ist zu vernachlässigen.



Lösung: $x = a\cos\varphi + r\sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\varphi}$.

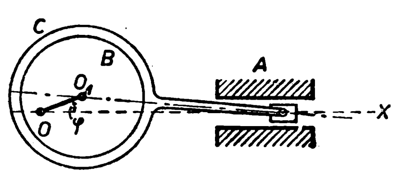
Bei Berücksichtigung von ϱ tritt in der Lösung an der Stelle von r $r + \varrho$ und $\lambda = \frac{a}{r+\varrho}$.

410. Es sind das Bewegungsgesetz und die Verschiebung vom Kreuzkopf A zu ermitteln, der durch ein Gelenk mit der Schelle C, die einen Exzenter umschließt, verbunden ist. Der Mittelpunkt des Exzenters B befindet sich im Punkt O_1; O ist der Drehpunkt des Exzenters. Gegeben sind: $OO_1 = 10$ cm, $O_1A = 50$ cm. Die positive Achse Ox zeigt nach rechts. Der Koordinatenursprung liegt im Punkt O.

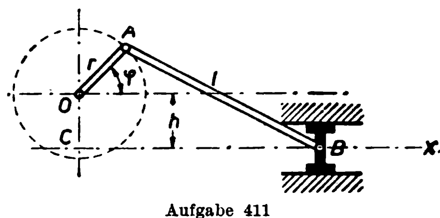
Lösung: $x = 10\left(\cos\varphi + \sqrt{25 - \sin^2\varphi}\right)$ cm; $s = 20$ cm.

411. Es ist die Bewegungsgleichung des Kolbens eines nicht zentralen Kurbelmechanismus aufzustellen. Der Abstand von der Drehachse der Kurbel bis zur Führung ist h, die Kurbellänge r, die Pleuellänge l, die Achse Ox verläuft parallel zur Kreuzkopfführung. Der Koordinatenursprung liegt in der äußersten rechten Lage des Kreuzkopfes; $\frac{l}{r} = \lambda$, $\frac{h}{r} = k$, $\varphi = \omega_0 t$.

Lösung: $x = r\left[\sqrt{(\lambda + 1)^2 - k^2} - \sqrt{\lambda^2 - (\sin\varphi + k)^2} - \cos\varphi\right]$.

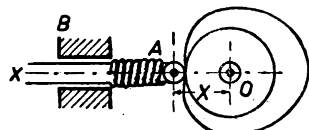


Aufgabe 410



Aufgabe 411

412. Es ist der Umriß eines Nockens festzustellen, der eine oszillierende Bewegung des Stößels AB erzwingt. Die Bewegungsgleichung der Stange lautet: $x = 5\,t + 30$ (x in cm, t in sec). Der Nocken dreht sich mit $n = 7{,}5$ U/min. Der Durchmesser der Abgriffsrolle ist zu vernachlässigen.



Lösung: $r = \frac{20}{\pi}\varphi + 30$ (Archimedische Spirale).

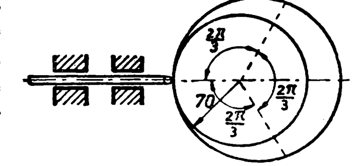
413. Es ist die Geschwindigkeit einer gleichmäßigen Stößelbewegung zu ermitteln, wenn die Gleichung vom Nockenumriß gegeben ist.

$$r = \frac{15}{\pi}\varphi + 25 \text{ cm}.$$

Der Nocken läuft mit der Drehzahl $n = 20$ U/min.

Lösung: $v = 10$ cm/sec.

414. Es ist die Gleichung des Nockenumrisses aufzustellen, bei dem der volle Hub $h = 20$ cm einem Drittel der Umdrehung entspricht. Der Hub in dieser Zeit ist proportional dem Drehwinkel anzunehmen. Im zweiten Nockendrittel soll der Stößel unbeweglich bleiben und im letzten Drittel der Nocken bei gleichen Bedingungen wie beim ersten Drittel die Rückbewegung des Stößels erzeugen. Der geringste Abstand vom Stößelende bis zum Nockendrehpunkt beträgt 70 cm. Der Nocken führt 20 U/min aus.



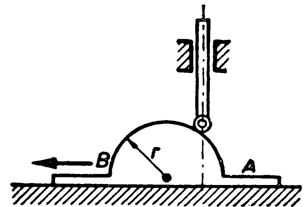
Lösung: Der Nockenumriß stellt im ersten Drittel eine archimedische Spirale dar

$$r = \left(\frac{30}{\pi}\varphi + 70\right) \text{ cm}.$$

Im zweiten Drittel ist er ein Kreis mit dem Radius $r = 90$ cm, im letzten Drittel wieder eine archimedische Spirale

$$r = \left(90 - \frac{30}{\pi}\varphi\right) \text{ cm}.$$

415. Um welchen Betrag sinkt der Stößel in $t = 3$ sec, der mit einem Ende auf einem Nocken vom Radius $r = 30$ cm aufliegt. Der Nocken führt oszillierende Bewegungen mit einer Geschwindigkeit $v = 5$ cm/sec aus. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der Stößel in seiner höchsten Lage. Der Durchmesser 2ϱ der Abgriffsrolle ist zu vernachlässigen. Wenn er berücksichtigt werden soll, ist statt r $r + \varrho$ zu setzen.



Lösung: $h = 4{,}020$ cm.

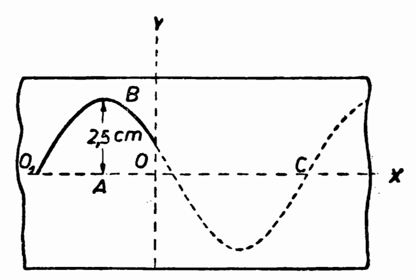
416. Es ist die Beschleunigung eines sich hin und her bewegenden kreisförmigen Nockens zu ermitteln. Bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung aus der Ruhelage senkt sich ein Stößel in 4 sec von seiner höchsten Lage auf $h = 4$ cm. Der Radius des Kreisnockens beträgt $r = 10$ cm (siehe Zeichnung zur Aufgabe 415).

Lösung: $b = 1$ cm/sec^2.

V. Zusammensetzen und Zerlegen von Punktbewegungen

15. Bewegungsgleichung und Bewegungsbahn zusammengesetzter Punktbewegung

417. Ein Schreibstreifen, der zur Registrierung von Schwingungen dient, bewegt sich in Richtung Ox mit einer Geschwindigkeit von 2 m/sec. Ein längs der Achse Oy schwingender Körper zeichnet auf dem Streifen Sinuskurven auf, deren größte Ordinate $AB = 2{,}5$ cm und deren Periode $O_1C = 8$ cm betragen.



Es ist die Gleichung der schwingenden Körperbewegung zu ermitteln unter der Annahme, daß der Punkt O_1 bei $t = 0$ durchlaufen wird.

Lösung: $y = 2{,}5 \sin (50\,\pi\, t)$ cm.

418. Es sind die Bewegungsgleichung und die Bewegungsbahn eines frei fallenden Körpers gegenüber einer senkrechten Platte, die sich mit konstanter waagerechter Geschwindigkeit bewegt, zu bestimmen. Bei Beginn der Bewegung befand sich der frei fallende Körper im Koordinatenursprung, seine Geschwindigkeit war $v = 0$.

Lösung: $\xi = -ut;\ \eta = \frac{gt^2}{2};\ \eta = \frac{g\,\xi^2}{2\,u^2}$ (Parabel).

Die Achsen $O\,\xi$ und $O\,\eta$ liegen auf der Platte. Die Achse $O\,\xi$ ist horizontal in Richtung der Plattenbewegung, die Achse $O\,\eta$ senkrecht nach unten gerichtet.

419. Ein gefederter Straßenbahnwagen bewegt sich auf einer geraden horizontalen Strecke mit einer Geschwindigkeit $v = 18$ km/h, wobei der Wagen auf den Federn Schwingungen der Amplitude $a = 0{,}8$ cm und der Schwingungsperiode $T = 0{,}5$ sec ausführt. Es ist die Gleichung der Bewegungsbahn des Wagenschwerpunktes zu ermitteln, wenn sein mittlerer Abstand vom Fahrgleis $h = 1{,}5$ m beträgt. Bei $t = 0$ liegt der Schwerpunkt in der mittleren Lage. Seine Schwingungsgeschwindigkeit ist dabei nach oben gerichtet. Die Schiene bildet die Achse Ox.

Lösung: $y = 1{,}5 + 0{,}008 \sin 0{,}8\,\pi\, x$.

420. Es ist die Gleichung der Bewegungsbahn eines Doppelpendels zu bestimmen, das gleichzeitig zwei aufeinander senkrecht stehende harmonische Schwingungen gleicher Frequenz und verschiedener Amplituden und Phasen ausführt. Die genannten Schwingungsgleichungen haben folgende Form: $x = a \sin(\omega t + \alpha)$, $y = b \sin(\omega t + \beta)$.

Lösung:

Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha - \beta)$.

421. Das Ende eines Doppelpendels beschreibt eine LISSAJOUS-Figur. Diese setzt sich aus senkrecht aufeinander stehenden harmonischen Schwingungen zusammen: $x = a \sin 2\omega t$, $y = a \sin \omega t$.

Es ist die Gleichung der Bewegungsbahn zu ermitteln.

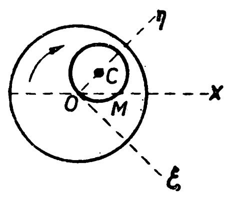
Lösung: $a^2x^2 = 4y^2(a^2 - y^2)$.

422. Ein Eisenbahnzug bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 30 km/h. Die Signallaterne, die am letzten Wagen angebracht ist, reißt sich von der Befestigung los und fällt herunter.

Es sind die Bewegungsbahn der absoluten Laternenbewegung und die während des Falles vom Zug zurückgelegte Streckenlänge s zu ermitteln. Die Laterne fällt aus einer Höhe $h = 4{,}905$ m über der Erde herab. Die Koordinatenachsen gehen durch die Anfangslage der Laterne, die Achse Ox verläuft in Federrichtung horizontal, die Achse Oy senkrecht nach unten.

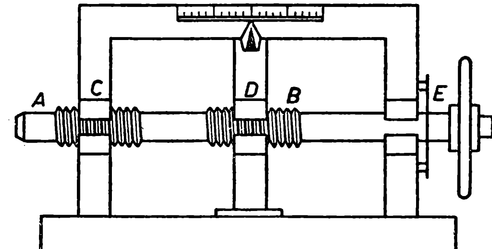
Lösung: Parabel mit senkrechter Achse: $y = 0{,}0706\, x^2$; $s = 8\frac{1}{3}$ m (x und y in Meter).

423. Ein Punkt M führt Bewegungen nach dem Gesetz $x = a \sin \omega t$ aus. Es ist die Bewegungsgleichung des Punktes gegenüber der Scheibe, die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse O dreht, zu ermitteln. Der Punkt M läuft über O hinaus.



Lösung: $\xi^2 + \left(\eta - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$ $\left(\text{Kreis vom Radius } \frac{a}{2} \text{ mit dem Mittelpunkt C}\right)$.

424. In einigen Meß- und Teilungsgeräten wird der Anzeiger durch eine Differentialschraube bewegt. Die Achse AB trägt bei A ein Gewinde der Steigung h_1 mm und bei B ein Gewinde der Steigung $h_2 < h_1$. Das Gewinde A dreht sich in einer festen Mutter C. Das Gewinde B kann den seitlich verschiebbaren Zeiger D bewegen.

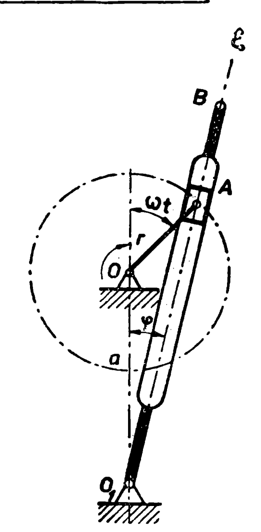


Es ist die Verschiebung des Zeigers beim Drehen der Handradachse um $1/n$ Umdrehungen zu ermitteln, wenn $n = 200$, $h_1 = 0{,}5$ mm und $h_2 = 0{,}4$ mm beträgt. 1) Bei A befindet sich ein Linksgewinde, bei B ein Rechtsgewinde. 2) Beide Gewinde sind Rechtsgewinde.

Lösung: 1) $s = \frac{1}{n}(h_1 + h_2) = 0{,}0045$ mm.

2) $s = \frac{1}{n}(h_1 - h_2) = 0{,}0005$ mm.

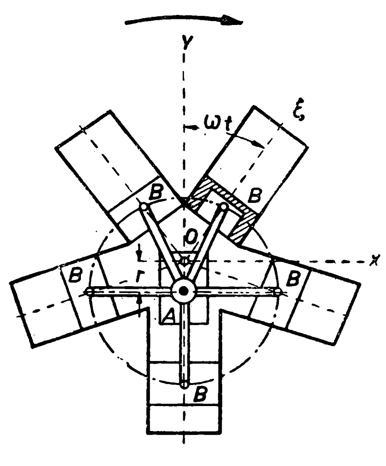
425. Der Bewegungsmechanismus einer Hobelmaschine besteht aus zwei parallelen Wellen O und O_1 und einer Kulisse O_1B, die durch die Kurbel OA bewegt wird. Das Ende der Kurbel ist gelenkig mit dem Gleitstück verbunden, welches sich längs des Kulissenschlitzes bewegen kann.



Es sollen die Gleichung der Relativbewegung des Gleitstückes im Kulissenschlitz und die Gleichung der Kulissenbewegung ermittelt werden, wenn die Kurbel sich mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Der Abstand zwischen den Wellenachsen beträgt $OO_1 = a$, die Kurbellänge $OA = r$.

Lösung: $\xi = \sqrt{a^2 + r^2 + 2\,ar\cos\omega t}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{r\sin\omega t}{a + r\cos\omega t}$.

426. Bei dem gezeichneten Sternmotor drehen sich die Zylinder um die feststehende Welle O, die Pleuelstangen um den Bolzen A der feststehenden Wellenkröpfung OA.



Es sind zu bestimmen: 1) Die absolute Bewegungsbahn eines Kolbenbolzens B, 2) Eine Näherungsgleichung für die Bewegungsbahn des Kolbenbolzens in bezug auf die Zylinderbewegung, wenn sich die Zylinder mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω drehen. Gegeben ist: $OA = r$ und $AB = l$. Der Koordinatenursprung liegt im Wellenmittelpunkt O.

Es wird angenommen, daß $\lambda = \frac{r}{l}$ klein ist.

Lösung: 1) Kreis $x^2 + (y + r)^2 = l^2$.

2) $\xi = l\left(1 - \lambda\cos\omega t - \frac{\lambda^2}{2}\sin^2\omega t\right)$.

16. Addition von Punktgeschwindigkeiten

427. Ein Schiff steuert mit einer Geschwindigkeit von a Knoten Kurs Süd-Ost. Dabei zeigt der am Mast angebrachte Windzeiger die Windrichtung Ost. Vermindert das Schiff seine Geschwindigkeit auf $\frac{a}{2}$ Knoten, so zeigt der Windzeiger die Windrichtung Nord-Ost an.

Es sind Richtung und Größe der Windgeschwindigkeit zu ermitteln.

Anmerkung: Die Kursangabe besagt, wohin das Schiff steuert, die Windrichtungsangabe, woher der Wind bläst.

Lösung: 1) Von Norden. 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ Knoten.

428. Um die Eigengeschwindigkeit eines Flugzeuges bei Wind zu ermitteln, wird am Boden eine gerade Strecke der Länge l abgesteckt, wobei die Streckenenden von oben gut sichtbar sein müssen. Die Richtung der aufgetragenen Strecke muß sich mit der Windrichtung decken. Entlang dieser Geraden fliegt das Flugzeug zunächst in Windrichtung. Es benötigt dazu t_1 sec, beim Rückflug braucht es t_2 sec, da es hierbei gegen den Wind fliegt.

Es sind die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges v und die Windgeschwindigkeit V zu bestimmen.

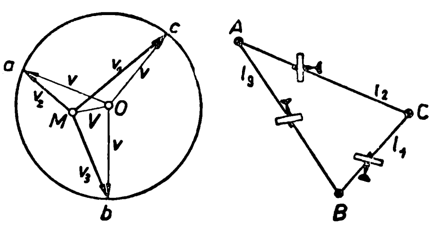
Lösung: $v = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)$ m/sec $= 1{,}8\, l \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)$ km/h;

$V = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)$ m/sec.

429. Um die Eigengeschwindigkeit v eines Flugzeuges bei Wind zu ermitteln, wird am Boden das Dreieck ABC mit den Schenkellängen $BC = l_1$, $CA = l_2$, $AB = l_3$ m aufgezeichnet. Für jede Dreieckseite wird die Flugdauer bestimmt: t_1, t_2, t_3 sec.

Für eine Windgeschwindigkeit V ist die konstante Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges v zu ermitteln. Die Aufgabe soll graphisch gelöst werden.

Erklärung: Unter Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges ist seine Geschwindigkeit gegenüber der Luft zu verstehen.



Lösung: Vom beliebigen Punkt M aus sind die drei Geschwindigkeitsvektoren der Größe $\frac{l_1}{t_1}$, $\frac{l_2}{t_2}$, $\frac{l_3}{t_3}$, die die Richtung der Dreieckseiten BC, CA und AB haben, aufzuzeichnen.

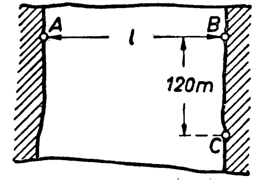
Die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges v ist gleich dem Radius des Kreises, der durch die Vektorenden geht. Größe und Richtung der Windgeschwindigkeit wird durch den Vektor MO angegeben.

430. Ein senkrecht fallender Regen hinterläßt auf den seitlichen Scheiben eines auf gerader Strecke mit 72 km/h Geschwindigkeit fahrenden Autos Streifen, die einen Winkel von 40° zur Senkrechten bilden.

Es ist die absolute Geschwindigkeit v der fallenden Regentropfen zu ermitteln.

Lösung: $v = 23{,}8$ m/sec.

431. Die Ufer eines Flusses verlaufen parallel. Ein Boot fährt vom Punkt A des Ufers mit senkrechtem Kurs ab und erreicht nach 10 Minuten den Punkt C, der vom Punkt A um 120 m stromabwärts am gegenüberliegenden Ufer liegt. Um vom Punkt A den Punkt B des anderen Ufers zu erreichen, muß das Boot unter einem bestimmten Winkel zur Geraden AB gegen den Strom steuern. In diesem Fall erreicht das Boot das andere Ufer nach 12,5 Minuten. Es sind die Flußbreite l, die relative Bootsgeschwindigkeit u gegenüber dem Wasser und die Wassergeschwindigkeit v zu ermitteln.



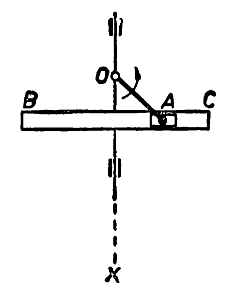
Lösung: $l = 200$ m; $u = 20$ m/min; $v = 12$ m/min.

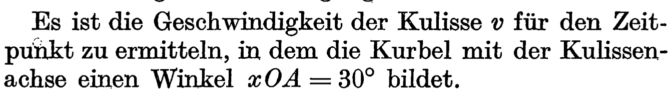
432. Ein Schiff fährt mit einer Geschwindigkeit von $30\sqrt{2}$ km/h nach Süden. Ein zweites Schiff hat mit einer Geschwindigkeit von 30 km/h Kurs in Richtung Süd-Ost.

Es sind Größe und Richtung der Geschwindigkeit des zweiten Schiffes, wie sie vom Deck des ersten Schiffes aus bestimmt wird, zu ermitteln.

Lösung: $v_r = 30$ km/h; Richtung: Nord-Ost.

433. In einem Kurbel-Kulissenmechanismus dreht sich die Kurbel OA, die $l = 200$ m lang ist, mit konstanter Drehzahl $n = 90$ U/min. An ihrem Ende A befindet sich der Gleitstein, der die Drehbewegung der Kurbel in eine hin- und hergehende Bewegung der Kulisse umwandelt.





Es ist die Geschwindigkeit der Kulisse v für den Zeitpunkt zu ermitteln, in dem die Kurbel mit der Kulissenachse einen Winkel $xOA = 30°$ bildet.

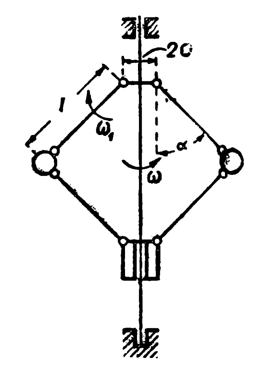
Lösung: $v = 0{,}942$ m/sec.

434. Eine Kurvenscheibe hat die Form eines Halbkreises mit dem Radius r und bewegt sich in Richtung ihres Durchmessers AB mit der konstanten Geschwindigkeit v_0.

Es ist die Geschwindigkeit der senkrecht zum Scheibendurchmesser AB geführten Stange zu bestimmen, die mit Hilfe einer Rolle vom Radius ϱ durch die Kurvenscheibe bewegt wird. Bei Beginn der Bewegung befindet sich die Stange in ihrer höchsten Lage (siehe Zeichnung zur Aufgabe 415).

Lösung: $v = \dfrac{v_0^2\, t}{\sqrt{(r+\varrho)^2 - v_0^2\, t^2}}$.

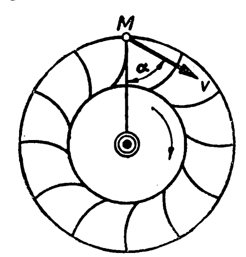
435. Es ist die absolute Geschwindigkeit der Kugeln eines Zentrifugalreglers für den Augenblick einer Drehzahländerung zu bestimmen. In dem zu untersuchenden Augenblick dreht sich der Regulator mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega = 10\ \text{sec}^{-1}$ um seine vertikale Achse, während die Regulatorstangen der Länge l sich mit $\omega_1 = 1{,}2\ \text{sec}^{-1}$ um ihre Aufhängung drehen. Gegeben ist: Stangenlänge $l = 50$ cm, Abstand der Stangenaufhängung $2e = 10$ cm, Winkel zwischen Reglerachse und Stange $\alpha = 30°$.



Lösung: $v = 306$ cm/sec.

436. Bei einer Wasserturbine gelangt das Wasser aus den Leitschaufeln in die Laufschaufeln. Deren Enden sind, um einen stoßfreien Eintritt zu erhalten, in Richtung der relativen Wassergeschwindigkeit v_r gebogen.

Es sind Größe und Richtung der Relativgeschwindigkeit des Wassers im Moment des Eintritts in das Laufrad zu ermitteln, wenn seine Absolutgeschwindigkeit beim Eintritt $v = 15$ m/sec beträgt. Der Winkel zwischen der Absolutgeschwindigkeit und dem Radius beträgt $\alpha = 60°$, der Eintrittsradius $R = 2$ m, das Laufrad dreht sich mit $n = 30$ U/min.



Lösung: $v_r = 10{,}06$ m/sec; $\sphericalangle\ (v_r, R) = 41°\ 50'$.

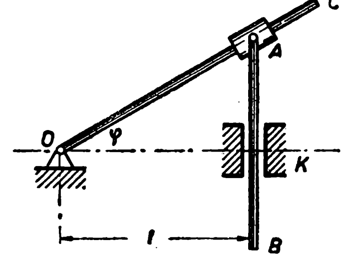
437. Auf einer Drehbank wird ein Zylinder vom Durchmesser $d = 80$ mm gedreht. Die Spindel vollführt $n = 30$ U/min, die Vorschubgeschwindigkeit beträgt $v = 0{,}2$ mm/sec.

Es ist die Relativgeschwindigkeit v_r des Schneidstahls zum rotierenden Zylinder zu ermitteln.

Lösung: $v_r = 125{,}7$ mm/sec; tg $\alpha = 628$, wobei α den Winkel zwischen v_r und der Spindelachse darstellt.

438. Eine Kurbel OC schwingt um die Achse O. Dabei bewegt sie eine Stange AB, die mit ihr durch ein Gleitstück A verbunden ist. Die Stange AB bewegt sich in der senkrechten Führung K.

Es ist die Bewegungsgeschwindigkeit des Gleitstückes A gegenüber der Kurbel OC als Funktion der Winkelgeschwindigkeit ω und des Drehungswinkels φ der Kurbel zu bestimmen. Der Abstand OK beträgt $OK = l$.



Lösung: $v_r = \dfrac{l\ \omega\, \text{tg}\, \varphi}{\cos \varphi}$.

439. Es ist die Absolutgeschwindigkeit eines beliebigen Punktes der Koppel AB, die die Kurbeln OA und O_1B einer Eisenbahnlokomotive verbindet, zu ermitteln. Der Laufradradius beträgt $R = 1$ m, der Kurbelradius $OA = O_1B = 0{,}5$ m. Die Lokomotive fährt mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 20$ m/sec. Die Geschwindigkeit des Punktes M ist für folgende vier Augenblicke zu ermitteln:

1) für die beiden senkrechten Stellungen der Kurbeln;
2) für die beiden waagerechten Stellungen der Kurbeln.

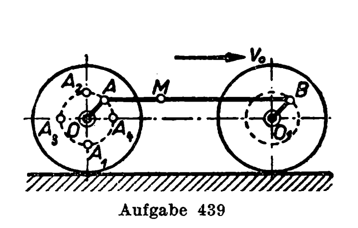
Die Räder rollen auf den Schienen, ohne zu gleiten.

Lösung: $v_1 = 10$ m/sec; $v_2 = 30$ m/sec; $v_3 = v_4 = 22{,}36$ m/sec.

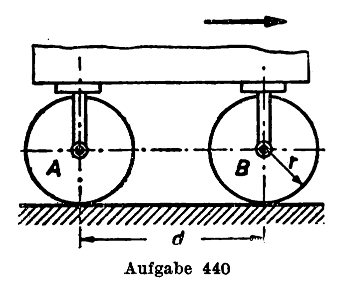
440. Die Räder A und B eines Eisenbahnwagens rollen ohne zu gleiten mit einer Geschwindigkeit v auf geraden Schienen. Die Räderradien betragen r, der Achsenabstand ist d.

Es ist die Geschwindigkeit des Radzentrums A gegenüber dem Koordinatensystem zu ermitteln, das mit dem Rad B ständig verbunden ist.

Lösung: Die Geschwindigkeit ist senkrecht zu AB und nach unten gerichtet. Sie beträgt $\frac{vd}{r}$.



Aufgabe 439



Aufgabe 440

441. Ein Mechanismus besteht aus zwei parallelen Wellen O und O_1, der Kurbel OA und der Kulisse O_1B. Das Ende A der Kurbel OA gleitet in einem Schlitz der Kulisse O_1B. Der Abstand zwischen den Wellenachsen OO_1 beträgt a, die Kurbellänge OA ist l, wobei $l > a$. Die Welle O dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω.

Es sind zu ermitteln: 1) Winkelgeschwindigkeit ω_1 der Welle O_1 und Relativgeschwindigkeit v_r des Punktes A gegenüber der Kulisse O_1B, wobei als Veränderliche $O_1A = s$ eingeführt werden soll; 2) Extremwerte von v_r und ω_1; 3) diejenigen Kurbellagen, bei denen $\omega_1 = \omega$ ist.

Lösung: $$\omega_1 = \frac{\omega}{2}\left(1 + \frac{l^2 - a^2}{s^2}\right);$$

$$\omega_{1\,\max} = \omega\,\frac{l}{l - a}; \quad \omega_{1\,\min} = \omega\,\frac{l}{l + a};$$

$$\omega_1 = \omega \text{ für } O_1B \perp O_1O; \quad v_{r\,\max} = a\,\omega; \quad v_{r\,\min} = 0;$$

$$v_r = \frac{\omega}{2\,s}\sqrt{(l + s + a)\,(l + s - a)\,(a + l - s)\,(a + s - l)}.$$

442. Der Stein A einer schwingenden Kulisse, die zum Antrieb einer Hobelmaschine dient, wird durch ein Zahnradgetriebe bewegt. Das Getriebe besteht aus dem Zahnrad D und dem Zahnrad E. An letzterem ist der Stein A drehbar befestigt. Die Radien der Zahnräder betragen: $R = 100$ mm; $R_1 = 350$ mm; $O_1A = 300$ mm; der Abstand zwischen der Achse O_1 des Zahnrades E und dem Drehpunkt B der Kulisse O_1B ist 700 mm.

Es sind die Winkelgeschwindigkeiten der Kulisse für die Momente zu ermitteln, in denen die Gerade O_1A vertikal (obere und untere Lage) und in denen sie senkrecht zur Kulisse AB (linke und rechte Lage) steht. Das Zahnrad D hat eine Winkelgeschwindigkeit von $\omega = 7\ \text{sec}^{-1}$.

Lösung: $\omega_{\text{I}} = 0{,}6\ \text{sec}^{-1}$; $\omega_{\text{II}} = \omega_{\text{IV}} = 0$; $\omega_{\text{III}} = 1{,}5\ \text{sec}^{-1}$.

443. Es ist die Winkelgeschwindigkeit der drehbaren Kulisse von Aufgabe 441 für zwei vertikale und zwei horizontale Kurbellagen zu ermitteln, wenn $a = 60$ cm, $l = 80$ cm betragen und die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel $n = 30$ U/min entspricht.

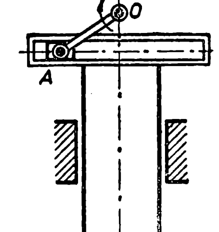
Lösung: $\omega_{\text{I}} = \frac{4}{7}\pi\ \text{sec}^{-1}$; $\omega_{\text{II}} = \omega_{\text{IV}} = 0{,}64\,\pi\ \text{sec}^{-1}$; $\omega_{\text{III}} = 4\,\pi\ \text{sec}^{-1}$.

444. Es ist die absolute Kolbengeschwindigkeit für den Sternmotor der Aufgabe 426 in zwei vertikalen und zwei horizontalen Lagen der Pleuelstange AB zu bestimmen, wenn die Kurbel $OA = r = 80$ mm und die Pleuelstange $AB = l = 240$ mm lang sind. Die Drehzahl des Zylinderblocks beträgt $n = 1200$ U/min.

Lösung: $v_{\text{I}} = 20{,}11$ m/sec; $v_{\text{III}} = 40{,}21$ m/sec; $v_{\text{II}} = v_{\text{IV}} = 33{,}51$ m/sec.

17. Addition der Punktbeschleunigungen beim Übertragen vorwärtsschreitender Bewegung

445. Der Antriebsmechanismus eines Hammers besteht aus einer waagerechten Kulisse, die durch den Stein A der Kurbel OA in Bewegung gesetzt wird. Die Kurbel der Länge $OA = r = 40$ cm dreht sich mit $n = 120$ U/min. Für $t = 0$ nimmt die Kulisse die tiefste Stellung ein.



Es ist die Kulissenbeschleunigung zu bestimmen.

Lösung: $b = 6320 \cos 4\,\pi\, t\ \text{cm/sec}^2$.

446. Eine Kurbel $OA = r = 0{,}5$ m, die eine waagerechte Kulisse bewegt, hat in der Stellung $\sphericalangle\, x\,OA = 60°$ eine Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1\ \text{sec}^{-1}$ und eine Winkelbeschleunigung $\varepsilon = \pm 1\ \text{sec}^{-2}$.

Es ist die Kulissenbeschleunigung in der angegebenen Stellung für zwei Fälle zu ermitteln: 1) wenn $\varepsilon > 0$ und 2) wenn $\varepsilon < 0$ (siehe Zeichnung zur Aufgabe 433).

Lösung: $b_1 = 0{,}683\ \text{m/sec}^2$; $b_2 = 0{,}183\ \text{m/sec}^2$.

447. Eine unter 45° geneigte Fläche AB bewegt sich auf der Achse Ox mit der gleichförmigen Beschleunigung von 1 dm/sec². Entlang dieser Fläche rutscht ein Körper P mit konstanter relativer Beschleunigung $\sqrt{2}$ dm/sec² herunter. Die Anfangsgeschwindigkeiten der Fläche und des Körpers sind 0, die anfängliche Körperlage wird durch $x = 0$, $y = h$ bestimmt.

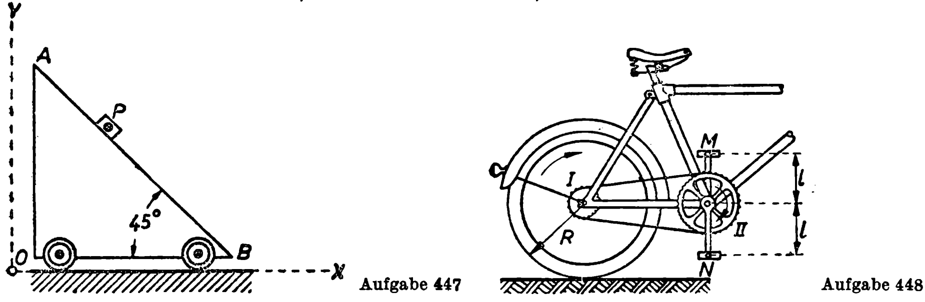
Es sind die Bewegungsbahn, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der absoluten Bewegung des Körpers P zu ermitteln.

Lösung: $y = h - \frac{x}{2}$; $v = \sqrt{5}\, t$ dm/sec; $b = \sqrt{5}$ dm/sec².

448. Ein Fahrrad bewegt sich auf einer festgelegten waagerechten Strecke nach dem Gesetz: $s = 0{,}1\, t^2$ (s in m, t in sec). Es sind gegeben: $R = 350$ mm, $l = 180$ mm, $z_1 = 18$ Zähne, $z_2 = 48$ Zähne.

Es soll die absolute Beschleunigung der Pedalachsen nach $t = 10$ sec angegeben werden. In diesem Zeitpunkt stehe die Kurbel MN senkrecht. Die Räder rollen ohne zu gleiten.

Lösung: $b_M = 0{,}860$ m/sec²; $b_N = 0{,}841$ m/sec².

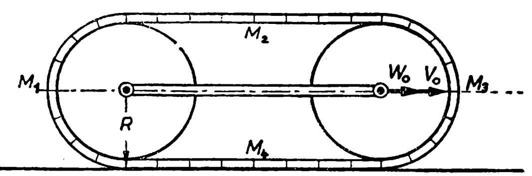


Aufgabe 447 Aufgabe 448

449. Es ist die absolute Beschleunigung eines beliebigen Punktes auf der Koppel AB, die die Treibachsen O und O_1 einer Lokomotive verbindet, zu bestimmen. Die Lokomotive fährt auf einer geraden Strecke mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 36$ km/h. Die Räderradien sind $R = 1$ m, die Kurbelradien $r = 0{,}75$ m. (Siehe Zeichnung zur Aufgabe 439.)

Lösung: $b = 75$ m/sec².

450. Es sind Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte M_1, M_2, M_3 und M_4 eines Raupentraktors zu bestimmen. Er fährt ohne zu gleiten auf einer geraden Strecke mit einer Geschwindigkeit v_0 und einer Beschleunigung b_0. Die Räderradien des Traktors sind R. Der Schlupf zwischen Rad und Raupe ist zu vernachlässigen.



Lösung: $v_1 = v_3 = v_0\sqrt{2}$; $v_2 = 2\, v_0$; $v_4 = 0$;

$$b_1 = \sqrt{b_0^2 + \left(b_0 + \frac{v_0^2}{R}\right)^2}; \quad b_2 = 2\, b_0;$$

$$b_3 = \sqrt{b_0^2 + \left(b_0 - \frac{v_0^2}{R}\right)^2}; \quad b_4 = 0.$$

451. Ein Zahnrad vom Radius $R = 0{,}5$ m läuft zwischen zwei parallelen Zahnstangen, die in einer Richtung mit den Beschleunigungen $b_1 = 1{,}5$ m/sec^2 und $b_2 = 2{,}5$ m/sec^2 gleiten.

Es sind die Beschleunigung b_0 des Radmittelpunktes O und die Winkelbeschleunigung des Rades zu ermitteln. Das ξ-η-Koordinatensystem bewegt sich gemeinsam mit dem Radmittelpunkt.

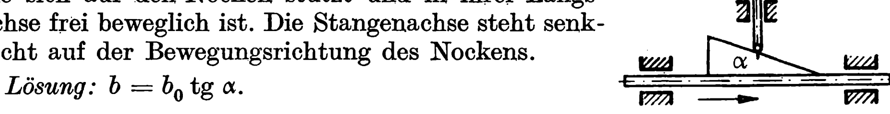
Lösung: $\varepsilon = 1$ sek^{-2}; $b_0 = 2$ m/sec^2.

452. Es sind die Beschleunigung des Radmittelpunktes und die Winkelbeschleunigung eines Rades zu ermitteln. Radradius $R = 1$ m. Das Rad läuft zwischen zwei parallelen Leisten, die nach entgegengesetzten Richtungen mit den Beschleunigungen $b_1 = 1$ m/sec^2 und $b_2 = 2$ m/sec^2 gleiten.

Lösung: $\varepsilon = 1{,}5$ sec^{-2}; $b_0 = 0{,}5$ m/sec^2.

453. Ein dreieckiger Nocken (vgl. Zeichnung) mit dem Neigungswinkel α bewegt sich gleichmäßig beschleunigt.

Es ist die Beschleunigung der Stange zu ermitteln, die sich auf den Nocken stützt und in ihrer Längsachse frei beweglich ist. Die Stangenachse steht senkrecht auf der Bewegungsrichtung des Nockens.



Lösung: $b = b_0 \operatorname{tg} \alpha$.

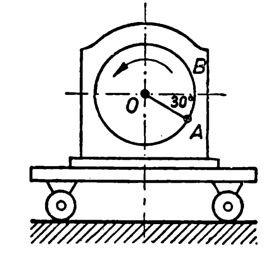
454. Ein halbkreisförmiger Nocken bewegt sich in der Richtung seines Durchmessers AB mit konstanter Geschwindigkeit v_0.

Es ist die Beschleunigung der Stange, die sich auf den Nocken stützt und senkrecht zum Durchmesser AB steht, zu ermitteln. Der Radius der Gleitrolle ist ϱ. Im Anfangsaugenblick befindet sich die Stange in ihrer höchsten Lage (siehe Zeichnung zur Aufgabe 415).

Lösung: $b = \dfrac{v_0{}^2 (r+\varrho)^2}{\sqrt{(r+\varrho)^2 - v_0{}^2 t^2}^{\,3}}$.

455. Auf einem Wagen, der sich auf einer Horizontalen mit einer Beschleunigung von $b = 49{,}2$ cm/sec^2 nach rechts bewegt, ist ein Elektromotor aufgestellt. Die Anlaßbewegung des Rotors wird durch $\varphi = t^2$ bestimmt. Der Winkel φ ist dabei im Bogenmaß gemessen. Der Läuferradius beträgt 20 cm.

Es ist nach einer Sekunde die absolute Beschleunigung des Punktes A, der sich auf dem Rotor befindet, zu ermitteln, wenn in diesem Augenblick der Punkt A die auf der Zeichnung angegebene Lage einnimmt.



Lösung: $b_A = 74{,}6$ cm/sec^2 senkrecht nach oben gerichtet.

456. Für die vorherige Aufgabe ist die Winkelgeschwindigkeit des Läufers zu ermitteln, bei der der Punkt A, wenn er in die Lage B kommt, eine absolute Beschleunigung $b = 0$ hat.

Lösung: $\omega = 1{,}57$ sec^{-1}.

457. An der Welle eines Elektromotors, der sich nach der Gleichung $\varphi = \omega\, t$ (ω = konst.) dreht, ist unter rechtem Winkel eine Stange OA mit der Länge l befestigt. Der Motor führt harmonische Schwingungen $x = a \sin \omega\, t$ auf dem waagerechten Fundament aus.

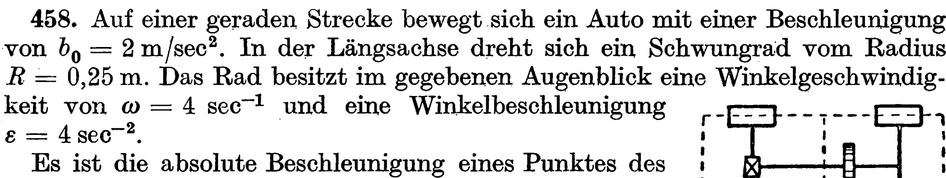
Es ist die absolute Beschleunigung des Punktes A im Zeitpunkt $t = \frac{\pi}{2\,\omega}$ sec zu ermitteln.

Lösung: $b_A = \omega^2 \sqrt{a^2 + l^2}$.

458. Auf einer geraden Strecke bewegt sich ein Auto mit einer Beschleunigung von $b_0 = 2$ m/sec². In der Längsachse dreht sich ein Schwungrad vom Radius $R = 0{,}25$ m. Das Rad besitzt im gegebenen Augenblick eine Winkelgeschwindigkeit von $\omega = 4\ \text{sec}^{-1}$ und eine Winkelbeschleunigung $\varepsilon = 4\ \text{sec}^{-2}$.

Es ist die absolute Beschleunigung eines Punktes des Radkranzes im gegebenen Augenblick zu ermitteln.

Lösung: $b = 4{,}58$ m/sec².



459. Ein Flugzeug fliegt mit einer Beschleunigung b_0 = konst. = 4 m/sec² geradeaus. Der Propeller mit dem Durchmesser $d = 1{,}8$ m dreht sich gleichmäßig mit einer Winkelgeschwindigkeit, der $n = 1800$ U/min entsprechen.

Es sind die Bewegungsgleichung, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Propellerendes in einem mit der Erde verbundenen System zu ermitteln. Die Achse Ox dieses Koordinatensystems deckt sich mit der Propellerachse. Die Anfangsgeschwindigkeit des Flugzeuges ist $v_0 = 0$.

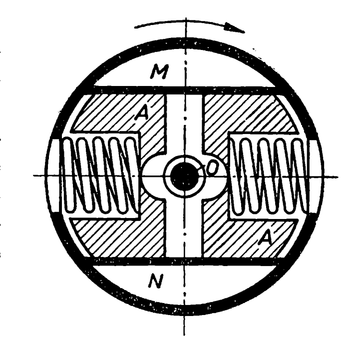
Lösung: $x = 2\,t^2$ m; $y = 0{,}9 \cos 60\,\pi\,t$ m; $z = 0{,}9 \sin 60\,\pi\,t$ m;

$v = \sqrt{16\,t^2 + 2916\,\pi^2}$ m/sec; $b = 31\,945$ m/sec².

18. Addition der Punktbeschleunigungen bei radial veränderlicher Drehbewegung um eine starre Achse

460. In einem Regulator, der sich um eine vertikale Achse mit konstanter Drehzahl $n = 180$ U/min dreht, sind Gewichte A angebracht, die von Stahlfedern gehalten werden. Die Gewichte führen harmonische Schwingungen entlang der Nut MN so aus, daß sich der Abstand ihrer Schwerpunkte von der Drehachse nach dem Gesetz $x = (10 + 5 \sin 8\,\pi\,t)$ cm verändert.

Es ist die Schwerpunktsbeschleunigung der Gewichte in dem Augenblick zu ermitteln, in dem die Coriolisbeschleunigung ihren maximalen Wert erreicht. Gleichzeitig ist der Wert der Coriolisbeschleunigung für die äußerste Lage der Gewichte zu berechnen.



Lösung: $b_a = 600\,\pi^2$ cm/sec²; $b_c = 0$.

461. In einem waagerechten Rohr OA, das sich gleichmäßig um eine vertikale Achse mit $n = 60$ U/min dreht, fließt Wasser.

Es ist die Coriolisbeschleunigung b_c in einem Punkt zu ermitteln, wenn die relative Geschwindigkeit des Wassers $v_r = \frac{21}{11}$ m/sec beträgt. Für π ist der angenäherte Wert $\pi = \frac{22}{7}$ zu nehmen.

Lösung: $b_c = 24\ \text{m/sec}^2$.

462. Ein zu einem Ring gebogenes Rohr vom Radius $R = 1$ m dreht sich im Uhrzeigersinn um die horizontale Achse O mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1\ \text{sec}^{-1}$. Im Rohr schwingt um den Punkt A eine Kugel M nach der Gleichung $\varphi = \sin \pi t$.

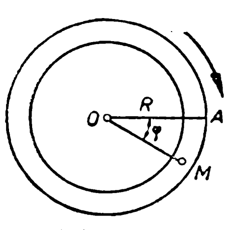
Es sind die Tangential- und die Normalbeschleunigung nach $t = 2\frac{1}{6}$ sec zu ermitteln.

Lösung: $b_t = -4{,}93\ \text{m/sec}^2$; $b_n = 13{,}84\ \text{m/sec}^2$.

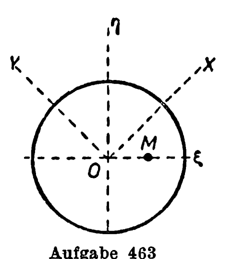
463. Eine Scheibe dreht sich um eine Achse, die senkrecht zur Scheibenfläche steht. Die Drehung erfolgt im Uhrzeigersinn mit gleichförmiger Winkelbeschleunigung $1\ \text{sec}^{-2}$. Im Zeitpunkt $t = 0$ befindet sie sich in Ruhe. Auf einem der Scheibendurchmesser schwingt der Punkt M nach $\xi = \sin \pi t$ dm (t in sec).

Es sind im Zeitpunkt $t = 1\frac{2}{3}$ sec die ξ-η-Komponenten der absoluten Beschleunigung des Punktes M zu ermitteln.

Lösung: $b_\xi = 10{,}95\ \text{dm/sec}^2$; $b_\eta = -4{,}37\ \text{dm/sec}^2$.



Aufgabe 462



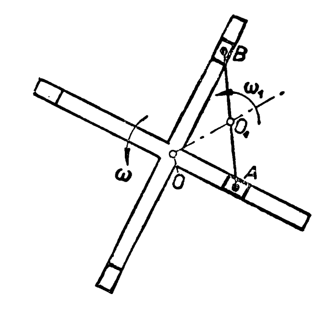
Aufgabe 463

464. Ein Punkt bewegt sich gleichförmig mit relativer Geschwindigkeit v_r längs einer Scheibensehne. Die Scheibe dreht sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Achse O. Die Achse selbst steht senkrecht zur Scheibenfläche.

Es sind die absolute Geschwindigkeit und die absolute Beschleunigung des Punktes zu ermitteln, wenn er den kürzesten Abstand h von der Achse O hat. Es wird angenommen, daß die relative Punktbewegung in Richtung der Scheibendrehung vor sich geht.

Lösung: $v = v_r + h\,\omega$; $b = \omega^2 h + 2\,\omega\, v_r$.

465. Um die Drehung von einer Welle O_1 auf eine andere parallel dazu angebrachte Welle O zu übertragen, verwendet man eine Kupplung, die wie ein Ellipsenzirkel aufgebaut ist. Die Kurbel AB dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 um die Welle O_1 und bringt das Kreuzstück, das auf der zweiten Welle O sitzt, zum Drehen.



Es sind die Winkelgeschwindigkeit des Kreuzstückes sowie die absolute und die relative (gegenüber dem Kreuzstück) Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes A vom Gleitstück bei $\omega_1 =$ konst. zu ermitteln. $OO_1 = AO_1 = O_1B = a$.

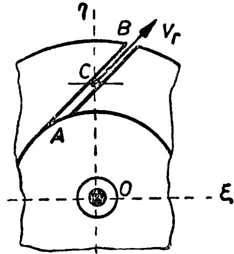
Lösung: $\omega = \frac{\omega_1}{2}$; $v_e = a\,\omega_1 \sin\frac{\omega_1}{2}t$; $v_r = a\,\omega_1 \cos\frac{\omega_1}{2}t$;

$$b_e = b_r = \frac{a\,\omega_1^2}{2} \sin\frac{\omega_1}{2}t;\quad b_c = a\,\omega_1^2 \cos\frac{\omega_1}{2}t.$$

466. Ein Fahrrad bewegt sich auf einer horizontalen Plattform, die sich um die vertikale Achse OL mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{1}{2}\,\text{sec}^{-1}$ dreht. Der Abstand des Rades bis zur Drehachse der Plattform ist konstant $r = 4$ m. Die relative Geschwindigkeit des Fahrrades $v_r = 4$ m/sec ist entgegengesetzt der Scheibengeschwindigkeit im Berührungspunkt gerichtet. Es ist die absolute Beschleunigung des Fahrrades zu ermitteln. Ferner ist zu bestimmen, mit welcher Geschwindigkeit sich das Fahrrad bewegen muß, damit seine absolute Beschleunigung gleich Null wird.

Lösung: 1) $b = 1\,\text{m/sec}^2$ radial gerichtet; 2) $v_r = 2$ m/sec.

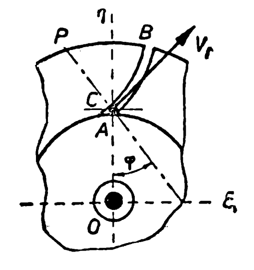
467. Ein Kreiselverdichter mit geraden Schaufeln dreht sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse O, die senkrecht zur Zeichenfläche steht. Die Luft strömt in den Kanälen mit konstanter relativer Geschwindigkeit v_r.



Es sind die Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten für Luftteile, die sich im Punkt C des Kanals AB befinden, bei folgenden Angaben zu ermitteln: Kanal AB ist um 45° gegen den Radius geneigt, $OC = 0{,}5$ m, $\omega = 4\pi\,\text{sec}^{-1}$, $v_r = 2$ m/sec.

Lösung: $v_\xi = 7{,}7$ m/sec; $v_\eta = 1{,}414$ m/sec;
$b_\xi = 35{,}54\,\text{m/sec}^2$; $b_\eta = -114{,}5\,\text{m/sec}^2$.

468. Die vorige Aufgabe ist für den Fall einer rückwärts gekrümmten Schaufel zu lösen, wenn im Punkt C der Kanal den Krümmungsradius ϱ hat. Der Winkel zwischen der Normalen zur Kurve AB im Punkte C und dem Radius CO ist φ. Radius $CO = r$.



Lösung: $v_\xi = v_r \cos\varphi + r\,\omega$; $v\eta = v_r \sin\varphi$;

$$b_\xi = \left(2\,v_r\,\omega - \frac{v_r^2}{\varrho}\right) \sin\varphi;$$

$$b_\eta = -\left[r\,\omega^2 + \left(2\,v_r\,\omega - \frac{v_r^2}{\varrho}\right)\cos\varphi\right].$$

649. Es ist die Winkelbeschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit für die Kulisse eines Kurzhoblers zu ermitteln. Die Kurbel der Länge r dreht sich gleichförmig mit einer Winkelgeschwindigkeit ω. Der Abstand zwischen den Drehachsen der Kurbel und der Kulisse ist $a > r$ (siehe Zeichnung zur Aufgabe 425).

Lösung: $\varepsilon_1 = \frac{(r^2 - a^2)\, a r \omega^2 \sin \omega t}{(a^2 + r^2 + 2 a r \cos \omega t)^2}$.

470. Durch die rotierende Bewegung einer Kulisse B wird ein Gleitstein A beschleunigt (vgl. Zeichnung zur Aufgabe 441). Die Kulisse dreht sich ungleichförmig um ihre Achse. Der Gleitstein erfährt dadurch eine relative ungleichförmige Bewegung entlang des Kulissenschlitzes.

Es sind die Komponenten der absoluten Steinbeschleunigung, bezogen auf die beweglichen Achsenkoordinaten, zu ermitteln.

Lösung: $b_\xi = b_r - s\,\omega^2$; $b_\eta = s \cdot \varepsilon + 2\, v_r\, \omega$, wobei die Achsen ξ und η entlang des Schlitzes und senkrecht dazu gerichtet sind.

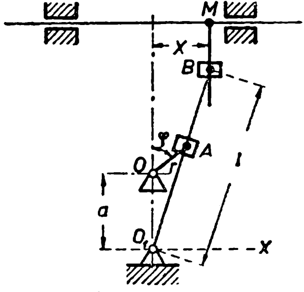
471. Es ist die Winkelbeschleunigung einer drehbaren Kulisse in zwei senkrechten und zwei horizontalen Lagen der Kurbel zu ermitteln. Die Kurbellänge ist $l = 40$ cm, der Achsenabstand zwischen Kurbel und Kulisse $a = 30$ cm. Die Winkelgeschwindigkeit der sich gleichförmig drehenden Kurbel ist $\omega = 3\,\text{sec}^{-1}$ (siehe Zeichnung zur Aufgabe 441).

Lösung: $\varphi = 0$ und $\varphi = 180°$; $\varepsilon = 0$;
$\varphi = 90°$; $\varepsilon = 1{,}21\,\text{sec}^{-2}$;
$\varphi = 270°$; $\varepsilon = -1{,}21\,\text{sec}^{-2}$; Verzögerung.

472. Es soll die Beschleunigung der relativen Bewegung eines Kulissensteines längs des Kulissenschlitzes (vgl. vorhergehende Aufgabe) in den angegebenen vier Kurbellagen ermittelt werden.

Lösung: $\varphi = 0$, $b_r = 154{,}3\,\text{cm/sec}^2$;
$\varphi = 90°$ und $\varphi = 270°$, $b_r = 103{,}7\,\text{cm/sec}^2$;
$\varphi = 180°$, $b_r = -1080\,\text{cm/sec}^2$.

473. Es sind die Bewegungsgleichung, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Schlittens M einer Hobelmaschine, die mit einem Kurbelkulissenmechanismus in Bewegung gesetzt wird, zu ermitteln. Das Schema ist in der Zeichnung angegeben. Die Kulisse ist mit dem Schlitten M durch ein Gleitstück B verbunden. Gegeben sind: $O_1B = l$, $OA = r$, $O_1O = a$, $r < a$. Die Kurbel OA dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Der Drehwinkel der Kurbel zählt von der Achse OO_1 aus.



Lösung: $x = l \frac{r \sin \omega t}{\sqrt{a^2 + r^2 + 2 a r \cos \omega t}}$; $v = r \cdot l \cdot \omega \frac{(a + r \cos \omega t)\,(a \cos \omega t + r)}{(a^2 + r^2 + 2 a r \cos \omega t)^{\frac{3}{2}}}$;

$$b = r\, l\, \omega^2 \frac{a\,(r^2 - a^2)\,(a + r \cos \omega t) - r^2\,(a \cos \omega t + r)^2}{(a^2 + r^2 + 2 a r \cos \omega t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Anmerkung: Der Koordinatenursprung liegt im Punkt O.

474. Es ist die Beschleunigung des Schlittens einer Hobelmaschine mit Kulissenantrieb in zwei vertikalen und zwei horizontalen Kurbellagen zu ermitteln, wenn die Kurbellänge $r = 10$ cm, der Abstand zwischen Drehpunkt der Kurbel und Kulisse $a = 30$ cm, die Kulissenlänge $l = 60$ cm und die Winkelgeschwindigkeit der Kurbeldrehung $\omega = 4\ \text{sec}^{-1}$ = konst. sind (vgl. Abb. zu Aufgabe 473).

Lösung: Für $\varphi = 0$ und $\varphi = 180°$ ist $b_x = 0$.
Für $\varphi = 90°$ und $\varphi = 270°$ ist $b_x = \mp\, 267{,}2\ \text{cm/sec}^2$.

475. Auf einer Drehbank wird ein runder Gegenstand auf einen Durchmesser von 80 mm abgedreht. Die Spindel läuft mit 30 U/min. Die Längsvorschubgeschwindigkeit beträgt 0,2 mm/sec.

Es sind die relative Geschwindigkeit und die relative Beschleunigung des Schnittstahls bezüglich des zu bearbeitenden Gegenstandes, die Coriolisbeschleunigung des Schnittstahls sowie die auf den Schnittstahl bezogene Beschleunigung b_e zu ermitteln. Es ist nachzuweisen, daß die absolute Beschleunigung des Schnittstahls Null ist.

Lösung: $v_r = 125{,}7\ \text{mm/sec}$; $b_c = 789{,}5\ \text{mm/sec}^2$;
$b_r = b_e = 394{,}8\ \text{mm/sec}^2$.

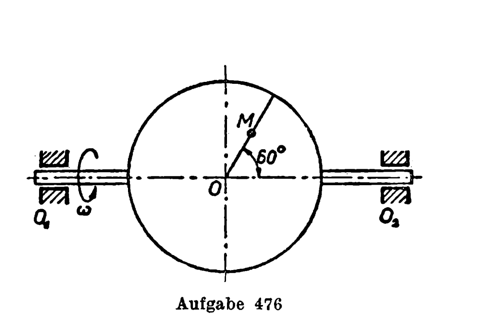
476. Auf einer Scheibe, die sich um die Achse O_1O_2 mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\,t\ \text{sek}^{-1}$ dreht, bewegt sich ein Punkt M radial nach außen. Die Bewegungsbahn schließt mit der Achse O_1O_2 einen Winkel von 60° ein. Es ist der Wert der absoluten Beschleunigung des Punktes M nach $t = 1$ sec zu ermitteln, wenn für die Bewegung $OM = 4\,t^2$ cm gilt.

Lösung: $b_M = 35{,}56\ \text{cm/sec}^2$.

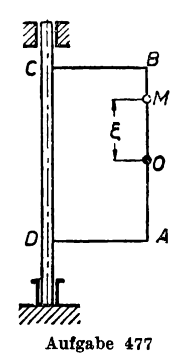
477. Ein Rechteck $ABCD$ dreht sich um die Seite CD mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\pi}{2}\ \text{sec}^{-1}$ = konst. Entlang der Seite AB bewegt sich ein Punkt M nach dem Gesetz $\xi = a \sin \frac{\pi}{2}\, t$ cm. Gegeben sind folgende Abstände: $DA = CB = a$ cm.

Es ist der Wert der absoluten Punktbeschleunigung nach $t = 1$ sec zu ermitteln.

Lösung: $b_a = \frac{a\,\pi^2}{4} \cdot \sqrt{2}\ \text{cm/sec}^2$.



Aufgabe 476



Aufgabe 477

478. Ein Quadrat $ABCD$, dessen Seiten $2a$ cm lang sind, dreht sich um die Seite AB mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $\omega = \pi \sqrt{2}\ \text{sek}^{-1}$. Längs der Diagonale AC führt der Punkt M harmonische Schwingungen nach dem Gesetz $\xi = a \cdot \cos \frac{\pi}{2} t$ cm aus.

Es ist der Wert der absoluten Punktbeschleunigung bei $t_1 = 1$ sec und $t_2 = 2$ sec zu ermitteln.

Lösung: $b_{a1} = a\pi^2 \sqrt{5}$ cm/sec²;

$b_{a2} = 0{,}44\, a\pi^2$ cm/sec².

479. Ein hohler Ring vom Radius r ist mit der Welle AB so verbunden, daß die Wellenachse in der Ringfläche liegt. Der Ring ist mit Flüssigkeit gefüllt, die sich in ihm in Richtung des Pfeiles mit einer konstanten relativen Geschwindigkeit u bewegt. Die Welle AB dreht sich im Uhrzeigersinn, wenn die Blickrichtung von A nach B verläuft. Die Winkelgeschwindigkeit der Welle ω ist konstant.

Es sind die Werte der absoluten Beschleunigungen der Flüssigkeitsteile, die sich in den Punkten 1, 2, 3 und 4 befinden, zu ermitteln.

Lösung: $b_1 = r\omega^2 - \frac{u^2}{r}$; $b_3 = 3r\omega^2 + \frac{u^2}{r}$;

$$b_2 = b_4 = \sqrt{4r^2\omega^4 + \frac{u^4}{r^2} + 4\omega^2 u^2}.$$

Aufgabe 478 Aufgabe 479 Aufgabe 480

480. Nach den Bedingungen der vorhergehenden Aufgabe, die nur insofern geändert werden, als die Fläche der Ringachse senkrecht zur Wellenachse AB steht, sollen die gleichen Werte für zwei Fälle ermittelt werden, und zwar:

1) Drehsinn der Welle O und Bewegung des Wassers gleichsinnig,
2) Drehsinn der Welle O und Bewegung des Wassers gegensinnig.

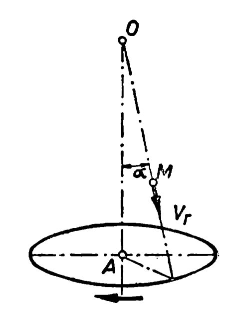
Lösung: 1) $b_1 = r\omega^2 - \frac{u^2}{r} - 2u\omega$; $b_3 = 3r\omega^2 + \frac{u^2}{r} + 2\omega u$;

$$b_2 = b_4 = \sqrt{\left(\frac{u^2}{r} + 2\omega u + \omega^2 r\right)^2 + 4\omega^4 r^2}.$$

2) $b_1 = r\omega^2 - \frac{u^2}{r} + 2u\omega$; $b_3 = 3r\omega^2 + \frac{u^2}{r} - 2\omega u$;

$$b_2 = b_4 = \sqrt{\left(\omega^2 r + \frac{u^2}{r} - 2\omega u\right)^2 + 4\omega^4 r^2}.$$

481. Ein Punkt M bewegt sich gleichförmig auf einer Geraden mit einer Relativgeschwindigkeit v_r. Der Winkel dieser Geraden mit der Achse OA ist $MOA = \alpha$. Der Punkt M bewegt sich auf einem Kegelmantel. Dieser entsteht, wenn der Strahl OM um die Achse AO mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich M im Abstand $OM_0 = a$.



Es ist die absolute Beschleunigung des Punktes M zu ermitteln.

Lösung: Die Beschleunigung liegt in einer Ebene, auf der die Drehachse senkrecht steht. Die Resultierende wird aus den Komponenten b_{en} und b_c gebildet. $b_{en} = \omega^2 (a + v_r t) \sin \alpha$; $b_c = 2 v_r \omega \sin \alpha$.

482. Aus der vorhergehenden Aufgabe ist der Wert der absoluten Beschleunigung des Punktes M nach $t = 1$ sec zu bestimmen. Jetzt bewegt sich der Punkt auf der Geraden des sich bildenden Kegels mit gleichförmiger relativer Beschleunigung b_r.

Angaben: $\alpha = 30°$, $a = 15$ cm, $b_r = 10$ cm/sec², $\omega = 1$ sec^{-1}.

Zur Zeit $t = 0$ ist die Relativgeschwindigkeit $v_{r_0} = 0$.

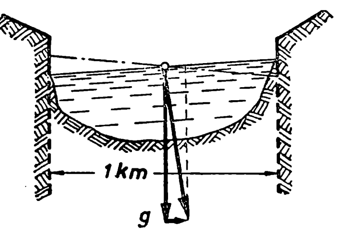
Lösung: $b = 14{,}14$ cm/sec².

483. Im Gegensatz zu Aufgabe 481 wird angenommen, daß sich der Kegel mit einer Winkelbeschleunigung ε um seine Achse dreht. Es ist der Wert der absoluten Beschleunigung b des Punktes M nach $t = 2$ sec zu bestimmen. Die gegebenen Größen sind: $\alpha = 30°$, $a = 18$ cm, $v_r = 3$ cm/sec, $\varepsilon = 0{,}5$ sec^{-2}. Zur Zeit $t = 0$ ist die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 0$.

Lösung: $b = 15$ cm/sec².

484. Ein Fluß von 1 km Breite fließt von Süden nach Norden. Seine Geschwindigkeit beträgt 5 km/h.

Es ist die Coriolisbeschleunigung b_c der Wasserteilchen in 60° nördlicher Breite zu bestimmen.



Außerdem ist zu bestimmen, an welchem Ufer das Wasser höher und um wieviel es höher steigt, wenn die Wasseroberfläche senkrecht zur Richtung des Vektors steht, der sich aus der Beschleunigung der Schwerkraft g und dem Vektor der Coriolisbeschleunigung zusammensetzt.

Lösung: Die Coriolisbeschleunigung beträgt $b_c = 0{,}0175$ cm/sec² und ist nach Osten gerichtet. Das Wasser steht am rechten Ufer um 1,782 cm höher als am linken.

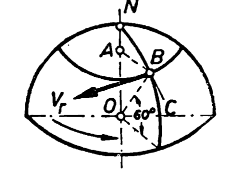
485. Die Hauptstrecke der Südeisenbahn nördlich von Melitopol (Sowjetunion) verläuft längs eines Meridians. Die Eisenbahnlokomotive fährt mit einer Geschwindigkeit von $v_r = 90$ km/h in nördlicher Richtung. Am Breitengrad $\varphi = 47°$ ist die Coriolisbeschleunigung der Lokomotive zu ermitteln.

Lösung: $b_c = 0{,}266$ cm/sec².

486. Auf einer Eisenbahnstrecke, die auf einem Kreis nördlicher Breite verläuft, fährt eine Lokomotive mit einer Geschwindigkeit $v_r = 20$ m/sec von West nach Ost. Es ist die Coriolisbeschleunigung b_c der Lokomotive zu ermitteln.

Lösung: $b_c = 0{,}291$ cm/sec^2.

487. Die Newa fließt von Osten nach Westen entlang des 60. nördlichen Breitengrades mit einer Geschwindigkeit von $v_r = 4$ km/h.



Es ist die Projektion der Coriolisbeschleunigung der Wasserteilchen auf die Tangente BC des entsprechenden Meridians zu ermitteln. Erdradius $R = 64 \cdot 10^5$ m.

Lösung: $b_{BC} = 1396 \cdot 10^{-5}$ cm/sec^2.

488. Die Newa fließt von Osten nach Westen entlang des 60. nördlichen Breitengrades mit einer Geschwindigkeit von $v_r = 4$ km/h.

Es sind die Komponenten der absoluten Beschleunigung der Wasserteilchen zu ermitteln. Erdradius $R = 64 \cdot 10^5$ m.

Lösung: $b_e = 1692 \cdot 10^{-3}$ cm/sec^2; $b_r = 386 \cdot 10^{-7}$ cm/sec^2;
$b_c = 1616 \cdot 10^{-5}$ cm/sec^2.

489. Es ist die absolute Beschleunigung der Kugeln eines WATTschen Zentrifugalreglers zu bestimmen. Im betrachteten Augenblick hat er eine Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\pi}{2}$ sec^{-1} und eine Winkelbeschleunigung $\varepsilon = 1$ sec^{-2}. Für die Spreizung der Reglerarme beträgt die Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$ sec^{-1} und die Winkelbeschleunigung $\varepsilon_1 = 0{,}4$ sec^{-2}. Die Reglerarmlänge ist $l = 50$ cm, der Achsenabstand der Aufhängepunkte $2e = 10$ cm, der Spreizungswinkel des Reglers im betrachteten Augenblick ist $2\alpha = 90°$. Die Kugeln sind als Punktmassen zu betrachten (vgl. Zeichnung zur Aufgabe 435).

Lösung: $b = 293{,}7$ cm/sec^2.

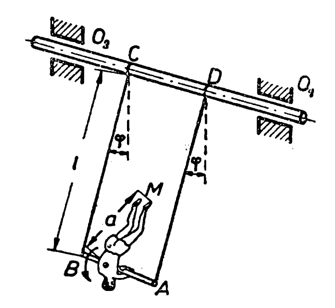
490. Es ist die absolute Beschleunigung der Kugeln eines WATTschen Zentrifugalreglers zu bestimmen, wenn die Maschinenbelastung geändert wird. Der Regler dreht sich mit einer Winkelgeschwindigkeit von $\omega = \pi$ sec^{-1}, und die Kugeln beginnen mit einer Geschwindigkeit von $v_r = 100$ cm/sec und einer Beschleunigung von $b_{rt} = 10$ cm/sec^2 zu sinken. Der Spreizungswinkel des Regulators beträgt $2\alpha = 60°$, die Länge der Reglerarme $l = 50$ cm. Der Abstand zwischen den Aufhängepunkten ist zu vernachlässigen. Die Kugeln sind als Punktmassen zu betrachten.

Lösung: $b = 671{,}3$ cm/sec^2.

491. Ein Lufttrapez $ABCD$ schaukelt um die horizontale Achse O_1O_2 nach der Gleichung $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$. Der Turner, der an der Querstange AB turnt, dreht sich um die Querstange mit relativer Winkelgeschwindigkeit ω = konst. Gegeben sind: $BC = AD = l$.

Zu ermitteln ist für die Zeit $t = \frac{\pi}{\omega}$ sec die absolute Beschleunigung des Punktes M an der Fußsohle des Turners, die sich von der Querstange AB im Abstand a befindet.

Zur Zeit $t = 0$ war der Turner in einer vertikalen Lage, mit dem Kopf nach oben. Das Trapez $ABCD$ nahm ebenfalls eine vertikale Lage ein.



Lösung: $b_M = \omega^2\,[\varphi_0^{\,2}\,(l - a) - a\,(2\varphi_0 + 1)]$ vertikal nach oben gerichtet, wenn der Wert in den Klammern positiv ist.

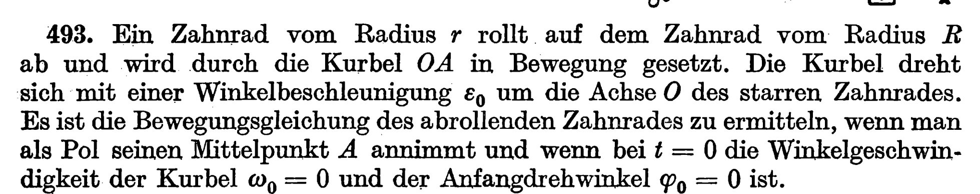
VI. Ebene Bewegung starrer Körper

19. Bewegungsgleichung einer ebenen Figur und ihrer Punkte

492. Das Lineal eines Ellipsenzirkels wird durch eine Kurbel OC, die sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 um die Achse O dreht, in Bewegung gesetzt.

Mit dem Punkt B als Pol soll die Gleichung der ebenen Bewegung des Lineals ermittelt werden. Es ist $OC = BC = AC = r$.

Lösung: $x_0 = 2r \cos \omega_0 t;\ y_0 = 0;\ \varphi = \omega_0 t.$



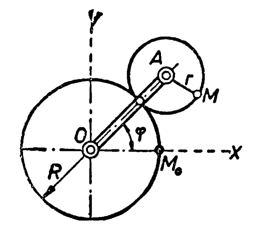
493. Ein Zahnrad vom Radius r rollt auf dem Zahnrad vom Radius R ab und wird durch die Kurbel OA in Bewegung gesetzt. Die Kurbel dreht sich mit einer Winkelbeschleunigung ε_0 um die Achse O des starren Zahnrades. Es ist die Bewegungsgleichung des abrollenden Zahnrades zu ermitteln, wenn man als Pol seinen Mittelpunkt A annimmt und wenn bei $t = 0$ die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel $\omega_0 = 0$ und der Anfangdrehwinkel $\varphi_0 = 0$ ist.

Lösung: $x_0 = (R + r) \cos \dfrac{\varepsilon_0 t^2}{2};$

$$y_0 = (R + r) \sin \frac{\varepsilon_0 t^2}{2};$$

$$\varphi_1 = \left(\frac{R}{r} + 1\right) \frac{\varepsilon_0 t^2}{2};$$

φ_1 ist der Drehwinkel des beweglichen Zahnrades.



494. Ein Zahnrad vom Radius r rollt innerhalb eines starren Zahnrades vom Radius R und wird von der Kurbel OA, die sich gleichförmig mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_0 um die Achse O des starren Zahnrades dreht, in Bewegung gesetzt.

Es ist vom beweglichen Zahnrad eine Bewegungsgleichung aufzustellen, wobei sein Mittelpunkt als Pol angenommen wird. Bei $t = 0$ ist $\varphi_0 = 0$.

Lösung: $x_0 = (R - r) \cos \omega_0 t;$

$$y_0 = (R - r) \sin \omega_0 t;$$

$$\psi = -\left(\frac{R}{r} - 1\right) \omega_0 t,$$

wobei φ der Drehwinkel der Stange ist und ψ den Drehwinkel des kleinen Rades bedeutet; das negative Vorzeichen deutet auf den gegenläufigen Drehsinn der Stange gegen das Zahnrad hin.

495. Es ist die Bewegungsgleichung der Kurbelstange einer Dampfmaschine zu ermitteln, wenn sich die Kurbel gleichförmig dreht. Als Pol der Kurbelstange ist der Punkt A (Kurbelbolzen) zu betrachten, r ist die Kurbellänge, l die Länge der Kurbelstange, ω_0 die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel. Bei $t = 0$ ist $\alpha = 0$ (siehe Zeichnung zur Aufgabe 408).

Lösung: $x = r \cos \omega_0 t$; $y = r \sin \omega_0 t$; $\varphi = -\arcsin \left(\frac{r}{l} \sin \omega_0 t\right)$.

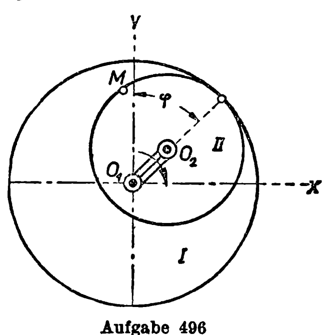
496. In einem starren Rad I mit dem Radius $r_1 = 20$ cm rollt ohne zu gleiten das Rad II mit dem Radius $r_2 = 12$ cm.

Es ist die Bewegungsgleichung vom Punkt M des Rades II im Koordinatensystem xy zu ermitteln. Der Koordinatenursprung liegt im Punkt O_1. Im Anfangsmoment mit $\varphi_0 = 0$ berührte der Punkt M das Rad I. Die Stange O_1O_2, die das Rad II in Bewegung setzt, hat die Drehzahl $n = 270$ U/min.

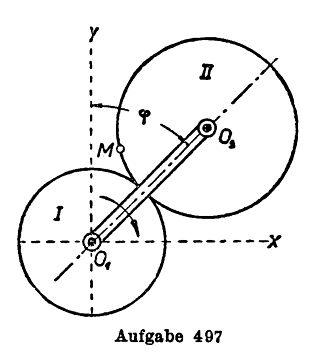
Lösung: $x_M = 8 \sin 9\pi t - 12 \sin 6\pi t$;
$y_M = 8 \cos 9\pi t + 12 \cos 6\pi t$.

497. Ein Rad II vom Radius $r_2 = 16$ cm rollt ohne zu gleiten auf dem starren Rad I mit dem Radius $r_1 = 12$ cm ab. Es ist die Bewegungsgleichung des Punktes M vom Rad II in bezug auf die Achsen $O_1 x$ und $O_1 y$ zu ermitteln. Der Koordinatenursprung liegt im Punkt O_1. Im Anfangsmoment mit $\varphi = 0$ berührte der Punkt M das Rad I. Die Kurbel O_1O_2 hat die Drehzahl $n = 240$ U/min.

Lösung: $x_M = 28 \sin 8\pi t - 16 \sin 14\pi t$;
$y_M = 28 \cos 8\pi t - 16 \cos 14\pi t$.



Aufgabe 496

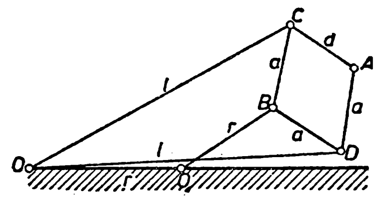


Aufgabe 497

498. Ein Inversor stellt einen Gelenkmechanismus dar, der aus einem Rhombus $ADBC$ mit der Seitenlänge a besteht, wobei die Spitzen C und D mit Hilfe der Stangen OC und OD von der Länge l einen Kreis beschreiben. Die Spitze B beschreibt einen anderen Kreis vom Radius $O_1B = OO_1 = r$.

Es ist die Bewegungsbahn der Spitze A zu ermitteln.

Lösung: Eine Gerade, die senkrecht zu OO_1 steht und den Abstand vom Punkt O $x = \frac{l^2 - a^2}{2r}$ hat.

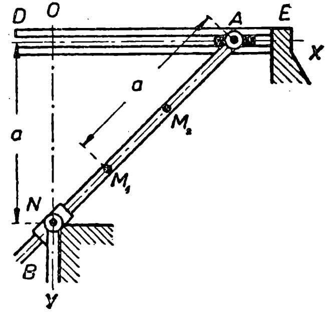


499. Eine Stange AB fällt ohne Anfangsgeschwindigkeit unter Einwirkung der Schwerkraft. Die Stange dreht sich gleichzeitig um den Schwerpunkt C mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega =$ konst., $AC = BC = l$.

Es ist die Bewegungsgleichung vom Punkt B zu ermitteln, wenn im Anfangsaugenblick die Stange AB horizontal und der Punkt B rechts lag. Die Schwerebeschleunigung ist g. Die Anfangslage vom Punkt C ist als Koordinatenursprung zu nehmen. Die Achse Oy ist vertikal nach unten gerichtet, die Achse Ox horizontal nach rechts.

Lösung: $x_B = l \cos \omega t$; $y_B = \frac{g t^2}{2} + l \sin \omega t$.

500. Ein Konchoidograph besteht aus einem Lineal AB, welches durch ein Gelenk im Punkt A des Gleitstückes, das im geraden Schlitz DE gleitet, befestigt ist. Das Lineal läuft durch ein Wenderohr, das sich frei um die starre Achse N dreht. Der Abstand der Achse N zur Achse Ox ist a.



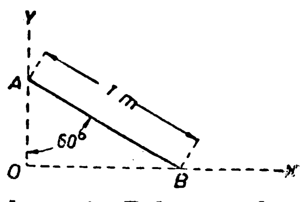
Es sind die Kurvengleichungen, die von den Punkten M_1 und M_2 des Lineals AB beschrieben werden, zu ermitteln, wenn der Abstand $AM_1 = a$ und $AM_2 = \frac{a}{2}$ ist.

Die Achsenkoordinaten sind auf der Zeichnung angegeben.

Lösung: 1) $x^2 y^2 = (a - y)^2 (a^2 - y^2)$;
2) $4 x^2 y^2 = (a - y)^2 (a^2 - 4 y^2)$.

20. Geschwindigkeiten von Körperpunkten bei ebener Bewegung — Momentaner Geschwindigkeitspol

501. Eine Stange von 1 m Länge stützt sich auf zwei senkrecht zueinander stehenden Geraden, die das x, y-Koordinatensystem darstellen.

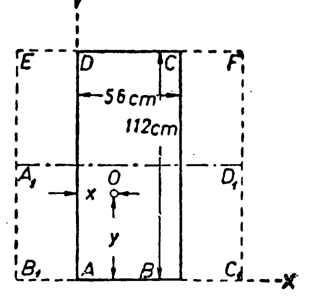


Es sind die Koordinaten x_G und y_G des momentanen Geschwindigkeitszentrums für den Augenblick zu bestimmen, in dem der Winkel $OAB = 60°$ ist. Der momentane Geschwindigkeitspol ist der Schnittpunkt zweier Bahnnormalen.

Lösung: $x = 0{,}866$ m; $y = 0{,}5$ m.

502. Die Platte eines zusammenlegbaren Tisches, die die Form eines Rechteckes $ABCD$ mit den Seiten $AB = 56$ cm und $AD = 112$ cm hat, dreht sich um den Zapfen O. Dabei nimmt sie die Lage $A_1B_1C_1D_1$ ein, wobei $AB_1 = BC_1$ ist. Beim Aufklappen erhält man ein Quadrat B_1EFC_1.

Es ist die Lage des Zapfens zu bestimmen.



Lösung: $x = 14$ cm; $y = 42$ cm.

503. Die Platte eines zusammenlegbaren Tisches von der Form eines Rechteckes mit den Seiten a und b wird durch Drehen um die Zapfenachse O aus der Lage $ABCD$ in die Lage $A_1B_1C_1D_1$ gebracht. Beim Aufklappen entsteht ein Rechteck mit den Seiten b und $2a$.

Es ist die Lage des Achsenzapfens O im Koordinatensystem zu ermitteln.

Lösung: $x = \frac{a}{4}$; $y = \frac{b}{2} - \frac{a}{4}$.

504. Es ist die Lage der momentanen Geschwindigkeitszentren für die Teile I und II eines dreigelenkigen Brückenbogens zu ermitteln, wenn durch Deformierung die Stütze A eine sehr geringe Verschiebung 1) in horizontaler, 2) in vertikaler Richtung erhält. Die Abmessungen und die Koordinatenachsen sind auf der Zeichnung angegeben.

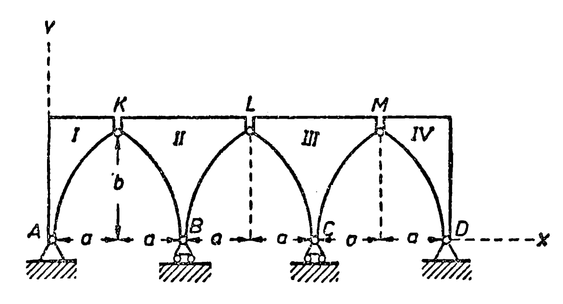
Lösung: 1) $x_{cI} = 0$, $y_{cI} = 0$; $x_{cII} = 2a$, $y_{cII} = 2b$;
2) $x_{cI} = 0$, $y_{cI} = 0$; $x_{cII} = 0$, $y_{cII} = 0$.

Aufgabe 503

Aufgabe 504

505. Eine Brücke besteht aus vier Teilen, die miteinander durch Gelenke K, L und M verbunden sind. Die Stützen A und D sind gelenkig gelagert, die Stützen B und C liegen auf Rollen.

Es sind die Lagen der momentanen Geschwindigkeitspole aller Brückenteile zu ermitteln, wenn durch Deformation die Stütze D eine horizontale Verschiebung erhält. Die Bauabmessungen und die Achsen sind aus der Zeichnung ersichtlich.



Lösung: $x_{cI} = y_{cI} = 0$; $x_{cII} = 2a$, $y_{cII} = 2b$;
$x_{cIII} = 4a$, $y_{cIII} = 0$; $x_{cIV} = 6a$, $y_{cIV} = 2b$.

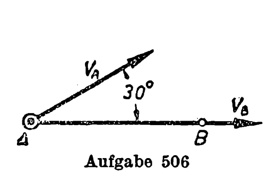
506. Eine Gerade AB bewegt sich in der Zeichnungsebene. In einem bestimmten Augenblick bildet die Geschwindigkeit $v_A = 180$ cm/sec des Punktes A mit der Geraden AB einen Winkel von 30°. Die Geschwindigkeitsrichtung des Punktes B fällt in diesem Augenblick mit der Richtung der Geraden AB zusammen.

Es ist die Geschwindigkeit v_B des Punktes B zu ermitteln.

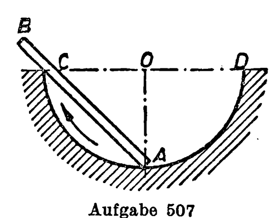
Lösung: $v_B = 156$ cm/sec.

507. Eine Gerade AB liegt im Punkt C auf, während das Ende A auf dem Halbkreis CAD gleitet. Es ist die Geschwindigkeit v_C des Stabpunktes C zu ermitteln, wenn das Stabende A senkrecht unter O liegt. Die Geschwindigkeit des Punktes A ist in diesem Augenblick 4 m/sec.

Lösung: $v_C = 2{,}83$ m/sec.



Aufgabe 506



Aufgabe 507

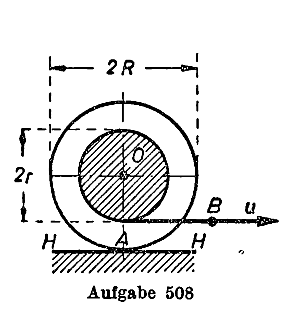
508. Eine Spule vom Radius R rollt ohne zu gleiten auf einer horizontalen Ebene HH. Um den mittleren Zylinderteil der Spule mit dem Radius r ist ein Faden gewickelt. Das Ende B wird mit einer horizontalen Geschwindigkeit u bewegt.

Es ist die Geschwindigkeit v der Spulenachse zu ermitteln.

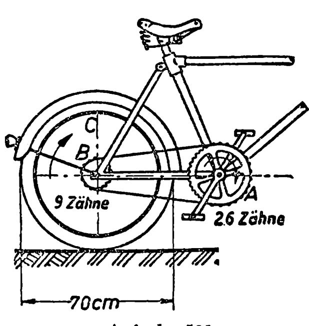
Lösung: $v = u \dfrac{R}{R - r}$.

509. Eine am Fahrrad angebrachte Kettenübersetzung besteht aus einer Kette, die um das Zahnrad A mit 26 Zähnen und das Zahnrad B mit 9 Zähnen gelegt ist. Das Zahnrad B ist fest mit dem Hinterrad C, dessen Durchmesser 70 cm beträgt, verbunden. Es ist die Geschwindigkeit des Fahrrades zu ermitteln, wenn das Rad A in einer Sekunde eine Umdrehung macht und das Rad C dabei ohne zu gleiten auf einer geraden Strecke abrollt.

Lösung: 22,87 km/h.



Aufgabe 508



Aufgabe 509

510. Ein Rad mit dem Radius $R = 0{,}5$ m rollt ohne zu gleiten auf einer geraden Strecke. Seine Geschwindigkeit ist konstant $v_0 = 10$ m/sec.

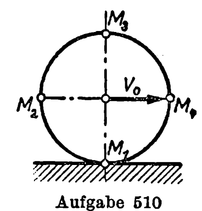
Es sind die Geschwindigkeiten der Punkte M_1, M_2, M_3 und M_4 sowie die Winkelgeschwindigkeit zu ermitteln.

Lösung: $\omega = 20\ \text{sec}^{-1}$;
$v_1 = 0$; $v_2 = 14{,}14$ m/sec;
$v_3 = 20$ m/sec; $v_4 = 14{,}14$ m/sec.

511. Zwei parallele Leisten bewegen sich in einer Richtung mit den konstanten Geschwindigkeiten $v_1 = 6$ m/sec und $v_2 = 2$ m/sec. Zwischen den Leisten läuft eine Scheibe vom Radius $a = 0{,}5$ m.

Es sind die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe und die Geschwindigkeit ihres Mittelpunktes zu ermitteln.

Lösung: $\omega = 4\ \text{sec}^{-1}$; $v_0 = 4$ m/sec.



Aufgabe 510

Aufgabe 511

512. Die Mittelpunktsgeschwindigkeiten der Hinterräder eines Autos in der Kurve einer horizontalen Strecke sind $v_1 = 18$ m/sec und $v_2 = 24$ m/sec.

Es ist der Radius des mittleren Streckenbogens zu ermitteln, wenn der Radabstand $l = 2$ m ist.

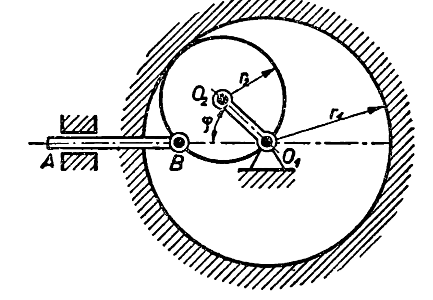
Lösung: $\varrho = 7$ m.

513. Eine Kurbel OA, die sich mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 2{,}5\ \text{sec}^{-1}$ um die Achse O eines starren Zahnrades vom Radius $r_2 = 15$ cm dreht, setzt das an ihrem Ende A aufgeschobene Zahnrad vom Radius $r_1 = 5$ cm in Bewegung. Es sind Größe und Richtung der Geschwindigkeiten der Punkte A, B, C, D und E des beweglichen Zahnrades zu ermitteln, wenn $CE \perp BD$ ist.

Lösung: $v_A = 50$ cm/sec; $v_B = 0$; $v_D = 100$ cm/sec;
$v_C = v_E = 70{,}7$ cm/sec.

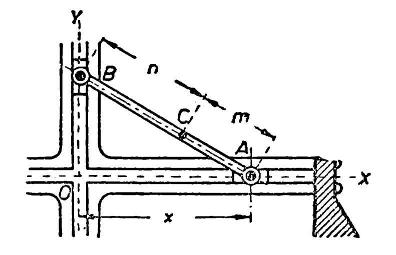
514. Ein Kreis II vom Radius $r_2 = 9$ cm rollt ohne zu gleiten in einem Kreis I vom Radius $r_1 = 18$ cm. Mit dem Kreis II ist durch ein Gelenk eine Stange AB verbunden.

Es ist die Geschwindigkeit dieser Stange AB bei $\varphi = 45°$ zu bestimmen. Die Kurbel O_1O_2 hat die Drehzahl $n = 180$ U/min. $\sphericalangle\ BO_1O_2$ wird mit φ bezeichnet.



Lösung: $v_B = 239{,}87$ cm/sec.

515. Das Lineal AB eines Ellipsenzirkels hat die Länge l. Es bewegt sich mit dem Ende A entlang der Achse Ox und mit dem Ende B entlang der Achse Oy. Das Ende A des Lineals führt harmonische Schwingungen nach $x = a \cdot \sin \omega t$ aus. Dabei ist $a < l$.



Es ist die Geschwindigkeit v des Punktes C zu ermitteln, wobei gegeben ist, daß $CA = m$, $BC = n$ und $\omega =$ konst. sind.

Lösung: $v = \frac{a\omega}{l} \cdot \cos \omega t \sqrt{n^2 - m^2 + \frac{m^2 l^2}{l^2 - a^2 \sin^2 \omega t}}$.

516. In einem Kurbelmechanismus hat die Kurbel eine Länge von $OA = 40$ cm. Die Schubstange AB ist 2 m lang. Die Kurbel dreht sich gleichmäßig mit einer Winkelgeschwindigkeit, der 180 U/min entsprechen. Es ist die Winkelgeschwindigkeit ω der Schubstange und die Geschwindigkeit ihres mittleren Punktes M bei den vier Kurbellagen mit $\sphericalangle\, AOB = 0, \pi/2; \pi; 3\pi/2$ zu bestimmen.

Lösung: 1) $\omega = -\frac{6}{5}\pi \sec^{-1}$; $v = 377$ cm/sec;

2) $\omega = 0$; $v = 754$ cm/sec;

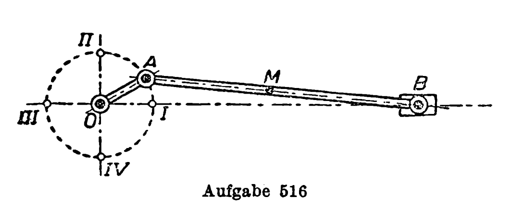
3) $\omega = \frac{6}{5}\pi \sec^{-1}$; $v = 377$ cm/sec;

4) $\omega = 0$; $v = 754$ cm/sec.

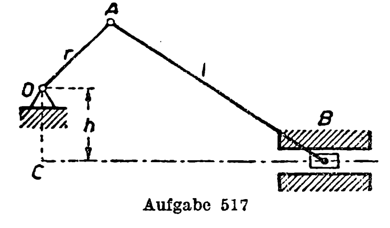
Das negative Vorzeichen weist darauf hin, daß sich die Kurbel gegen die Kurbelstange in gegenläufigem Drehsinn bewegt.

517. Es ist die Geschwindigkeit des Gleitstückes B eines exzentrischen Kurbelmechanismus zu bestimmen, wenn sich die Kurbel in den horizontalen und vertikalen Lagen befindet. Die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel beträgt $\omega = 1{,}5 \sec^{-1}$, die Maße sind $OA = 40$ cm; $AB = 200$ cm, $OC = 20$ cm.

Lösung: $v_1 = v_3 = 6{,}03$ cm/sec; $v_2 = v_4 = 60$ cm/sec.



Aufgabe 516



Aufgabe 517

518. Eine Kurbel OB dreht sich um die Achse O mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2 \sec^{-1}$ und treibt die Stange AD an. Die Punkte A und C der Stange bewegen sich entlang der Achse Ox und Oy.

Es sind die Geschwindigkeit des Punktes D der Stange bei $\varphi = 45°$ zu ermitteln und die Gleichung der Bewegungsbahn dieses Punktes aufzustellen, wenn $AB = OB = BC = CD = 12$ cm ist.

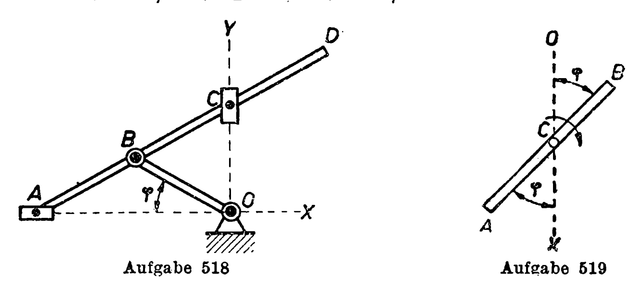
Lösung: $v = 53{,}66$ cm/sec; $(x/12)^2 + (y/36)^2 = 1$.

519. Eine Stange fällt in vertikaler Ebene unter dem Einfluß der Schwerkraft, wobei sie sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2{,}75\ \mathrm{sec}^{-1}$ um eine Achse durch den Punkt C dreht. Zu Anfang ist die Schwerpunktsgeschwindigkeit $v_s = 0$, die Stange liegt vertikal.

Es sind die Geschwindigkeiten der Punkte A und B für den Augenblick zu ermitteln, in dem die Stange sich um den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$ gedreht hat. Die Stablänge AB beträgt 66 cm.

Bemerkung: Der Schwerpunkt der Stange bewegt sich vertikal mit einer Beschleunigung $g = 980\ \mathrm{cm/sec}^2$.

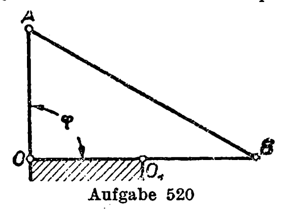
Lösung: $v_A = 225{,}3\ \mathrm{cm/sec}$; $v_B = 350{,}6\ \mathrm{cm/sec}$.



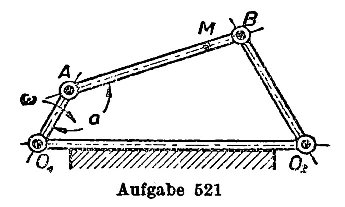
Aufgabe 518 Aufgabe 519

520. Es sind die Winkelgeschwindigkeiten der Koppel AB und der Kurbel O_1B eines viergliedrigen Mechanismus $OABO_1$ für den Zeitpunkt zu ermitteln, in dem $\varphi = 90°$ und die Kurbel O_1B die Verlängerung des Gliedes OO_1 ist. Es ist $OA = O_1B = {}^1/_2\ AB$. Die Kurbel OA hat eine Winkelgeschwindigkeit $\omega = 3\ \mathrm{sec}^{-1}$.

Lösung: $\omega_{AB} = 3\ \mathrm{sec}^{-1}$; $\omega_{O_1B} = 5{,}2\ \mathrm{sec}^{-1}$.



Aufgabe 520



Aufgabe 521

521. Es ist ein Viergelenk gegeben. Die Stangenlänge ist $O_1A = a$ und ihre Winkelgeschwindigkeit ω.

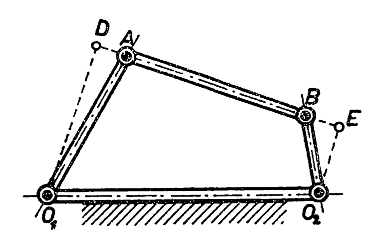
Es ist die Geschwindigkeitskomponente v in Stangenrichtung des Punktes M zu bestimmen. Der Winkel O_1AB habe den Wert α.

Lösung: $v = a\omega \sin \alpha$.

522. Die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel O_1A eines Viergelenkes ist ω_1.

Es ist die Winkelgeschwindigkeit ω_2 der Schwinge O_2B als Funktion der Winkelgeschwindigkeit ω_1 sowie der kürzesten Abstände O_1D und O_2E zu ermitteln.

Lösung: $\omega_2 = \omega_1 \dfrac{O_1D}{O_2E}$.



523. Im Viergelenk $ABCD$ dreht sich die Antriebskurbel AB mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 6\,\pi\ \mathrm{sec}^{-1}$.

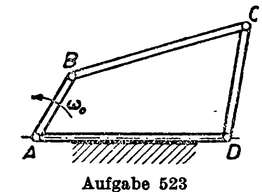
Es sind die Winkelgeschwindigkeiten der Schwinge CD und der Koppel BC für den Augenblick zu ermitteln, in dem die Kurbel AB und die Koppel BC eine Gerade bilden. $BC = 3\,AB$.

Lösung: $\omega_{BC} = 2\,\pi\ \mathrm{sec}^{-1}$; $\omega_{CD} = 0$.

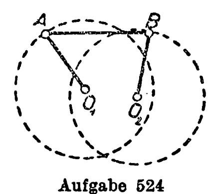
524. Bei einer Sortiermaschine dreht sich die Kurbel O_1A mit 60 U/min um die Achse O_1. Mit der Koppel AB wird die Bewegung auf die Schwinge O_2B übertragen, die sich um die Achse O_2 dreht. Gegeben ist: $O_1A = O_2B = AB = 10$ cm, $O_1O_2 = 4$ cm.

Es ist die Umfangsgeschwindigkeit des Punktes B für drei Lagen des Mechanismus zu ermitteln: 1. Wenn Punkt A auf der nach links verlängerten Geraden durch O_1O_2 liegt. 2. Wenn die Koppel AB parallel zur Geraden O_1O_2 liegt. 3. Wenn der Punkt B auf der nach rechts verlängerten Geraden durch O_1O_2 liegt.

Lösung: $v_1 = 44{,}9$ cm/sec; $v_2 = 62{,}8$ cm/sec;
$v_3 = 88$ cm/sec.



Aufgabe 523

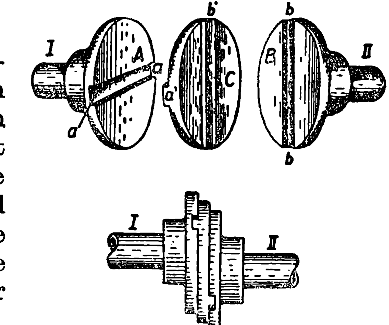


Aufgabe 524

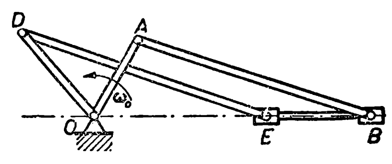
525. Zur Verbindung zweier paralleler, nicht fluchtender Wellen wird untenstehend gezeichnete OLDHAM-Kupplung verwendet. Bei ihr ermöglicht das Zwischenstück C mit zwei Geradführungen a' bzw. b' unter 90° senkrecht zur Welle (umlaufende Kreuzschleife) Querbewegungen der Welle.

Es ist nachzuweisen, daß die Winkelgeschwindigkeiten beider Wellen gleich sind, und es ist das momentane Geschwindigkeitszentrum der Scheibe C zu bestimmen.

Lösung: Das momentane Geschwindigkeitszentrum der Scheibe C liegt auf dem Schnittpunkt der Senkrechten auf den Leisten a' bzw. b' im Durchstoßpunkt der jeweiligen Achse. Die Scheibe führt Bewegungen längs der Schenkel eines rechten Winkels $a'Ob'$ aus. Die Schenkel laufen ständig durch die festen Punkte O_1 und O_2. (O ist der Mittelpunkt der Scheibe C.)



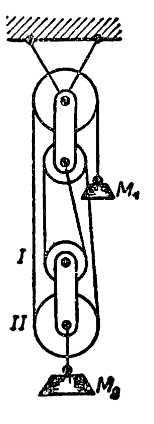
526. Die Gleitstücke B und E eines Doppelkurbelmechanismus sind durch die Stange BE verbunden. Die Antriebskurbel OA und die getriebene Kurbel OD drehen sich um die gemeinsame feste Achse O, die senkrecht zur Zeichenfläche steht.



Es sind die Winkelgeschwindigkeiten der getriebenen Kurbel OD und der Kurbelstange DE in dem Augenblick zu bestimmen, in dem die Antriebskurbel OA senkrecht zur Gleitstückführung steht. Die Antriebskurbel dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 12\,\text{sec}^{-1}$. Die gegebenen Abmessungen sind: $OA = 10$ cm, $OD = 12$ cm, $AB = 26$ cm, $EB = 12$ cm und $DE = 12\sqrt{3}$ cm.

Lösung: $\omega_{OD} = 10\sqrt{3}\,\text{sec}^{-1}$; $\omega_{DE} = 10\sqrt{3}/3\,\text{sec}^{-1}$.

527. An einen Flaschenzug, dessen Flaschen je zwei Scheiben haben, hängen die Lasten M_1 und M_2.

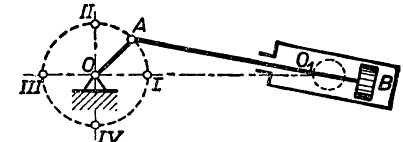


Es sind die Geschwindigkeiten der tiefsten Scheibenpunkte der beweglichen Flasche zu ermitteln. Ferner sind die Winkelgeschwindigkeiten der Scheiben und die Geschwindigkeit der Last M_2 zu bestimmen, wenn die Last M_1 mit einer Geschwindigkeit $v_1 = 12$ cm/sec absinkt ($r_{\text{I}} = 6$ cm, $r_{\text{II}} = 90$ cm).

Lösung: $v_{\text{I}} = 4{,}24$ cm/sec; $v_{\text{II}} = 9{,}49$ cm/sec;
$\omega_{\text{I}} = 0{,}5$ 1/sec; $\omega_{\text{II}} = 1\,\text{sec}^{-1}$; $v_2 = 3$ cm/sec.

528. Bei einer Dampfmaschine mit oszillierendem Zylinder ist die Kurbel $OA = 12$ cm lang. Der Abstand zwischen Wellenachse O und Zylinderzapfen O_1 ist $OO_1 = 60$ cm, die Kurbelstange $AB = 60$ cm lang.

Es soll die Geschwindigkeit des Kolbens für die vier in der Zeichnung angegebenen Lagen der Kurbel ermittelt werden. Die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel ist $\omega = 5\,\text{sec}^{-1} = \text{konst.}$



Lösung: $v_1 = 15$ cm/sec; $v_3 = 10$ cm/sec;
$v_2 = v_4 = 58{,}5$ cm/sec.

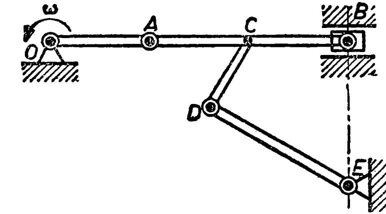
529. Bei einer Dampfmaschine mit oszillierendem Zylinder ist die Kurbel OA 15 cm lang. Ihre Winkelgeschwindigkeit ist $\omega_0 = 15\,\text{sec}^{-1} = \text{konst.}$

Es sollen die Kolbengeschwindigkeit und die Winkelgeschwindigkeit des Zylinders für den Augenblick bestimmt werden, in dem die Kurbel senkrecht zur Kolbenachse steht. (Siehe Zeichnung zur Aufgabe 528.)

Lösung: $\omega = 0$; $v = 225$ cm/sec.

530. Bei einem Kurbelmechanismus ist durch ein Gelenk in der Mitte der Stange AB die Stange CD und daran die Stange DE angeschlossen.

Es ist die Winkelgeschwindigkeit der Stange DE in der in der Zeichnung angegebenen Lage des Kurbelmechanismus zu ermitteln, wo die Punkte B und E senkrecht untereinander liegen.

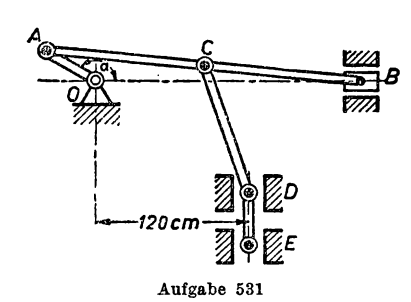


Die Winkelgeschwindigkeit ω der Kurbel OA beträgt $8\ \text{sec}^{-1}$, $OA = 25$ cm, $DE = 100$ cm, $\sphericalangle\ CDE = 90°$, $\sphericalangle\ BED = 30°$.

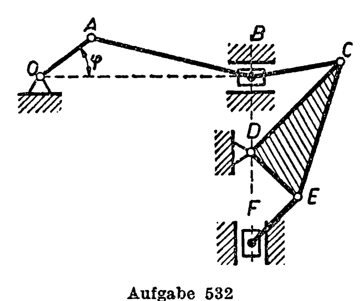
Lösung: $\omega_{DE} = 0{,}5\ \text{sec}^{-1}$.

531. Es ist die Geschwindigkeit der Stange DE eines Dampfsteuerschiebers bei vier Lagen der Kurbel OA (zwei vertikalen und zwei horizontalen) zu ermitteln. Die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel ist $\omega =$ konst. $= 20\ \text{sec}^{-1}$. Es sind die folgenden Abmessungen gegeben: $OA = 40$ cm, $AC = 20\sqrt{37}$ cm, $CB = 20\sqrt{37}$ cm.

Lösung: $v_1 = 400$ cm/sec für $\alpha = 0°$;
$v_2 = 0$ für $\alpha = 90°$;
$v_3 = -400$ cm/sec für $\alpha = 180°$;
$v_4 = 0$ für $\alpha = 270°$.



Aufgabe 531



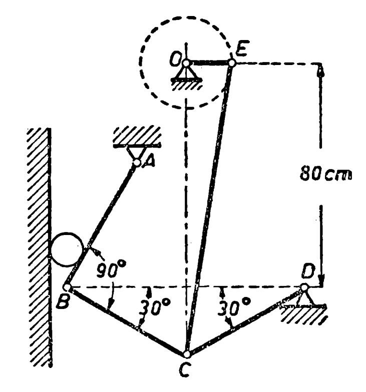
Aufgabe 532

532. Um die Bewegung der Dampfmaschine auf die Luftpumpe zu übertragen, wird ein Getriebe (siehe Zeichnung) zwischengeschaltet. Der Winkel CDE beträgt 90°.

Es ist die Geschwindigkeit des Punktes F für den Augenblick zu ermitteln, in dem die Winkel $\varphi = 30°$, $DEF = 90°$ und $EDF = 30°$ sind. Die Punkte B, D und F befinden sich in diesem Augenblick auf einer Senkrechten. Außerdem ist gegeben: $OA = 10$ cm, $BD = 24{,}4$ cm, $AB = 40$ cm, $DE = 20$ cm. Die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel OA ist $4\ \text{sec}^{-1}$.

Lösung: $v_F = 39{,}94$ cm/sec.

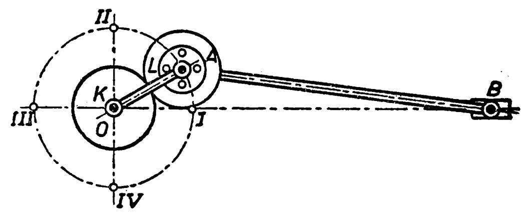
533. Die um das Lager A pendelnde Quetschbacke AB einer Zerkleinerungsmaschine mit einer Länge von 60 cm wird durch die 10 cm lange Kurbel OE mit $n = 100$ U/min über ein Hebelsystem BC, CD und CE in Bewegung gesetzt. Es ist die Winkelgeschwindigkeit der Quetschbacke AB in der auf der Zeichnung angegebenen Lage zu ermitteln, wenn $BC = CD = 40$ cm beträgt.



Lösung: $\omega = 1{,}852\ \text{sec}^{-1}$.

534. Auf einer Achse O sind ein Zahnrad K vom Durchmesser 20 cm und eine Kurbel OA von 20 cm Länge gelagert. Das Rad und die Kurbel sind miteinander nicht verbunden. An der Kurbelstange AB ist ein Zahnrad L vom Durchmesser 20 cm fest angebracht. Die Kurbelstange AB ist 1 m lang. Das Rad K dreht sich mit konstanter Drehzahl $n = 60$ U/min, erfaßt dabei die Zähne des Rades L und setzt die Kurbelstange AB und die Kurbel OA in Bewegung. Der ganze Mechanismus liegt in einer vertikalen Ebene.

Es ist die Winkelgeschwindigkeit ω_1 der Kurbel OA in vier Lagen, zwei horizontalen und zwei vertikalen, zu ermitteln.



Lösung: 1) $\omega_1 = \frac{10}{11}\pi\ \text{sec}^{-1}$; 3) $\omega_1 = \frac{10\pi}{9}\ \text{sec}^{-1}$;
2) $\omega_1 = \pi\ \text{sec}^{-1}$; 4) $\omega_1 = \pi\ \text{sec}^{-1}$.

535. In einem WATTschen Planetenradgetriebe ist die Kurbel lose auf die Achse O des Zahnrades vom Radius $R = 25$ cm aufgesetzt. Das Zahnrad dreht sich um die Achse O mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = \text{konst.} = 10\ \text{sec}^{-1}$. Mit der Kurbel OA ist die Kurbelstange $AB = 150$ cm verbunden. Dieselbe bildet mit dem Zahnrad vom Radius $r = 10$ cm eine starre Verbindung.

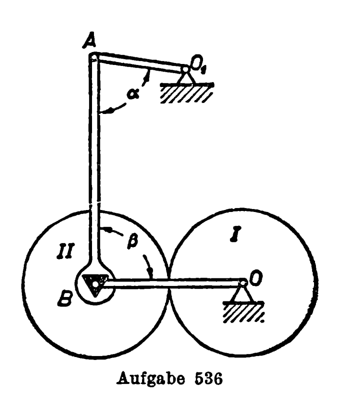
Es ist die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel bei zwei vertikalen und zwei horizontalen Lagen derselben zu ermitteln.

Lösung: $\omega_1 = 17{,}81\ \text{sec}^{-1}$;
$\omega_2 = \omega_4 = 16{,}67\ \text{sec}^{-1}$;
$\omega_3 = 15{,}62\ \text{sec}^{-1}$.

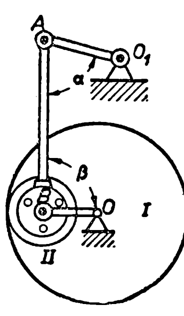
536. Ein Getriebe nach beistehender Zeichnung überträgt die Bewegung der Kurbel O_1A durch die Koppel AB und das Rad II auf die Schwinge BO und das Rad I.

Es sind die Winkelgeschwindigkeiten der Schwinge OB und des Rades I in dem Augenblicke zu ermitteln, in dem $\alpha = 60°, \beta = 90°$ ist. $r_1 = r_2 = 30\sqrt{3}$ cm, $O_1A = 75$ cm, $AB = 150$ cm, die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel beträgt $\omega_0 = 6 \text{ sec}^{-1}$.

Lösung: $\omega_{0B} = 3{,}75 \text{ sec}^{-1}$; $\omega_1 = 6 \text{ sec}^{-1}$.



Aufgabe 536



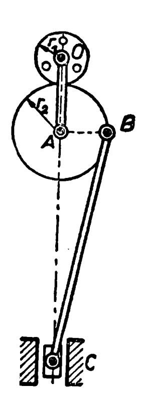
Aufgabe 537

537. Ein Planetenradgetriebe besteht aus einem Hebel O_1A, der die Kurbelstange AB, die Kurbel OB und das Zahnrad I mit dem Radius $R_1 = 25$ cm in Bewegung setzt. An der Kurbelstange AB ist ein Zahnrad II mit dem Radius $r_2 = 10$ cm befestigt.

Es sind die Winkelgeschwindigkeit des Ausgleichhebels O_1A und des Rades I in dem Augenblick zu bestimmen, in dem $\alpha = 45°$ und $\beta = 90°$ ist. $O_1A = 30\sqrt{2}$ cm, $AB = 150$ cm, die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel OB ist $\omega = 8 \text{ sec}^{-1}$.

Lösung: $\omega_1 = 5{,}12 \text{ sec}^{-1}$; $\omega_0 = 4 \text{ sec}^{-1}$.

538. Eine Kurbel $OA = 30$ cm dreht sich um die Achse O mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 0{,}5 \text{ sec}^{-1}$. Das Zahnrad mit dem Radius $r_2 = 20$ cm rollt auf dem unbeweglichen Rad mit dem Radius $r_1 = 10$ cm ab und setzt die mit ihm verbundene Pleuelstange $BC = 20\sqrt{26}$ cm in Bewegung.



Es sind die Winkelgeschwindigkeit der Pleuelstange und die Geschwindigkeiten der Punkte B und C für den Augenblick zu ermitteln, in dem der Radius AB senkrecht zur Kurbel OA steht.

Lösung: $\omega_{BC} = 0{,}15 \text{ sec}^{-1}$; $v_B = 21{,}2$ cm/sec; $v_C = 18$ cm/sec.

539. Bei einer Dampfmaschine mit oszillierendem Zylinder ist die Länge der Kurbel $OA = r$ und der Abstand $OO_1 = a$. Die Kurbel dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_0.

Es ist die Winkelgeschwindigkeit ω_1 der Kurbelstange AB als Funktion des Drehwinkels φ der Kurbel zu ermitteln. Es sind die höchsten und die tiefsten Werte ω_1 zu bestimmen sowie die Werte des Winkels φ, bei dem ω_1 gleich Null ist. (Siehe Zeichnung zur Aufgabe 528.)

Lösung: $\omega_1 = \dfrac{\omega_0 r\,(a \cos\varphi - r)}{a^2 + r^2 - 2\,ar\cos\varphi}$; $\omega_{1\,\max} = \dfrac{\omega_0 r}{a - r}$ für $\varphi = 0$;

$\omega_{1\,\min} = -\dfrac{\omega_0 r}{a + r}$ für $\varphi = \pi$; $\omega_1 = 0$ für $\varphi = \arccos\dfrac{r}{a}$.

540. Unter Beibehaltung der Bedingungen der vorangegangenen Aufgabe 539 ist die Winkelbeschleunigung der Kurbelstange AB als Funktion des Drehwinkels φ der Kurbel zu ermitteln. Ebenfalls ist zu bestimmen, unter welchen Bedingungen sich die Kurbelstange gleichförmig dreht.

Lösung: 1) $\varepsilon_1 = \dfrac{\omega_0^2 r\,a \sin\varphi\,(r^2 - a^2)}{(a^2 + r^2 - 2\,ar\cos\varphi)^2}$;

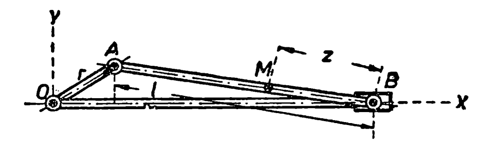
2) für $a = r$.

541. Für ein Kurbelgetriebe sind die Komponenten der Geschwindigkeit und der Beschleunigung eines beliebigen Punktes M der Kurbelstange AB zu bestimmen. Die Winkelgeschwindigkeit ω der Kurbel OA ist konstant, ihre Länge r klein gegen l. Die Lage des Punktes M wird durch seinen Abstand von der Achse des Kreuzkopfbolzens $MB = z$ bestimmt.

Bemerkung: Für die Formel

$$\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\sin\varphi\right)^2} \quad (\varphi = \omega t = \sphericalangle AOB),$$

die sich bei der Lösung der Aufgabe ergibt, wird eine Reihenentwicklung durchgeführt. Die Glieder höherer Ordnung werden vernachlässigt.



Lösung: $v_x = -\omega\left[r\sin\varphi + \dfrac{(l-z)\,r^2}{2\,l^2}\sin 2\varphi\right]$; $v_y = \dfrac{zr\,\omega}{l}\cos\varphi$;

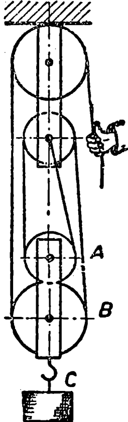
$b_x = -\omega^2\left[r\cos\varphi + \dfrac{(l-z)\,r^2}{l^2}\cos 2\varphi\right]$; $b_y = -\dfrac{zr}{l}\,\omega^2\sin\varphi$.

21. Rast- und Gangpolbahnen

542. Es sind die Polbahnen für die Bewegung der Stange AB zu ermitteln (vgl. Aufgabe 501).

Lösung: Gangpolbahn: Kreis mit dem Radius 0,5 m, Mittelpunkt in der Mitte der Stange AB. Rastpolbahn: Kreis mit Radius 1 m, Mittelpunkt im Punkt O.

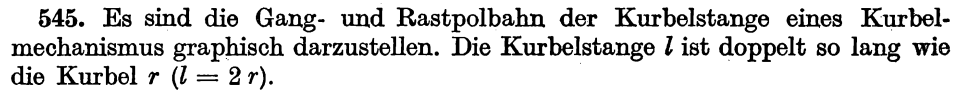
543. Zu ermitteln sind die Gang- und Rastpolbahn der Scheiben A und B eines Flaschenzuges, dessen Unterflasche C gehoben wird. Die Radien der Scheiben sind r_A und r_B.





Lösung: Gangpolbahn: 1) Scheibe A: Kreis mit dem Radius r_A; 2) Scheibe B: Kreis mit dem Radius $^1/_3\ r_B$. Rastpolbahn: Vertikale Tangenten an die bewegliche Polbahn (an ihrer rechten Seite).

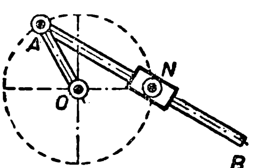
544. Es sind analytisch die Rast- und Gangpolbahn der Kurbelstange AB, deren Länge der Länge der Kurbel $OA = r$ gleich ist, zu ermitteln.



Lösung: Rastpolbahn: Kreis mit dem Radius $2\,r$, Mittelpunkt im Punkt O. Gangpolbahn: Kreis mit dem Radius r, Mittelpunkt im Punkt A des Kurbelbolzens.

545. Es sind die Gang- und Rastpolbahn der Kurbelstange eines Kurbelmechanismus graphisch darzustellen. Die Kurbelstange l ist doppelt so lang wie die Kurbel r ($l = 2\,r$).

546. Die Kurbel eines Koppelschleifengetriebes nach beistehender Zeichnung dreht sich gleichförmig. Es sind die Polbahnen zu ermitteln.



Lösung: Rastpolbahn: Kreis mit dem Radius r, Mittelpunkt im Punkt O. Gangpolbahn: Kreis mit dem Radius $2\,r$, Mittelpunkt im Punkt A'.

547. Es sind die Gang- und die Rastpolbahn des Gliedes CD eines Antiparallelogramms zu ermitteln. Die Gelenke A und B sind im Gestell gelagert. Gegeben ist: $AB = CD = b$, $AD = BC = a$ und $a < b$.

Lösung: Rastpolbahn: Hyperbel mit den Brennpunkten in den Punkten A und B.

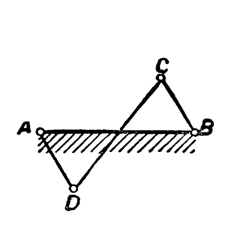
Gangpolbahn: Hyperbel mit den Brennpunkten in den Punkten C und D. Die Halbachsen beider Hyperbeln sind $a/2$.

548. Es sind die Rast- und die Gangpolbahn des Gliedes BC eines Antiparallelogramms zu ermitteln. Die Gelenke A und D sind im Gestell gelagert. Gegeben ist: $AB = CD = b$, $AD = CB = a$ und $a < b$.

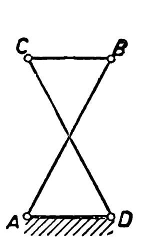
Lösung: Rastpolbahn: Ellipse mit den Brennpunkten in den Punkten A und D und mit den Halbachsen

$$\frac{b}{2} \text{ und } \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2}.$$

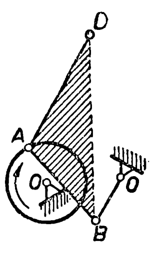
Gangpolbahn: Ellipse mit den gleichen Halbachsen, jedoch mit den Brennpunkten in den Punkten B und C.



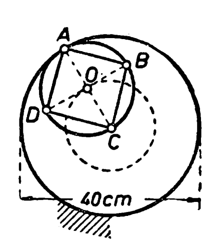
Aufgabe 547



Aufgabe 548



Aufgabe 549



Aufgabe 550

549. Es sind die Polbahnen der Kurbelstange AB eines Doppelkurbelmechanismus (vgl. Zeichnung) graphisch darzustellen.

550. In einem Kreis mit dem Radius von 20 cm rollt ohne zu gleiten ein Kreis mit dem Radius 10 cm.

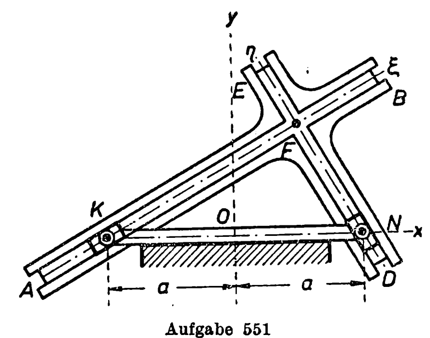
Es sind die Gang- und die Rastpolbahn zu ermitteln. Wie groß ist die Geschwindigkeit der Spitzen ABC des Quadrates, das in dem kleineren Kreis eingezeichnet ist? Die Spitze A möge sich im betrachteten Augenblick auf dem großen Kreis befinden. Der Kreismittelpunkt O beschreibt in einer Sekunde eine Umdrehung.

Lösung: $v_A = 0$; $v_B = 88{,}84$ cm/sec; $v_C = 125{,}66$ cm/sec.

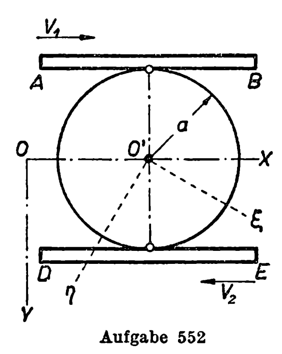
551. Zwei Kulissen AB und DE sind im Punkt F biegesteif unter einem rechten Winkel miteinander verbunden. Der Stein K gleitet in AB, während der Stein N in ED gleitet. Der Abstand KN beträgt $2a$. Es sind die Polbahngleichungen dieser Bewegung zu ermitteln. Die Koordinatenachsen sind in der Zeichnung angegeben.

Lösung: 1) $x_C^2 + y_C^2 = a^2$;

2) $\xi_C^2 + \eta_C^2 = 4a^2$.



Aufgabe 551



Aufgabe 552

552. Zwei parallele Leisten AB und DE bewegen sich in entgegengesetzter Richtung mit den Geschwindigkeiten v_1 bzw. v_2. Zwischen den Leisten rollt eine Scheibe mit dem Radius a. Es sind die Polbahngleichungen der Scheibe zu ermitteln.

Wie groß sind die Geschwindigkeit v_0 des Mittelpunktes O der Scheibe und ihre Winkelgeschwindigkeit ω? Die Koordinatenachsen sind in der Zeichnung angegeben.

Lösung: 1) $y_C = a \dfrac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}$.

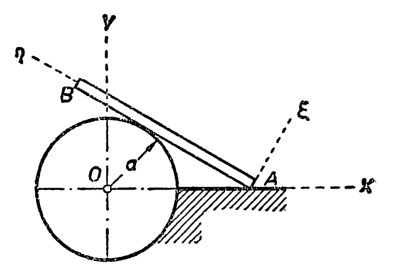
2) $\xi_C^2 + \eta_C^2 = a^2 \left(\dfrac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\right)^2$.

3) Die Geschwindigkeit des Scheibenmittelpunktes ist in Richtung der größeren der gegebenen Geschwindigkeiten gerichtet:

$$v_0 = \frac{v_1 - v_2}{2}.$$

4) $\omega = \dfrac{v_1 + v_2}{2a}$.

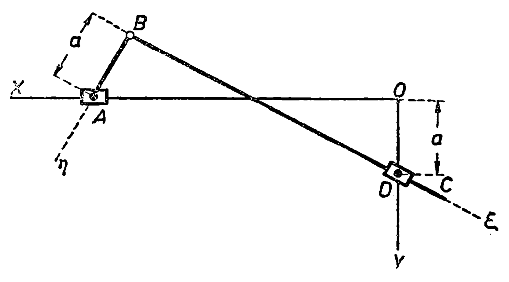
553. Es sind die Gleichungen der Rast- und der Gangpolbahnen einer Stange AB zu ermitteln; sie stützt sich auf den Kreis vom Radius a, mit dem Punkt A gleitet sie entlang der Geraden Ox. Die Koordinatenachsen sind in der Zeichnung angegeben.



Lösung: 1) $x_C^2\,(x_C^2 - a^2) - a^2\,y^2_C = 0$;

2) $\eta_C^2 = a\,\xi_C$.

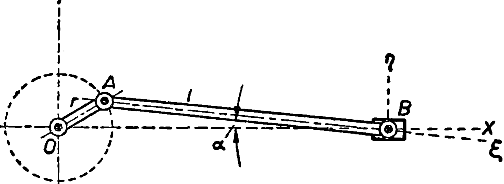
554. Ein rechter Winkel ABC verschiebt sich so, daß der Punkt A auf der Achse Ox gleitet und der Schenkel BC durch den festen Punkt D der Achse Oy verläuft.



Es sind die Gleichungen der Rast- und Gangpolbahnen zu ermitteln, wenn gegeben ist, daß $AB = OD = a$ ist.

Lösung: $x_C^2 = a\ (2\,y_C - a)$; $\xi_C^2 = a\ (2\,\eta_C - a)$.

555. Es sind die angenäherten Gleichungen der Rast- und Gangpolbahnen der Kurbelstange AB eines Kurbelmechanismus zu ermitteln. Es wird angenommen, daß die Länge der Kurbelstange $AB = l$ im Vergleich zur Länge der Kurbel $OA = r$ bedeutend größer ist und damit auch $\sin\alpha = \alpha$ und $\cos\alpha = 1$ gesetzt werden kann. Die Koordinatenachsen sind in der Zeichnung angegeben.



Lösung: 1) $(x_C - l)^2\ (x_C^2 + y_C^2) = r^2\, x_C^2$;
2) $l^2\, \xi_C^2\ (l^2 + \eta_C^2) = r^2\, \eta_C^4$.

22. Beschleunigung von Körperpunkten bei ebener Bewegung — Momentanes Beschleunigungszentrum

556. Es ist nachzuweisen, daß in dem Augenblick, in dem $\omega = 0$ ist, die Beschleunigungskomponenten zweier Punkte einer ebenen Figur auf einer Geraden, die die Punkte verbindet, gleich sind.

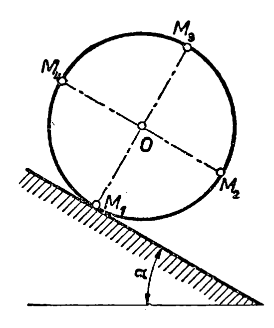
557. Ein Straßenbahnwagen fährt auf einer geraden horizontalen Strecke mit einer Verzögerung $b_0 = 2\ \mathrm{m/sec^2}$. Die Geschwindigkeit im gegebenen Augenblick beträgt $v_0 = 1\ \mathrm{m/sec}$. Die Räder rollen auf den Schienen ohne zu gleiten.

Es sind die Beschleunigungen der Laufradpunkte M_1, M_2, M_3 und M_4 in der gezeichneten Lage zu bestimmen. Der Radradius ist $R = 0{,}5$ m, der Radius, auf dem die vier Punkte liegen, ist $r = 0{,}25$ m.

Lösung: $b_1 = 2{,}449\ \mathrm{m/sec^2}$; $b_2 = 3{,}414\ \mathrm{m/sec^2}$;
$b_3 = 2{,}449\ \mathrm{m/sec^2}$; $b_4 = 0{,}586\ \mathrm{m/sec^2}$.

558. Ein Rad rollt ohne zu gleiten auf einer schiefen Ebene.

Es sind die Beschleunigungen der vier Punkte M_1, M_2, M_3 und M_4 des Rades in der gezeichneten Lage zu bestimmen. Im betrachteten Zeitpunkt ist die Geschwindigkeit des Radmittelpunktes $v_0 = 1$ m/sec, die Beschleunigung des Radmittelpunktes $b_0 = 3$ m/sec² und der Radradius $R = 0{,}5$ m.



Lösung: $b_1 = 2$ m/sec²; $b_2 = 3{,}16$ m/sec²;
$b_3 = 6{,}32$ m/sec²; $b_4 = 5{,}83$ m/sec².

559. Ein Rad mit dem Radius $R = 0{,}5$ m rollt ohne zu gleiten auf einer geraden Schiene. Im betrachteten Zeitpunkt hat der Mittelpunkt O eine Geschwindigkeit $v_0 = 0{,}5$ m/sec und eine Verzögerung $b_0 = 0{,}5$ m/sec².

Zu bestimmen sind das momentane Beschleunigungszentrum, die Beschleunigung b_C des Radpunktes, der sich mit dem momentanen Geschwindigkeitszentrum C deckt, sowie die Beschleunigung eines Punktes M und der Kurvenradius seiner Bewegungsbahn. $OM = MC = 0{,}5\ R$.

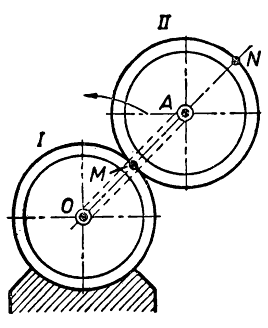
Lösung: 1) $r = 0{,}3536$ m; $\Theta = -\pi/4$;
2) $b_C = 0{,}5$ m/sec²;
3) $b_M = 0{,}3536$ m/sec²;
4) $\varrho = 0{,}25$ m.

560. Ein Zahnrad mit dem Radius $R = 12$ cm wird durch eine Kurbel OA, die sich um die Achse O eines starren Zahnrades mit gleichem Radius dreht, in Bewegung versetzt. Die Kurbel dreht sich mit einer Winkelbeschleunigung $\varepsilon_0 = 8\ \text{sec}^{-2}$ und hat im betrachteten Augenblick eine Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 2\ \text{sec}^{-1}$.

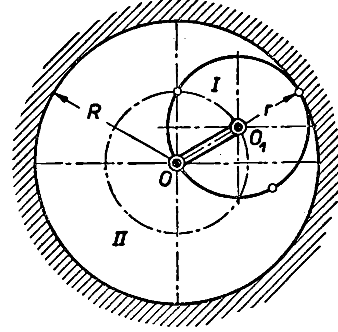
Es ist die Beschleunigung desjenigen Punktes des beweglichen Zahnrades zu ermitteln, der im gegebenen Augenblick mit dem augenblicklichen Geschwindigkeitszentrum zusammenfällt. Ferner ist die Beschleunigung des Punktes N sowie die Lage des momentanen Beschleunigungszentrums K zu bestimmen.

Lösung: 1) $b_M = 96$ cm/sec²; 2) $b_N = 480$ cm/sec²;

3) $MK = 4{,}24$ cm; 4) $\sphericalangle\ AMK = 45°$.



Aufgabe 560



Aufgabe 561

561. Es sind für einen bestimmten Zeitpunkt die Lage des Beschleunigungszentrums zu bestimmen sowie die Geschwindigkeit v_K eines Figurenpunktes, der in diesem Zeitpunkt mit dem Beschleunigungszentrum zusammenfällt. Ferner ist der Geschwindigkeitspol zu bestimmen und die Beschleunigung b_C des Punktes, der mit dem Geschwindigkeitspol zusammenfällt. Das Zahnrad I mit dem Radius r rollt innerhalb des Zahnrades II mit dem Radius $R = 2r$. Die Kurbel OO_1, die das rollende Rad antreibt, hat eine konstante Winkelgeschwindigkeit ω_0.

Lösung: 1) Das momentane Beschleunigungszentrum deckt sich mit dem Zentrum O des unbeweglichen Zahnrades; $v_K = 2r\omega_0$;
2) $b_C = 2r\omega_0^2$.

562. Es sind die Krümmungsradien der Bewegungsbahn eines Punktes M des beweglichen Zahnrades der vorherigen Aufgabe im Augenblick der größten und kleinsten Entfernung des Punktes M vom Mittelpunkt O zu ermitteln. Der Abstand $O_1M = a$.

Lösung: $\varrho_1 = \frac{(r-a)^2}{r+a}$; $\varrho_2 = \frac{(r+a)^2}{r-a}$.

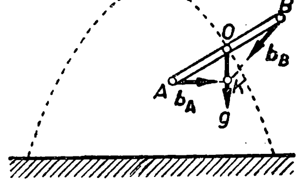
563. Es sind die Beschleunigungen der Endpunkte zweier Durchmesser eines Zahnrades mit dem Radius $r = 5$ cm, das auf einem unbeweglichen Zahnrad mit dem Radius $R = 15$ cm abrollt, zu bestimmen. Das bewegliche Zahnrad wird von der Kurbel OA angetrieben, die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 3\,\text{sec}^{-1}$ um den Mittelpunkt O des unbeweglichen Zahnrades dreht. Einer der Durchmesser deckt sich mit der Linie OA, der andere steht senkrecht dazu.

Lösung: $b_1 = 540\,\text{cm/sec}^2$; $b_2 = b_4 = 742\,\text{cm/sec}^2$; $b_3 = 900\,\text{cm/sec}^2$.

564. Es sind das augenblickliche Beschleunigungszentrum, die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung einer ebenen Figur zu bestimmen. Für den gegebenen Zeitpunkt ist bekannt: Beschleunigung des Punktes A, $b_A = 15\,\text{cm/sec}^2$; die Beschleunigung des Punktes B, $b_B = 10\,\text{cm/sec}^2$, wobei die Beschleunigungen b_A und b_B senkrecht zur Verbindungslinie AB stehen. Sie sind beide nach einer Richtung gerichtet. ($AB = 10$ cm.)

Lösung: 1) Das momentane Beschleunigungszentrum befindet sich auf der Geraden AB im Abstand $AK = 30$ cm.
2) $\omega = 0$; $\varepsilon = 0{,}5\,\text{sec}^{-2}$.

565. Der Schwerpunkt O einer Stange bewegt sich längs einer Parabel. Er unterliegt der Erdbeschleunigung $b = 9{,}81\,\text{m/sec}^2 = g$. Die Stange dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 10\,\text{sec}^{-1}$ um eine Achse, die senkrecht zur Bewegungsebene liegt. Es sind die Beschleunigungen der Stangenenden für den Augenblick zu ermitteln, in dem die Stange mit der Vertikalen einen Winkel von $\alpha = 60°$ bildet. Ihre Länge ist $AB = 39{,}24$ cm.



Wo liegt das momentane Beschleunigungszentrum der Stange für den gegebenen Zeitpunkt?

Lösung: $b_A = 17\,\text{m/sec}^2$; $b_B = 25{,}96\,\text{m/sec}^2$;
$OK = 0{,}0981$ m.

566. Das Lineal AB eines Ellipsenzirkels wird durch eine Kurbel OD in Bewegung gesetzt. Die Kurbel dreht sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 2\,\sec^{-1}$. Die Länge des Lineals AB ist $2\,l = 20$ cm, die Länge $AC = BC = l$. (Siehe Zeichnung zu Aufgabe 492.)

Es sind das momentane Beschleunigungszentrum des Lineals, die Beschleunigungen seiner Enden A und B und die Beschleunigung des momentanen Geschwindigkeitszentrums in dem Augenblick zu bestimmen, in dem $\sphericalangle\, ABO = 30°$ ist.

Lösung: Das augenblickliche Beschleunigungszentrum deckt sich mit dem Koordinatenursprung.
$b_A = 40$ cm/sec^2; $b_B = 69{,}3$ cm/sec^2; $b_Z = 80$ cm/sec^2.

567. Das Lineal eines Ellipsenzirkels gleitet mit dem Ende A entlang der Achse Ox, mit dem Ende B entlang der Achse Oy. Seine Länge AB beträgt 20 cm. (Siehe Zeichnung zu Aufgabe 492.)

Es sind die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes A in dem Zeitpunkt zu ermitteln, in dem der Neigungswinkel des Lineals zur Achse Ox 30° beträgt und die Geschwindigkeitskomponenten und die Beschleunigungen des Punktes B auf der Achse Ox $v_{Bx} = -20$ cm/sec und $b_{Bx} = -10$ cm/sec^2 betragen.

Lösung: $v_{Ay} = 34{,}64$ cm/sec; $b_{Ay} = -142{,}68$ cm/sec^2.

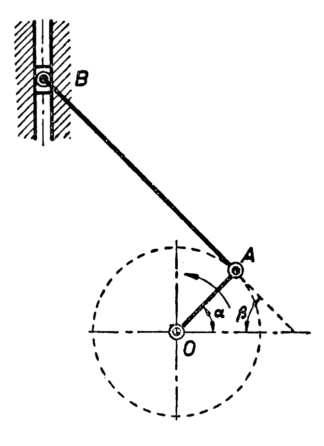
568. Zu bestimmen sind die Beschleunigung des Gleitstückes B und das augenblickliche Beschleunigungszentrum K der Kurbelstange AB des Kurbelstangenmechanismus in zwei horizontalen und einer vertikalen Lage der Kurbel OA, die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 15\,\sec^{-1}$ um die Welle O dreht. Die Kurbellänge ist $OA = 40$ cm, die Kurbelstange $AB = 200$ cm lang. Die Achse der Kulisse zeigt auf den Mittelpunkt O der Kurbel.

Lösung: Das augenblickliche Beschleunigungszentrum K liegt bei $\alpha = 0°$ und $\alpha = 180°$ auf der Achse der Kulisse.
1) $\alpha = 0$; $b_B = 108$ m/sec^2; $BK = 12$ m.
2) $\alpha = 90°$; $b_B = 18{,}37$ m/sec^2; $BK = 40$ cm; $AK = 196$ cm.
3) $\alpha = 180°$; $b_B = 72$ m/sec^2; $BK = 8$ m.

569. Eine Kurbel OA von der Länge 20 cm dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 10\,\sec^{-1}$ und treibt die Kurbelstange AB, die 100 cm lang ist. Das Gleitstück B bewegt sich in vertikaler Richtung.

Es sind die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung der Kurbelstange sowie die Beschleunigung des Gleitstückes B für den Augenblick zu bestimmen, in dem die Kurbel und die Kurbelstange senkrecht zueinander stehen. Sie bilden hierbei mit der horizontalen Achse die Winkel $\alpha = 45°$ und $\beta = 45°$.

Lösung: $\omega = 2\,\sec^{-1}$; $\varepsilon = 16\,\sec^{-2}$;
$b_B = 565{,}6$ cm/sec^2.



570. Eine Kurbel OA dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0. Durch die Kurbelstange $AB = l$, mit deren Ende A ein Zahnrad mit dem Radius r starr verbunden ist, wird das Zahnrad mit dem Radius $r_1 = r$ angetrieben, das seinerseits frei auf der Welle O aufgesetzt ist.

Es sind die Winkelgeschwindigkeit ω und die Winkelbeschleunigung ε dieses Zahnrades für die horizontale und vertikale Lage der Kurbel zu ermitteln. (Siehe Zeichnung zu Aufgabe 534.)

Lösung: 1) $\omega = 2\left(1 + \frac{r}{l}\right)\omega_0$; $\varepsilon = 0$.

2) $\omega = 2\,\omega_0$; $\varepsilon = \frac{2\,r\,\omega_0^2}{\sqrt{l^2 - 4\,r^2}}$, Winkelverzögerung.

571. Es sind die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung der Koppel AB eines exzentrischen Kurbelmechanismus sowie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Gleitstückes B für die horizontale rechte und die vertikale Lage der Kurbel OA zu ermitteln. Die Kurbel dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_0. Gegeben sind: $OA = r$, $AB = l$, der Achsenabstand der Kurbel von der Bewegungslinie des Gleitstückes ist $OC = h$. (Siehe Zeichnung zu Aufgabe 517.)

Lösung: 1) $\omega = \frac{r\,\omega_0}{\sqrt{l^2 - h^2}}$; $\varepsilon = \frac{h r^2\,\omega_0^2}{(l^2 - h^2)^{3/2}}$;

$v_B = \frac{h r\,\omega_0}{\sqrt{l^2 - h^2}}$; $b_B = r\,\omega_0^2\left[1 + \frac{r\,l^2}{(l^2 - h^2)^{3/2}}\right]$.

2) $\omega = 0$; $\varepsilon = \frac{r\,\omega_0^2}{\sqrt{l^2 - (r+h)^2}}$ Winkelverzögerung;

$v_B = r\,\omega_0$; $b_B = \frac{r\,(r+h)\,\omega_0^2}{\sqrt{l^2 - (r+h)^2}}$.

572. Ein Antiparallelogramm besteht aus zwei Kurbeln AB und CD von gleicher Länge 40 cm. Die Kurbeln sind miteinander durch eine Stange BC von 20 cm Länge verbunden. Der Abstand der unbeweglichen Punkte A und D beträgt ebenfalls 20 cm. Die Kurbel AB dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_0.

Es sind die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung der Stange BC für den Augenblick zu bestimmen, in dem der Winkel ADC gleich 90° ist.

Lösung: $\omega_{BC} = \frac{8}{3}\,\omega_0$

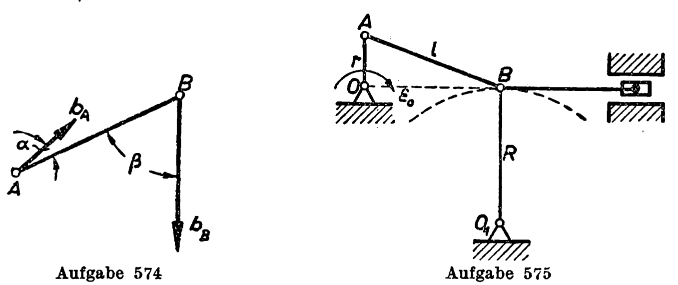
$\varepsilon_{BC} = -\frac{20}{9}\,\omega_0^2$, verzögerte Drehbewegung.

573. Mit den Bedingungen der Aufgabe 526 ist die Beschleunigung des Gelenkes D der getriebenen Kurbel OD für die in Aufgabe 526 angegebene Lage des Mechanismus zu ermitteln.

Lösung: $b_D = 5240$ cm/sec².

574. Es ist die Beschleunigung der Stangenmitte von AB zu ermitteln, wenn die Beschleunigungen ihrer Enden $b_A = 10\,\text{cm/sec}^2$, $b_B = 20\,\text{cm/sec}^2$ und die Winkel, die die Beschleunigungsvektoren mit der Geraden AB bilden, $\alpha = 10°$ und $\beta = 70°$ sind.

Lösung: $b = \frac{1}{2}\sqrt{b_A{}^2 + b_B{}^2 - 2 b_A \cdot b_B \cos\,(\beta - \alpha)} = 8{,}66\,\text{cm/sec}^2$.



Aufgabe 574 Aufgabe 575

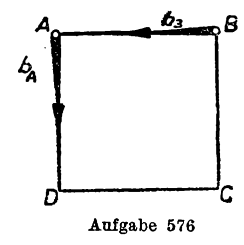
575. Es sind die Geschwindigkeit und die Beschleunigung (normal und tangential) des Punktes B eines in der Zeichnung angegebenen Mechanismus für den Augenblick zu bestimmen, in dem die Glieder OA und O_1B vertikal liegen. Die Kurbel OA dreht sich mit konstanter Winkelbeschleunigung $\varepsilon_0 = 5\,\text{sec}^{-2}$ und besitzt im betrachteten Zeitpunkt eine Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 10\,\text{sec}^{-1}$. Die Längen der Glieder sind: $OA = r = 20\,\text{cm}$, $O_1B = 100\,\text{cm}$, $AB = l = 120\,\text{cm}$.

Lösung: $v_B = 200\,\text{cm/sec}$; $b_{Bn} = 400\,\text{cm/sec}^2$; $b_{Bt} = 370{,}45\,\text{cm/sec}^2$.

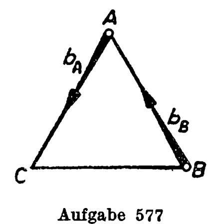
576. Ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $a = 10\,\text{cm}$ bewegt sich in der Zeichenfläche.

Es sind die Lage des augenblicklichen Beschleunigungszentrums und die Beschleunigung der Spitzen C und D zu ermitteln, wenn für den betrachteten Zeitpunkt die Beschleunigung zweier Spitzen A und B $b = 10\,\text{cm/sec}^2$ beträgt. Die Beschleunigungsrichtung der Punkte A und B decken sich mit den Quadratseiten. (Vgl. Zeichnung.)

Lösung: $b_C = b_D = 10\,\text{cm/sec}^2$, entlang der Quadratseiten gerichtet. Das augenblickliche Beschleunigungszentrum befindet sich im Schnittpunkt der Diagonalen.



Aufgabe 576



Aufgabe 577

577. Ein gleichseitiges Dreieck ABC bewegt sich in der Zeichenebene. Die Beschleunigungen der Spitzen A und B im betrachteten Zeitpunkt sind $16\,\text{cm/sec}^2$ und längs der Schenkel des Dreieckes gerichtet. (Siehe Zeichnung.)

Es ist die Beschleunigung der dritten Spitze C des Dreiecks zu ermitteln.

Lösung: $b_C = 16\,\text{cm/sec}^2$ auf der Seite CB von C nach B gerichtet.

578. Ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $a = 2$ cm bewegt sich in der Ebene. Im betrachteten Augenblick sind die Beschleunigungen seiner Spitzen A und B $b_A = 2\ \text{cm/sec}^2$, $b_B = 4\sqrt{2}\ \text{cm/sec}^2$. (Richtung vgl. Zeichnung.)

Es sind die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung des Quadrates und die Beschleunigung des Punktes C zu ermitteln.

Lösung: $\omega = \sqrt{2}\ \text{sec}^{-1}$; $\varepsilon = 1\ \text{sec}^{-2}$; $b_C = 6\ \text{cm/sec}^2$ längs CD von C nach D gerichtet.

579. Bei einer Dampfmaschine mit oszillierendem Zylinder, der auf dem Zapfen O_1 ruht, ist die Kurbel $OA = 12$ cm und die Kurbelstange $AB = 60$ cm lang. Der Abstand zwischen der Wellenachse O und dem Zapfen O_1 beträgt $OO_1 = 60$ cm. Zu bestimmen sind die Beschleunigung des Kolbens B und der Kurvenradius seiner Bewegungsbahn bei einem Winkel AOO_1 (Stellung III) von 0° (Abbildung 528 Stellung I) und 90° zwischen der Kurbel und der Kurbelstange. Die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel ist $\omega_0 = \text{konst.} = 5\ \text{sec}^{-1}$. (Siehe Zeichnung zu Aufgabe 528.)

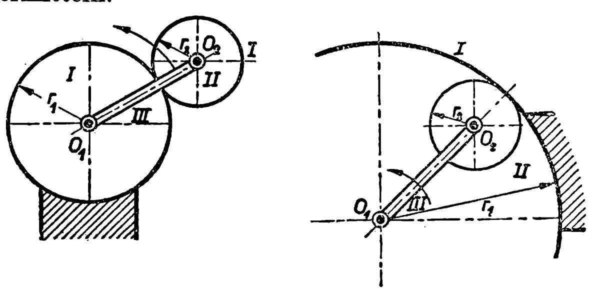
Lösung: 1) $b = 206{,}25\ \text{cm/sec}^2$; $\varrho = 1{,}09$ cm;

2) $b = 6{,}24\ \text{cm/sec}^2$; $\varrho = 576$ cm.

23. Addition ebener Körperbewegungen

580. Eine Kurbel III verbindet die Achsen O_1 und O_2 zweier Zahnräder I und II. Rad II kann außen oder innen auf Rad I abrollen (vgl. Zeichnung). Rad I bleibt dabei unbeweglich, und die Kurbel III dreht sich um die Achse O_1 mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_3.

Da die Räderradien r_1 und r_2 bekannt sind, ist für das Rad II die absolute Winkelgeschwindigkeit ω_2 und die relative Winkelgeschwindigkeit ω_{23} gegenüber der Kurbel zu ermitteln.



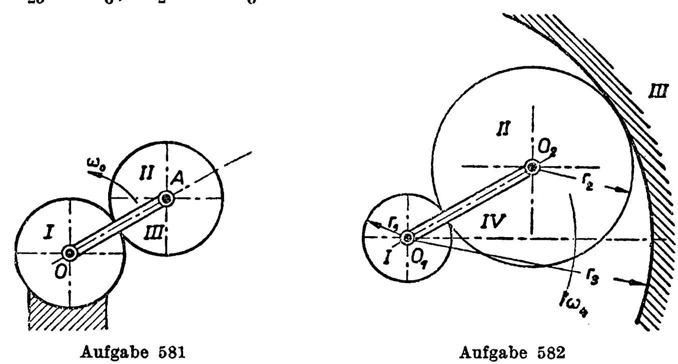
Lösung: Äußerer Eingriff: $\omega_2 = \omega_3 \frac{r_1 + r_2}{r_2}$; $\omega_{23} = \omega_3 \frac{r_1}{r_2}$.

Innerer Eingriff: $\omega_2 = -\omega_3 \frac{r_1 - r_2}{r_2}$; $\omega_{23} = -\omega_3 \frac{r_1}{r_2}$.

Das negative Vorzeichen besagt, daß die entsprechenden Körper sich in entgegengesetzten Richtungen drehen.

581. Zu bestimmen sind die relative und die absolute Winkelgeschwindigkeit eines Zahnrades II mit dem Radius r, das auf einem unbeweglichen Zahnrad I mit dem gleichen Radius abrollt und von der Kurbel III, die sich um die Achse O mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_0 dreht, in Bewegung gesetzt wird.

Lösung: $\omega_{23} = \omega_0$; $\omega_2 = 2\,\omega_0$.



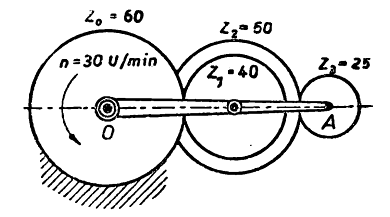
Aufgabe 581 Aufgabe 582

582. Ein Getriebe, das einen Schleifstein antreibt, ist wie folgt gebaut: Die Stange IV wird mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_4 um die Achse O_1 gedreht. Am Ende der Stange im Punkt O_2 ist das Rad II mit dem Radius r_2 aufgesetzt. Beim Drehen der Stange rollt das Rad II ohne zu gleiten auf dem Außenkreis III mit dem Radius r_3 ab. Dabei wird das Rad I mit dem Radius r_1 angetrieben. Es ist auf die Achse O_1 aufgesetzt und mit der Schleifscheibe verbunden.

Bei gegebenem Radius r_3 des äußeren festen Rades III ist der Wert von r_1 zu ermitteln, bei dem $\omega_1/\omega_4 = 12$ ist, d. h., die Schleifscheibe dreht sich 12mal schneller als die Antriebswelle.

Lösung: $r_1 = \frac{1}{11}\,r_3$.

583. Zu bestimmen ist die Drehzahl in U/min eines Zahnrades mit $z = 25$ Zähnen, das an der Kurbel OA drehbar angebracht ist. Diese hat eine Drehzahl $n_0 = 30$ U/min und trägt nach beistehender Zeichnung noch ein Zahnrad mit $z_0 = 60$ und ein Doppelrad mit der Zähnezahl $z_1 = 40$ bzw. $z_2 = 50$.

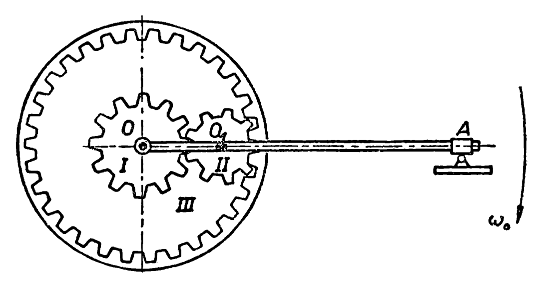


Lösung: $n_3 = n_0\left(1 - \frac{z_0\,z_2}{z_1\,z_3}\right) = -\,60$ U/min.

(Hinsichtlich des negativen Vorzeichens siehe Lösung zu Aufgabe 580.)

584. In einem Epizykloidengetriebe, das z. B. bei Dreschmaschinen verwendet wird, sind die Führung OA und das Rad I mit dem Radius r_1 auf die Welle O aufgesetzt. Die Achse O_1 des Rades II ist an der Führung befestigt, und das Rad III vom Radius r_3 kann sich um die Achse O drehen.

Es ist die Winkelgeschwindigkeit ω_1 des Rades I zu ermitteln, wenn die Führung OA eine Winkelgeschwindigkeit ω_0 erhält. Das Rad III dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_3 in entgegengesetztem Drehsinn.

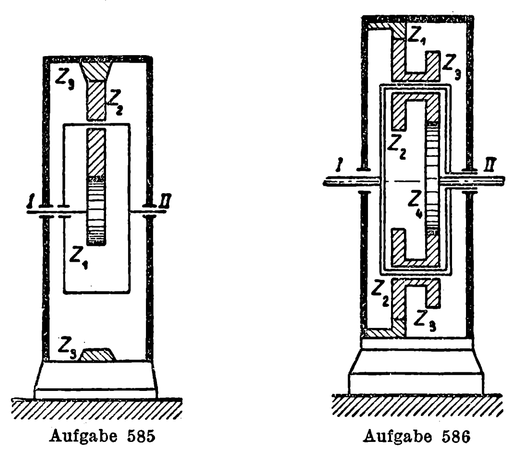


Lösung: $\omega_1 = \omega_0 \left(1 + \frac{r_3}{r_1}\right) + \frac{r_3}{r_1} \, |\omega_3|$.

585. Ein Getriebe besteht aus drei Zahnrädern. Das erste Rad (mit $z_1 = 20$ Zähnen) ist auf die treibende Welle I (mit $n = 4500$ U/min) aufgesetzt, das zweite Rad (mit $z_2 = 25$ Zähnen) sitzt auf dem Rahmen, der mit der Abtriebswelle II starr verbunden ist. Das dritte Rad mit Innenverzahnung steht fest.

Es sind die Drehzahlen der Abtriebswelle und des Laufrades z_2 zu ermitteln.

Lösung: $n_2 = -1800$ U/min; $n_{II} = 1000$ U/min.



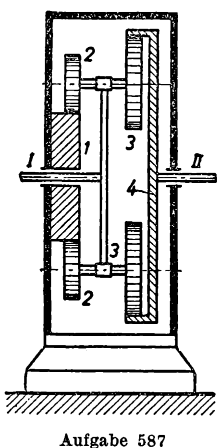
Aufgabe 585 Aufgabe 586

586. Die Antriebswelle I eines Getriebes hat die Drehzahl $n_1 = 1200$ U/min. Es ist die Drehzahl der Abtriebswelle II in U/min zu bestimmen, wenn das feste Zahnrad mit Innenverzahnung $z_1 = 180$ Zähne besitzt. Die umlaufenden Zahnräder, die miteinander gepaart sind, haben $z_2 = 60$ bzw. $z_3 = 40$ Zähne. Das an der Abtriebswelle befestigte Zahnrad hat $z_4 = 80$ Zähne.

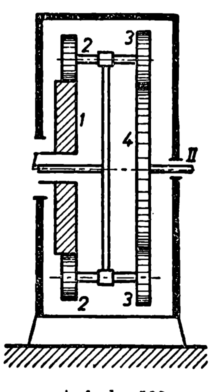
Lösung: $n_{II} = 3000$ U/min.

587. Ein Getriebe besteht aus einem festen Zahnrad mit dem Radius $r_1 = 40$ cm, zwei laufenden Zahnrädern vom Radius $r_2 = 20$ cm und $r_3 = 30$ cm und einem auf der Abtriebswelle aufgesetzten Zahnrad mit Innenverzahnung vom Radius $r_4 = 90$ cm. Die Antriebswelle und die Kurbel, die die Achsen der Zahnräder trägt, haben die Drehzahl $n_1 = 1800$ U/min. Es ist die Drehzahl der Abtriebswelle zu ermitteln.

Lösung: $n_{II} = 3000$ U/min.



Aufgabe 587

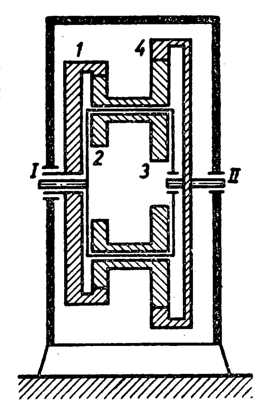


Aufgabe 588

588. Es ist die Winkelgeschwindigkeit ω_{II} der Abtriebswelle eines Getriebes mit Differentialübersetzung zu bestimmen, wenn die Antriebswelle eine Winkelgeschwindigkeit $\omega_I = 120\,\text{sec}^{-1}$ hat. Das Rad I dreht sich mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = 180\,\text{sec}^{-1}$ und hat $z_1 = 80$ Zähne, die Laufräder haben $z_2 = 20$, $z_3 = 40$ Zähne. Das Rad z_4, das auf der Abtriebswelle angebracht ist, hat 60 Zähne. Rad z_1 und die Antriebswelle drehen sich in gleichem Sinn.

Lösung: $\omega_{II} = 280\,\text{sec}^{-1}$.

589. Ein Getriebe mit Differentialübersetzung besteht aus 4 Zahnrädern, von denen das erste Rad ($z_1 = 70$) mit Innenverzahnung die Drehzahl $n = 160$ U/min hat. Rad 2 und Rad 3 sind auf dem Rahmen gelagert. Dieser ist mit der Antriebswelle ($n_I = 1200$ U/min) fest verbunden. Die Zähnezahlen sind $z_2 = 20$, $z_3 = 30$. Das Rad 4 mit Innenverzahnung hat $z_4 = 80$ Zähne und ist an der Abtriebswelle verkeilt.



Es ist die Drehzahl der Abtriebswelle zu ermitteln, wenn sich die Welle I und das Rad 1 entgegengesetzt drehen.

Lösung: $n_{II} = 585$ U/min.

590. In einem Getriebe befinden sich ein festes Zahnrad I, miteinander gekoppelte bewegliche Zahnräder (Rad 2 und Rad 3 mit Innenverzahnung) und ein Zahnrad 4, das mit der Abtriebswelle verkeilt ist.

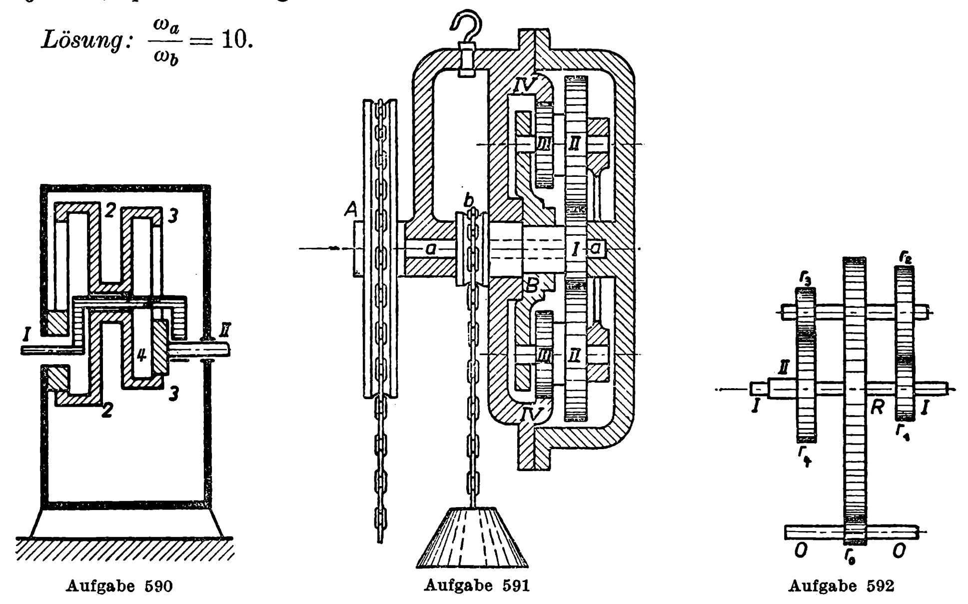
Es ist die Winkelgeschwindigkeit der Abtriebswelle zu ermitteln, wenn die Zähnezahlen $z_1 = 30$, $z_2 = 80$, $z_3 = 70$, $z_4 = 20$ sind. Die Antriebswelle dreht sich mit einer Winkelgeschwindigkeit, der $n_1 = 1200$ U/min entsprechen.

Lösung: $n_{II} = -375$ U/min.

591. In dem Flaschenzug „TRIPLEX“ ist auf der Welle a—a eine Kettenscheibe A starr befestigt. Auf der gleichen Welle läuft eine Hohlwelle b, die fest mit Teil B verbunden ist und die Hubkette trägt. Auf jeden Bolzen des Teiles B sind zwei Zahnräder II und III aufgesetzt, die miteinander gekoppelt sind. Das Zahnrad II und das Zahnrad I stehen im Eingriff, Rad I ist auf der Welle a—a verkeilt. Das Rad III steht mit dem festen Zahnrad IV im Eingriff.

Es ist das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten der Welle a—a und der Hohlwelle b zu ermitteln, wenn die Zähnezahl der Räder $z_1 = 12$, $z_2 = 28$ $z_3 = 14$, $z_4 = 54$ betragen.

Lösung: $\dfrac{\omega_a}{\omega_b} = 10.$



Aufgabe 590 Aufgabe 591 Aufgabe 592

592. In einem Differentialgetriebe sitzt das Zahnrad vom Radius R drehbar auf der Welle I—I und trägt die gekoppelten Zahnräder vom Radius r_2 und r_3. Das Rad R wird durch ein Zahnrad mit dem Radius r_0 in Bewegung gesetzt. Die Zahnräder mit den Radien r_2 bzw. r_3 stehen mit den Zahnrädern mit den Radien r_1 bzw. r_4 im Eingriff. Welle II ist als Hohlwelle ausgebildet.

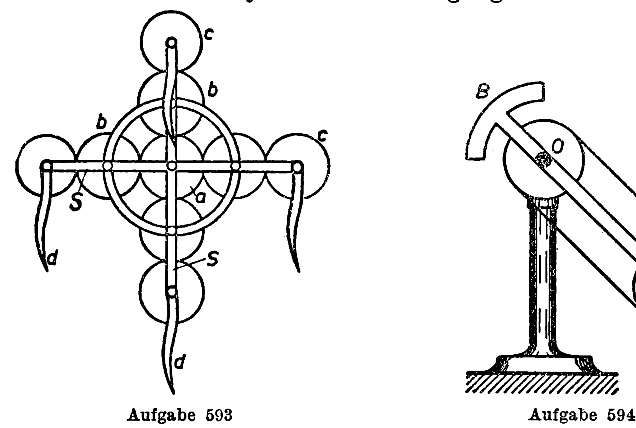
Es ist die Winkelgeschwindigkeit der Welle II zu ermitteln, wenn die Drehzahlen der Wellen I—I und O—O als n_1 und n_0 bekannt sind. Der Drehsinn beider Wellen ist der gleiche.

Lösung: $n_2 = \left(n_1 + n_0 \dfrac{r_0}{R}\right) \dfrac{r_1 r_3}{r_2 r_4} - n_0 \dfrac{r_0}{R}.$

593. Der Antrieb einer Kartoffelrodemaschine ist in beistehender Zeichnung dargestellt. Die Führung S dreht sich mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_0, während das Rad a feststeht.

Es sind die absolute Winkelgeschwindigkeit ω der Zahnräder sowie der Charakter der Flügelbewegung zu ermitteln, wenn der Radius sämtlicher Zahnräder gleich groß ist.

Lösung: $\omega = 0$, die Flügel und die Mittelpunkte der Räder C beschreiben vorwärtsschreitende zykloidische Bewegungen.



Aufgabe 593 Aufgabe 594

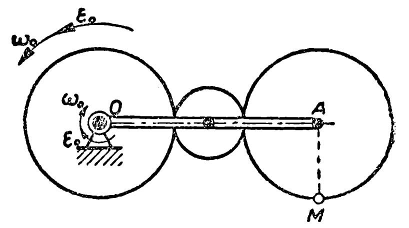
594. Eine Kurbel OA mit dem Gegengewicht B dreht sich mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 =$ konst. um die Achse O eines festen Zahnrades und trägt am Ende A die Achse eines anderen Zahnrades gleicher Abmessung. Beide Zahnräder sind mit einer Kette verbunden.

Es sind die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung des beweglichen Zahnrades sowie die Geschwindigkeit und Beschleunigung eines beliebigen Punktes M zu ermitteln, wenn die Kurbellänge $OA = l$ ist.

Lösung: $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$; der Mittelpunkt A des Zahnrades beschreibt einen Kreis. Die Lage des Punktes M bezüglich A ändert sich nicht.
$v_M = v_A = l\,\omega_0$; $b_M = b_A = l\,\omega_0^2$.

595. In einem Übersetzungsgetriebe dreht sich das treibende Zahnrad vom Radius R mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_0 und einer Winkelbeschleunigung ε_0 entgegen dem Uhrzeigersinn. Die Kurbel mit einer Länge von $3\,R$ dreht sich um die Zahnradachse im Uhrzeigersinn mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit und mit der gleichen Winkelbeschleunigung.

Es sind die Geschwindigkeit und die Beschleunigung von Punkt M des getriebenen Zahnrades mit dem Radius R zu ermitteln. Die Lage des Punktes M ist aus der Zeichnung zu ersehen.



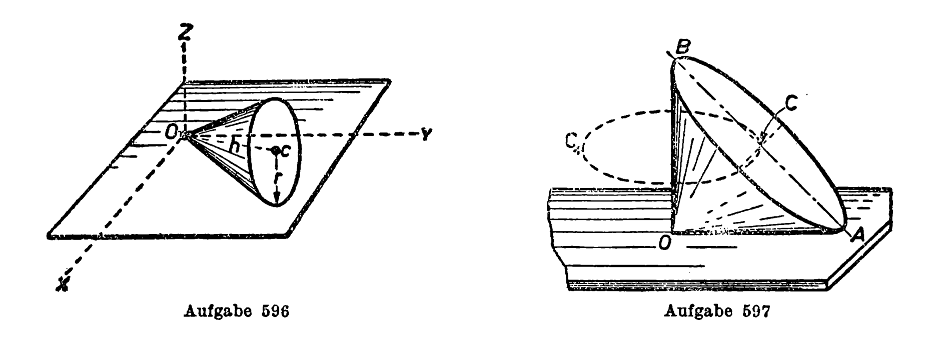
Lösung: $v = R\,\omega_0 \sqrt{10}$; $b = R \sqrt{10\,(\varepsilon_0^2 + \omega_0^4) - 12\,\omega_0^2\,\varepsilon_0}$.

VII. Drehung des starren Körpers um einen festen Punkt

24. Drehung des starren Körpers um einen festen Punkt

596. Ein Kegel mit der Höhe $h = 4$ cm und dem Bodenradius $r = 3$ cm rollt auf einer Ebene ohne zu gleiten, wobei die Kegelspitze im Punkt O bleibt. Es sind die Winkelgeschwindigkeit des Kegels und die Koordinate des Punktes, der einen Hodographen der Winkelgeschwindigkeit zeichnet, zu ermitteln. Ferner ist die Winkelbeschleunigung des Kegels zu bestimmen. Die Geschwindigkeit des Punktes C am Kegelboden beträgt $v_C = 48$ cm/sec = konst.

Lösung: $\omega = 20\,\text{sec}^{-1}$; $x_1 = 20 \cos 15\,t$, $y_1 = 20 \sin 15\,t$, $z_1 = 0$; $\varepsilon = 300\,\text{sec}^{-2}$.



Aufgabe 596 Aufgabe 597

597. Ein Kegel, dessen Spitze O unbeweglich bleibt, rollt auf einer Ebene ohne zu gleiten. Die Kegelhöhe CO beträgt 18 cm, der Winkel AOB ist 90°. Der Mittelpunkt C des Kegelbodens bewegt sich gleichmäßig und kehrt nach 1 sec in die Ausgangsstellung zurück.

Es sind die Geschwindigkeit des jeweils höchsten Punktes B, die Winkelbeschleunigung des Kegels und die Beschleunigungen der Punkte A und B zu ermitteln.

Lösung: $v_B = 36\,\pi \sqrt{2}$ cm/sec = 160 cm/sec;
$\varepsilon = 39{,}5\,\text{sec}^{-2}$, senkrecht zu OA und OB;
$b_A = 1000\,\text{cm/sec}^2$, parallel zu OB;
$b_B = 1000 \sqrt{2}\,\text{cm/sec}^2$, liegt in der Ebene AOB und unter einem Winkel von 45° zu OB.

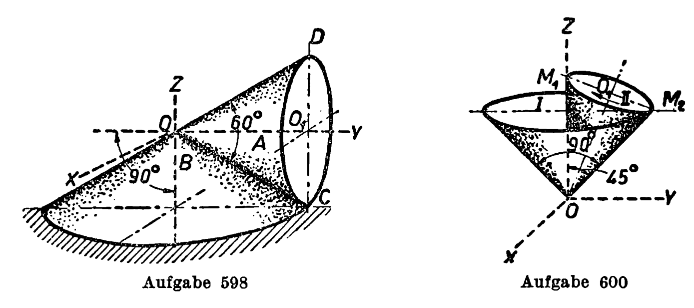
598. Ein Kegel A umläuft 120mal in der Minute einen unbeweglichen Kegel B. Kegelhöhe $OO_1 = 10$ cm.

Es sind die Winkelgeschwindigkeit ω_e der Kegelachse OO_1 um die Achse z, die relative Winkelgeschwindigkeit des Kegels ω_r um die Achse OO_1, die absolute Winkelgeschwindigkeit ω_a sowie die absolute Winkelbeschleunigung ε_a des Kegels zu ermitteln.

Lösung: $\omega_e = 4\pi\ \text{sec}^{-1}$; $\omega_r = 6{,}92\ \pi\ \text{sec}^{-1}$;
$\omega_a = 8\pi\ \text{sec}^{-1}$, in Richtung von OC;
$\varepsilon_a = 27{,}68\ \pi^2\ \text{sec}^{-2}$, parallel zur Ox-Achse.

599. Unter Beibehaltung der Bedingungen der vorigen Aufgabe ist die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der Punkte C und D des beweglichen Kegels zu ermitteln.

Lösung: $v_C = 0$;
$v_D = 80\ \pi$ cm/sec, parallel zur Achse Ox gerichtet;
$b_C = 320\ \pi^2$ cm/sec², senkrecht zu OC in der yz-Ebene.
Die Beschleunigungskomponenten im Punkt D sind:
$b_y = -480\ \pi^2$ cm/sec²;
$b_z = -160\sqrt{3}\ \pi^2$ cm/sec².



Aufgabe 598 Aufgabe 600

600. Ein Kegel II mit einem Spitzenwinkel $\alpha_2 = 45°$ rollt ohne zu gleiten auf der inneren Seite eines unbeweglichen Kegels I mit einem Spitzenwinkel $\alpha_1 = 90°$ ab. Die Höhe des beweglichen Kegels OO_1 beträgt 100 cm. Der Punkt O_1 der Grundfläche des beweglichen Kegels beschreibt in 0,5 sec eine volle Umdrehung.

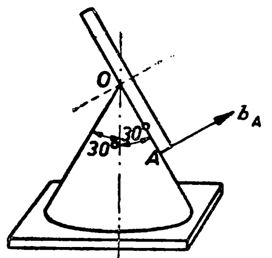
Es sind die Winkelgeschwindigkeit des Kegels II um die Achse z, die relative Winkelgeschwindigkeit um die Achse OO_1 und die absolute Winkelgeschwindigkeit des Kegels II sowie seine absolute Winkelbeschleunigung zu ermitteln.

Lösung: $\omega_e = 4\ \pi\ \text{sec}^{-1}$, in Richtung der z-Achse;
$\omega_r = 7{,}39\ \pi\ \text{sec}^{-1}$, in Richtung der Achse O_1O;
$\omega_a = 4\ \pi\ \text{sec}^{-1}$, in Richtung der Achse M_2O;
$\varepsilon_a = 11{,}3\ \pi^2\ \text{sec}^{-2}$, in Richtung der Achse x.

601. Unter Beibehaltung der Bedingungen der vorigen Aufgabe sind die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte M_1, O_1 und M_2 des beweglichen Kegels zu ermitteln.

Lösung: $v_0 = 153{,}2\,\pi$ cm/sec;
$v_1 = 306{,}4\,\pi$ cm/sec;
$v_2 = 0$, $b_0 = 612{,}8\,\pi^2$ cm/sec², von O_1 senkrecht zu Oz gerichtet;
Beschleunigungskomponenten vom
Punkt M_1: $b_{M_1y} = -362\,\pi^2$ cm/sec²,
$b_{M_1z} = -865\,\pi^2$ cm/sec²;
$b_{M_2} = 1225\,\pi^2$ cm/sec², liegt in der Ebene OO_1M_2 senkrecht zu OM_2.

602. Eine Scheibe OA mit dem Radius $R = 4\sqrt{3}$ cm dreht sich um einen festen Punkt O und umrollt einen unbeweglichen Kegel mit dem Spitzenwinkel 60°. Es ist die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe um ihre Symmetrieachse zu ermitteln, wenn die Beschleunigung b_A vom Punkt A der Scheibe konstant 48 cm/sec² angenommen wird.



Lösung: $\omega = 2$ sec⁻¹.

603. Ein Körper bewegt sich um einen festen Punkt. In einem bestimmten Augenblick wird seine Winkelgeschwindigkeit durch einen Vektor festgelegt, dessen Komponenten $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ sind.

Es ist in diesem Augenblick die Geschwindigkeit v des Körperpunktes zu ermitteln, der durch die Koordinatenwerte $\sqrt{12}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{28}$ bestimmt wird.

Lösung: $v = 0$.

604. Eine Körperbewegung um einen festen Punkt ist durch die EULERschen Winkel bestimmt:

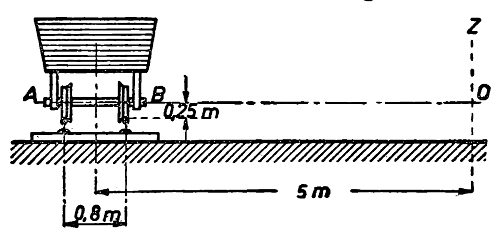
$$\varphi = 4\,t,\quad \psi = \frac{\pi}{2} - 2\,t,\quad \vartheta = \frac{\pi}{3}.$$

Es sind die Punktkoordinaten, die den Hodograph der Winkelgeschwindigkeit festlegen, die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung des Körpers, bezogen auf die festen Achsen x, y, z, zu ermitteln.

Lösung: $x = \omega_x = 2\sqrt{3}\cos 2\,t$; $y = \omega_y = -2\sqrt{3}\sin 2\,t$; $z = \omega_z = 0$;
$\omega = 2\sqrt{3}$ sec⁻¹; $\varepsilon = 4\sqrt{3}$ sec⁻².

605. Es sind der Herpolhodie- und der Polhodiekegel eines äußeren Wagenrades, das auf einer horizontalen Strecke rollt, zu bestimmen. Der Wagen durchfährt eine Kurve vom Radius $r = 5$ m, der Wagenradradius ist 0,25 m und die Spurbreite 0,80 m.

Anmerkung: Das Rad dreht sich zusammen mit dem Wagen um die vertikale Achse Oz, die im Krümmungsmittelpunkt liegt, und in bezug auf den Wagen um die Achse AB, d. h., es dreht sich um den unbeweglichen Punkt O.



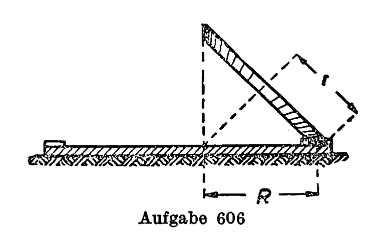
Lösung: Der Herpolhodiekegel hat die Achse Oz und den Spitzenwinkel $\alpha = 2 \operatorname{arctg} 21{,}6 = 174° \, 42'$.

Der Polhodiekegel hat die Achse AB und den Spitzenwinkel $\beta = 2 \operatorname{arctg} 0{,}0463 = 5° \, 18'$.

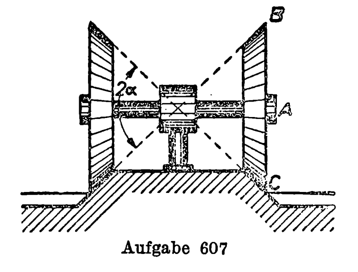
606. Ein Kegelrad vom Radius r, dessen Achse sich mit der Achse eines auf der ebenen Fläche liegenden Stützzahnrades in dessen Mittelpunkt schneidet, umkreist fünfmal in einer Minute das Stützzahnrad.

Es sind die relative Winkelgeschwindigkeit ω_r der Achse des Kegelrades um die Achse des Stützzahnrades und die absolute Winkelgeschwindigkeit ω_a des Kegelrades um seine momentane Achse zu ermitteln. Der Radius des Stützzahnrades ist $R = 2\,r$.

Lösung: $\omega_r = 1{,}047 \text{ sec}^{-1}$;
$\omega_a = 0{,}907 \text{ sec}^{-1}$.



Aufgabe 606



Aufgabe 607

607. Es sind die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der Punkte C und B einer Kegelwalze, die ohne zu gleiten auf einer horizontalen kegligen Ringstütze rollt, zu ermitteln, wenn der Bodenradius der Walze $R = 10\sqrt{2}$ cm, der Kegelwinkel $2\,\alpha = 90°$, die Umfangsgeschwindigkeit des Mittelpunktes A der Walze $v_A = 20$ cm/sec ist.

Lösung: $v_C = 0$; $b_C = 40 \text{ cm/sec}^2$;
$v_B = 40$ cm/sec;
$b_B = 40\sqrt{5} \text{ cm/sec}^2$.

608. Die Winkelgeschwindigkeit eines Körpers beträgt $\omega = 7\,\text{sec}^{-1}$. Seine momentane Achse bildet im gegebenen Augenblick mit den unbeweglichen Koordinatenachsen spitze Winkel α, β und γ.

Es sind zu bestimmen: 1. Der Geschwindigkeitsvektor v und seine Komponenten v_x, v_y, v_z für den Körperpunkt, dessen Koordinaten im gegebenen Augenblick 0, 2, 0 sind. 2. Der Abstand d dieses Punktes von der momentanen Achse, wenn $\cos\alpha = \frac{2}{7}$, $\cos\gamma = \frac{6}{7}$ ist. Maße in m.

Lösung: $v_x = -12\,\text{m/sec}$; $v_y = 0$; $v_z = 4\,\text{m/sec}$;
$v = 12{,}65\,\text{m/sec}$; $d = 1{,}82\,\text{m}$.

609. Es sind die Gleichungen der momentanen Achse und die Winkelgeschwindigkeit eines Körpers zu ermitteln, wenn bekannt ist, daß die Geschwindigkeitskomponenten des Punktes M_1 (0, 0, 2) gerade $v_{x_1} = 1\,\text{m/sec}$, $v_{y_1} = 2\,\text{m/sec}$, $v_{z_1} = 0$ sind. Die Geschwindigkeitsrichtungen des Punktes M_2 (0, 1, 2) werden durch die Cosinus $-\frac{1}{3}, +\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$ der Winkel, die sie mit den Koordinatenachsen einschließen, bestimmt.

Lösung: $x + 2y = 0$; $3x + z = 0$;
$\omega = 3{,}2\,\text{sec}^{-1}$.

610. Eine Körperbewegung um einen festen Punkt wird mit Hilfe der EULER-Winkel durch die Gleichungen $\varphi = nt$, $\psi = \frac{\pi}{2} + ant$, $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ festgelegt.

Es sind die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit und der Winkelbeschleunigung des Körpers auf unbewegliche Achsen zu ermitteln, wenn a und n konstante Werte sind. Es ist ferner der Parameter a zu bestimmen, bei dem die Fläche Oxy als Herpolhodiekegel dargestellt wird.

Lösung: 1) $\omega_x = \frac{n\sqrt{3}}{2}\cos ant$, $\omega_y = \frac{n\sqrt{3}}{2}\sin ant$, $\omega_z = n\left(a + \frac{1}{2}\right)$;

2) $\varepsilon_x = -\frac{an^2\sqrt{3}}{2}\sin ant$, $\varepsilon_y = \frac{an^2\sqrt{3}}{2}\cos ant$, $\varepsilon_z = 0$;

3) $a = -\frac{1}{2}$.

25. Addition von Drehbewegungen fester Körper um sich schneidende Achsen

611. Gegeben sind zwei kegelige Zahnräder mit festen Achsen, die sich unter einem Winkel $\frac{\alpha+\beta}{2}$ schneiden (vgl. Zeichnung). Das erste Rad dreht sich mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_1.

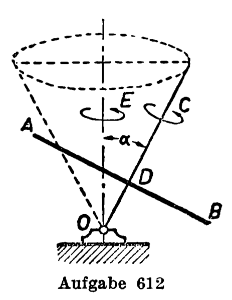
Es ist die Winkelgeschwindigkeit ω_2 des zweiten Rades zu ermitteln, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\omega_1 = 10\,\text{min}^{-1}$.

Lösung: $\omega_2 = \omega_1 \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = 5{,}16\ \text{min}^{-1}$.

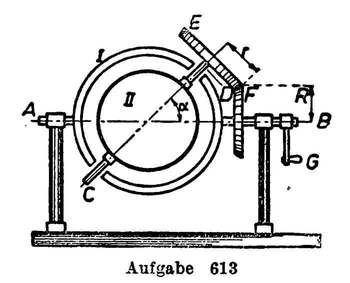
612. Ein Karussell besteht aus einer runden Fläche AB, in deren Mittelpunkt D die Drehachse OC angebracht ist. Die Drehzahl beträgt 6 U/min. Die Achse OC dreht sich gleichsinnig mit einer Geschwindigkeit von 10 U/min um die Vertikale OE. Der Winkel zwischen den Achsen ist $\alpha = 20°$, der Durchmesser der Fläche AB 10 m und der Abstand OD 2 m.

Es ist die Geschwindigkeit v des Punktes B für den Augenblick zu bestimmen, in dem derselbe die tiefste Lage einnimmt.

Lösung: $v = 8{,}77$ m/sec.



Aufgabe 612



Aufgabe 613

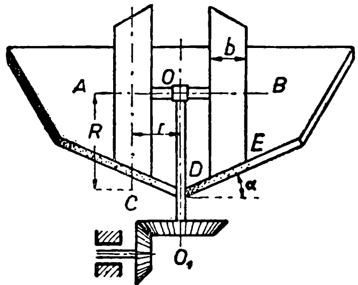
613. Eine Kugelmühle besteht aus einer Hohlkugel II, in der sich die Kugeln und das Zerkleinerungsgut befinden. Sie ist auf die Achse CD aufgesetzt, auf der das Kegelzahnrad E vom Radius r befestigt ist. Die Achse CD mit ihren Lagern befindet sich am Rahmen I, der mit der Achse AB ein Ganzes bildet und vom Handgriff G angetrieben wird. Rad E greift in das Rad F mit dem Radius R ein.

Es sind die absolute Winkelgeschwindigkeit und die absolute Winkelbeschleunigung der Zerkleinerungsmaschine zu ermitteln, wenn der Handgriff mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_0 gedreht wird. Der Winkel zwischen den Achsen AB und CD ist α.

Lösung: $\omega_A = \frac{\omega_0}{r}\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR\cos\alpha}$; $\varepsilon = \omega_0{}^2 \frac{R}{r}\sin\alpha$.

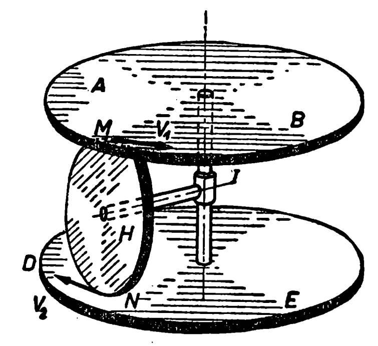
614. Zur Erzaufbereitung werden Mahlsteine, die aus gußeisernen Rädern mit Stahlreifen bestehen, angewendet. Die Räder rollen auf dem Boden einer kegeligen Schale. Die Mahlsteine drehen sich um die horizontale Achse AOB, die sich gleichzeitig um die vertikale Achse OO_1 dreht.

Es sind die absoluten Geschwindigkeiten der Punkte D und E des Mahlsteinreifens zu ermitteln. Die Winkelgeschwindigkeit um die vertikale Achse beträgt $\omega_e = \text{sec}^{-1}$, die Mahlstein breite $b = 50$ cm. Der mittlere Radius des Mahl steins ist $R = 1$ m, der mittlere Drehradius r 60 cm, $\text{tg}\,\alpha = 0{,}2$.



Lösung: $v_D = v_E = 28$ cm/sec.

615. Eine Differentialübersetzung besteht aus zwei Scheiben AB und DE, deren Mittelpunkte eine gemeinsame Drehachse haben. Die Scheiben drücken auf das Rad MN, dessen Achse HI senkrecht zur Scheibenachse liegt.



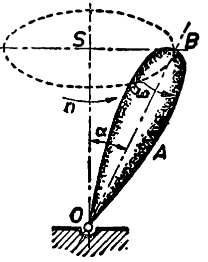
Es sind für das Rad MN die Geschwindigkeit seines Mittelpunktes H und die Winkelgeschwindigkeit ω_r der Drehung um die Achse HI zu ermitteln, wenn die Geschwindigkeiten der Berührungspunkte des Rades mit den Scheiben $v_1 = 3$ m/sec, $v_2 = 4$ m/sec sind. Der Radradius r beträgt 5 cm.

Lösung: $v = 0{,}5$ m/sec; $\omega_r = 70\,\text{sec}^{-1}$.

616. Unter Beibehaltung der Bedingungen aus Aufgabe 615 und mit der Länge $HI = \frac{1}{14}$ m sollen die absolute Winkelgeschwindigkeit und die absolute Winkelbeschleunigung des Rades MN ermittelt werden.

Lösung: $\omega = \sqrt{4949}\,\text{sec}^{-1}$; $\varepsilon = 490\,\text{sec}^{-2}$.

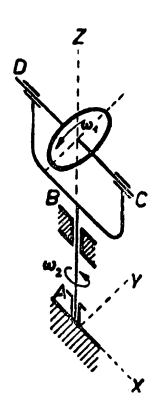
617. Ein Kreisel A dreht sich um die Achse OB mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_1. Die Achse OB beschreibt gleichzeitig einen Kegel. Die Kreiselspitze B macht in einer Minute n Umdrehungen. Der Winkel BOS heißt α.



Es sind die absolute Winkelgeschwindigkeit ω und die Winkelbeschleunigung ε des Kreisels zu ermitteln.

Lösung: $\omega = \sqrt{\omega_1{}^2 + \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 + 2\omega_1 \frac{\pi n}{30} \cos\alpha}$; $\varepsilon = \omega_1 \frac{\pi n}{30} \sin\alpha$.

618. Eine Scheibe dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 um die horizontale Achse CD. Gleichzeitig dreht sich die Achse CD mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_2 um die vertikale Achse AB.



Es sind Größe und Richtung der absoluten Winkelgeschwindigkeit ω und der absoluten Winkelbeschleunigung ε der Scheibe zu berechnen, wenn $\omega_1 = 5\,\text{sec}^{-1}$, $\omega_2 = 3\,\text{sec}^{-1}$ sind.

Lösung: $\omega = 5{,}82\,\text{sec}^{-1}$, der Winkel $\alpha = 30°\,41'$ wird von der Achse Ax gezählt; $\varepsilon = 15\,\text{sec}^{-2}$ in Richtung Ay.

619. Eine Scheibe mit dem Radius R dreht sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_r um die horizontale Achse O_1O_2. Diese dreht sich um die vertikale Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_e.

Es sind die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen der Punkte A und B, die am Ende des vertikalen Scheibendurchmessers liegen, zu ermitteln.

Lösung: $v_A = v_B = R\omega_r$; $b_A = b_B = R\omega_r \sqrt{4\omega_e^2 + \omega_r^2}$.

620. Ein Quadratrahmen dreht sich mit 2 U/min um die Achse AB. Um die Diagonale BC dreht sich eine Scheibe mit 2 U/min.

Es sind die absolute Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung der Scheibe zu ermitteln.

Lösung: $\omega = 0{,}387\ \text{sec}^{-1}$; $\varepsilon = 0{,}031\ \text{sec}^{-2}$.

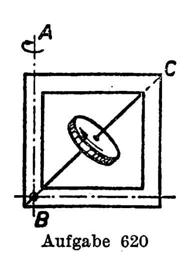
621. Die Achse OA eines Mahlsteines dreht sich gleichförmig um die vertikale Achse Oz mit einer Winkelgeschwindigkeit Ω. Die Achsenlänge OA ist R, Mahlsteinradius $AC = r$. Im betrachteten Augenblick habe der Punkt C des Steines die Geschwindigkeit $v = O$.

Wie groß ist die absolute Winkelgeschwindigkeit ω des Mahlsteines? Bestimme die momentane Achsenrichtung, den Polhodiekegel und den Herpolhodiekegel.

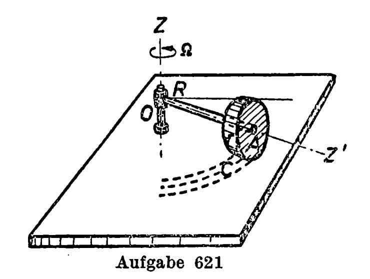
Lösung: $\omega = \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{r}\,\Omega$; die Momentanachse ist die Gerade OC; der Polhodiekegel rollt auf dem Herpolhodiekegel ab, ihre Spitzenwinkel sind:

Polhodiekegel: $\sphericalangle\, z'OC = \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{R}$

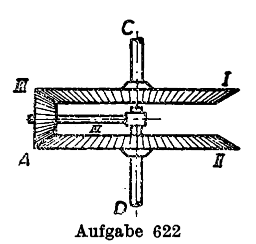
Herpolhodiekegel: $\sphericalangle\, zOC = \pi - \operatorname{arc\,tg} \frac{R}{r}$.



Aufgabe 620



Aufgabe 621



Aufgabe 622

622. Eine Differentialübersetzung besteht aus einem Kegelrad III (Satellit), das frei auf die Kurbel IV aufgesetzt ist. Die Kurbel IV kann sich um die feste Achse CD drehen. Kegelrad III ist mit den Kegelrädern I und II, die sich um die Achse CD gleichsinnig mit den Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1 = 5\ \text{sec}^{-1}$ und $\omega_2 = 3\ \text{sec}^{-1}$ drehen, verbunden. Der Radius des Rades III ist $r = 2$ cm, die Radien der Räder I und II sind gleich groß: $R = 7$ cm.

Es sind die Winkelgeschwindigkeit ω_4 der Kurbel IV, die Winkelgeschwindigkeit ω_{34} des Rades III im Verhältnis zur Kurbel IV und die Geschwindigkeit des Punktes A zu ermitteln.

Lösung: $v_A = 28$ cm/sec; $\omega_4 = 4\ \text{sec}^{-1}$; $\omega_{34} = 3{,}5\ \text{sec}^{-1}$.

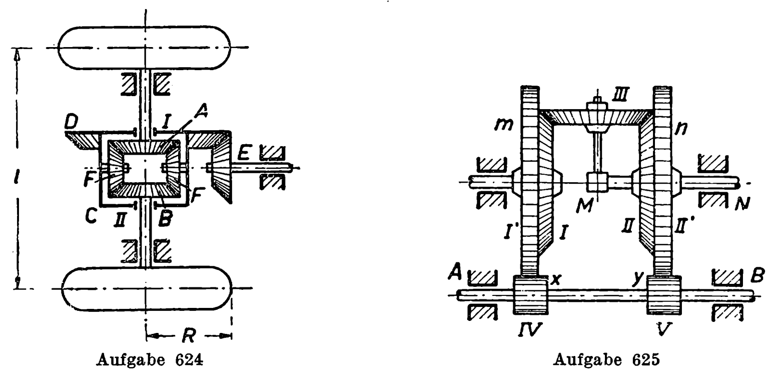
623. Im Differentialgetriebe der Aufgabe 622 drehen sich die Kegelräder I und II in verschiedenem Drehsinn mit Winkelgeschwindigkeiten: $\omega_1 = 7\,\text{sec}^{-1}$, $\omega_2 = 3\,\text{sec}^{-1}$. Es sind v_A, ω_4 und ω_{34} zu ermitteln, wenn $R = 5$ cm und $r = 2{,}5$ cm sind.

Lösung: $v_A = 10$ cm/sec; $\omega_4 = 2\,\text{sec}^{-1}$; $\omega_{34} = 10\,\text{sec}^{-1}$.

624. In Kraftwagen sind Differentialgetriebe eingebaut, die in folgender Weise arbeiten: Die Hinterachse besteht aus zwei Teilen I und II, an deren Enden zwei gleiche Zahnräder A und B fest aufgesetzt sind. Auf diesen Wellenteilen dreht sich in den Lagern ein Kasten C mit einem Kegelrad D, das mit dem Kasten fest verbunden ist. Die Drehung wird von der Hauptwelle durch das Zahnrad E eingeleitet und vom Kasten C auf die Zahnräder A und B durch zwei Kegelräder F übertragen.

Es sind die Winkelgeschwindigkeiten der Hinterräder des Autos, bezogen auf das Fahrgestell, und die Winkelgeschwindigkeit ω_r der Räder F im Verhältnis zum Kasten zu ermitteln, wenn das Auto mit einer Geschwindigkeit $v = 36$ km/h in einer Kurve vom mittleren Radius $\varrho = 5$ m fährt. Der Radius R der Laufräder beträgt $R = 0{,}5$ m und ihr Abstand auf der Hinterachse $l = 2$ m. Die Räderradien A und B sind doppelt so groß wie die Radien der Räder F: $R_0 = 2r$.

Lösung: $\omega_1 = 24\,\text{sec}^{-1}$; $\omega_2 = 16\,\text{sec}^{-1}$; $\omega_r = 8\,\text{sec}^{-1}$.



Aufgabe 624 Aufgabe 625

625. Um das gewünschte Übersetzungsverhältnis der Achsen AB und MN mit Hilfe der Kegelräder I und II der Differentialverbindung zu erhalten, werden zylindrische Zahnräder I′ und II′ mit den Zahnrädern IV und V, welche fest auf der Achse AB aufgesetzt sind, zum Eingriff gebracht. Es ist das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten ω_0 und ω der Wellen AB und MN zu ermitteln, wenn die Radradien I und II gleich und die Zähnezahl der Räder I′, II′, IV und V gleich m, n, x, y sind.

Lösung: $\dfrac{\omega}{\omega_0} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n}\right)$.

626. In der Differentialübersetzung der Aufgabe 625 ist zwischen den Zahnrädern I′ und IV ein Zwischenrad eingesetzt.

Es ist das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten ω_0 und ω der Wellen AB und MN zu ermitteln, wobei die übrigen Aufgabenbedingungen beibehalten werden.

Lösung: $\dfrac{\omega}{\omega_0} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{m} - \dfrac{y}{n}\right)$.

627. Eine Differentialübersetzung, die die beiden hinteren Achsenhälften eines Autos verbindet, besteht aus zwei Zahnrädern mit gleichem Radius $R = 6$ cm. Die Zahnräder sind auf Halbachsen aufgesetzt, die sich beim Fahren in den Kurven mit verschiedenen, jedoch unveränderlichen Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1 = 6\ \text{sec}^{-1}$ und $\omega_2 = 4\ \text{sec}^{-1}$ gleichsinnig drehen. Zwischen den Zahnrädern ist ein frei laufendes Rad (Satellit) mit dem Radius $r = 3$ cm angebracht, das sich um seine Achse dreht.

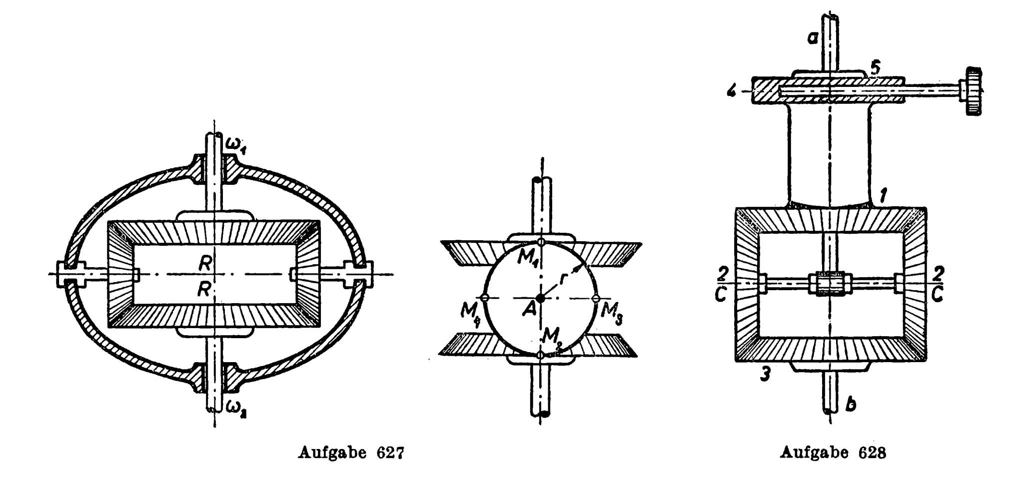
Es sind gegenüber dem Autogehäuse die Beschleunigungen von vier Punkten M_1, M_2, M_3 und M_4 des Satelliten, die am Ende der beiden Durchmesser liegen (siehe Zeichnung), zu ermitteln.

Lösung: $b_1 = 210{,}4\ \text{cm/sec}^2$; $b_2 = 90{,}8\ \text{cm/sec}^2$; $b_3 = b_4 = 173{,}4\ \text{cm/sec}^2$.

628. Im Differential einer Zahnschneidemaschine sitzt das Beschleunigungsrad 4 gemeinsam mit Rad 1 auf einer Hohlwelle. Am Ende der Antriebswelle a ist ein Verbindungskopf, der die Achse CC der Satelliten 2 trägt, angebracht.

Es ist die Winkelgeschwindigkeit der Abtriebswelle b mit dem fest angebrachten Rad 3 in fünf Fällen zu ermitteln.

Gegeben ist:
1) Die Winkelgeschwindigkeit der Antriebswelle ist ω_a. Die Winkelgeschwindigkeit des Beschleunigungsrades beträgt $\omega_4 = 0$.
2) Die Winkelgeschwindigkeit der Antriebswelle ist ω_a, das Beschleunigungsrad dreht sich gleichsinnig wie die Antriebswelle mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_4.
3) Das Beschleunigungsrad und die Antriebswelle drehen sich gleichsinnig mit den gleichen Winkelgeschwindigkeiten $\omega_4 = \omega_a$.
4) Das Beschleunigungsrad und die Antriebswelle drehen sich gleichsinnig, wobei $\omega_4 = 2\,\omega_a$ ist.



Aufgabe 627 Aufgabe 628

5) Die Winkelgeschwindigkeit der Antriebswelle ist ω_a. Das Beschleunigungsrad dreht sich gegensinnig mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_4.

Lösung: 1) $\omega_b = 2\,\omega_a$; 2) $\omega_b = 2\,\omega_a - \omega_4$; 3) $\omega_b = \omega_a$; 4) $\omega_b = 0$; 5) $\omega_b = 2\,\omega_a + \omega_4$.

629. Im Differential einer Zahnschneidemaschine, wie es eben beschrieben wurde, ist die Winkelgeschwindigkeit der Antriebswelle $\omega_a = 60\ \text{min}^{-1}$.

Es ist zu ermitteln, wie groß die Winkelgeschwindigkeit vom Beschleunigungsrad sein muß, damit die Abtriebswelle unbeweglich bleibt.

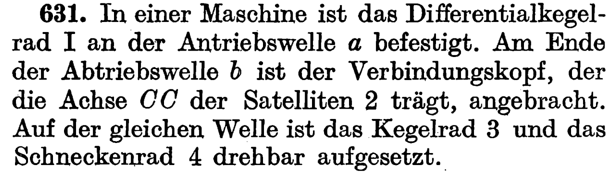
Lösung: $\omega_4 = 120\ \text{min}^{-1}$.

630. Im Differential einer Zahnschneidemaschine trägt das Beschleunigungsrad 4 die Satellitenachse. Die Winkelgeschwindigkeit der Antriebswelle ist ω_a. Es soll die Winkelgeschwindigkeit der Abtriebswelle in drei Fällen bestimmt werden:

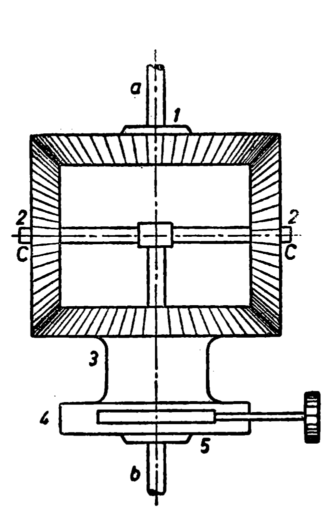
1) Das Beschleunigungsrad 4 dreht sich gleichsinnig wie die Antriebswelle mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega_4 = \omega_a$.
2) Wie unter 1, jedoch ist die Drehung der Antriebswelle der des Beschleunigungsrades entgegengesetzt.
3) Das Beschleunigungsrad und die Satellitenachse sind unbeweglich.

Lösung: 1) $\omega_b = \omega_a$; 2) $\omega_b = -3\omega_a$; 3) $\omega_b = -\omega_a$.

631. In einer Maschine ist das Differentialkegelrad I an der Antriebswelle a befestigt. Am Ende der Abtriebswelle b ist der Verbindungskopf, der die Achse CC der Satelliten 2 trägt, angebracht. Auf der gleichen Welle ist das Kegelrad 3 und das Schneckenrad 4 drehbar aufgesetzt.



Es ist das Übersetzungsverhältnis bei feststehender Schnecke 5 und somit bei feststehenden Rädern 4 und 3 zu ermitteln. Sämtliche Kegelräder haben den gleichen Radius.



Lösung: $\dfrac{\omega_b}{\omega_a} = 0{,}5$.

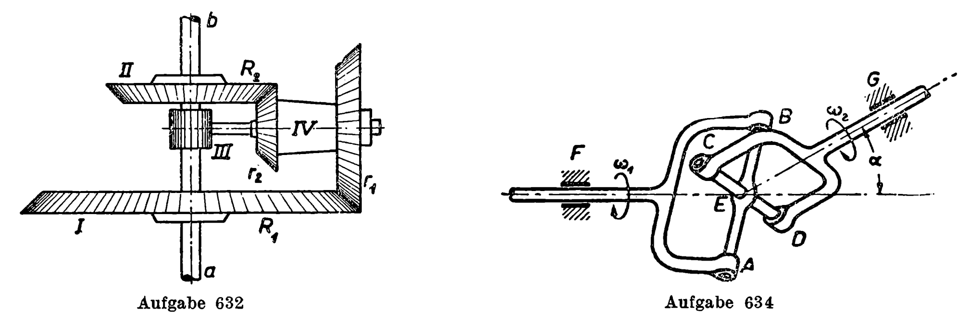
632. Ein Doppeldifferential besteht aus einer Kurbel III, die sich um die unbewegliche Achse ab drehen kann. Auf die Kurbel ist ein Satellit IV, bestehend aus zwei gekoppelten Kegelrädern mit den Radien $r_1 = 5$ cm und $r_2 = 2$ cm, aufgesetzt. Diese Räder stehen mit zwei Kegelrädern I und II mit den Radien $R_1 = 10$ cm und $R_2 = 5$ cm im Eingriff. Sie drehen sich um die Achse ab, sind jedoch mit der Kurbel nicht verbunden. Die Winkelgeschwindigkeiten der Räder I und II sind $\omega_1 = 4{,}5\ \sec^{-1}$ und $\omega_2 = 9\ \sec^{-1}$.

Es sind die Winkelgeschwindigkeit ω_3 der Kurbel und die Winkelgeschwindigkeit ω_{43} des Satelliten gegenüber der Kurbel zu ermitteln, wenn beide Räder gleichen Drehsinn haben.

Lösung: $\omega_3 = 7\ \sec^{-1}$; $\omega_{43} = 5\ \sec^{-1}$.

633. Die vorherige Aufgabe ist unter der Annahme zu lösen, daß die Zahnräder I und II entgegengesetzten Drehsinn haben.

Lösung: $\omega_3 = 3\ \sec^{-1}$; $\omega_{43} = 15\ \sec^{-1}$.



Aufgabe 632

Aufgabe 634

634. Ein Kreuzstück $ABCD$ eines Kardangelenkes, das zur Übertragung von Drehungen bei sich schneidenden Achsen Verwendung findet, dreht sich um den unbeweglichen Punkt E.

Es ist das Verhältnis $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ der Wellen, die mit dem Kreuzstück verbunden sind, für zwei Fälle zu ermitteln:

1) Wenn die Gabelfläche ABF horizontal und die Gabelfläche CDG vertikal steht.

2) Wenn die Gabelfläche ABF vertikal und die Gabelfläche CDG senkrecht zu ihr steht.

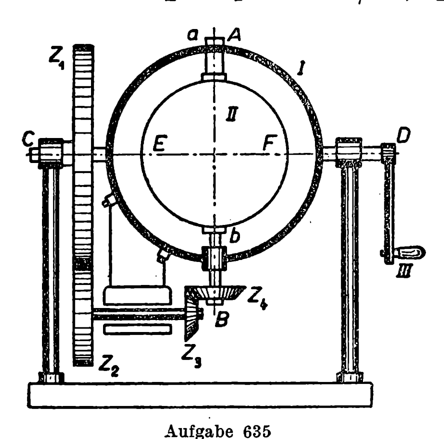
Der Winkel zwischen den Wellenachsen ist konstant $\alpha = 60°$.

Lösung: 1) $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{\cos\alpha} = 2$; 2) $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \cos\alpha = 0{,}5$.

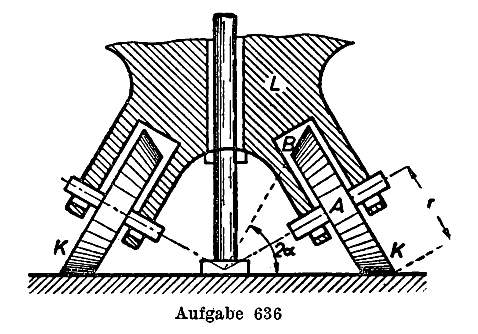
635. Eine Kugelmühle besteht aus einer hohlen Kugel mit dem Durchmesser $d = 10$ cm. Die Kugel ist auf der Achse AB angebracht, an der ein Kegelrad mit $z_4 = 28$ Zähnen befestigt ist. Die Achse AB ist im drehbaren Rahmen I bei a und b gelagert. Der Rahmen I ist mit der Achse CD fest verbunden und wird durch die Handkurbel III angetrieben. Durch die Zahnräder mit den Zähnezahlen $z_1 = 80$, $z_2 = 43$, $z_3 = 28$ (das erste Rad ist unbeweglich) wird die Kugelmühle zum Drehen um die Achse AB gebracht.

Es sind die absolute Winkelgeschwindigkeit, die Winkelbeschleunigung der Kugel und die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der zwei Punkte E und F, die in diesem Augenblick auf der Achse CD liegen, zu ermitteln. Die Winkelgeschwindigkeit der Handkurbel beträgt $\omega = 4{,}3\ \mathrm{sec}^{-1}$.

Lösung: $\omega_a = 9{,}08\ \mathrm{sec}^{-1}$; $\varepsilon = 34{,}4\ \mathrm{sec}^{-2}$;
$v_E = v_F = 40\ \mathrm{cm/sec}$; $b_E = b_F = 468\ \mathrm{cm/sec}^2$.



Aufgabe 635



Aufgabe 636

636. Der drehbare Teil einer Brücke ruht auf einer Gleitfläche. Die tragenden Kegelräder K, deren Achsen im Ringrahmen L schräg befestigt sind, rollen auf dieser Gleitfläche.

Es sind die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung der Kegelräder, die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte A, B, C zu ermitteln (A ist Mittelpunkt des Kegelrades). Der Radius der Kegelräder beträgt $r = 25$ cm, der Spitzenwinkel ist $2\alpha\left(\cos\alpha = \frac{84}{85}\right)$. Der Ringrahmen dreht sich um die vertikale Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = \text{konst.} = 0{,}1\ \mathrm{sec}^{-1}$ (vgl. Zeichnung).

Lösung: $\omega = 0{,}646\ \mathrm{sec}^{-1}$, $\varepsilon = 0{,}0646\ \mathrm{sec}^{-2}$;
$v_A = 15{,}96\ \mathrm{cm/sec}$, $v_B = 31{,}92\ \mathrm{cm/sec}$, $v_c = 0$;
$b_A = 1{,}596\ \mathrm{cm/sec}^2$, $b_B = 10{,}50\ \mathrm{cm/sec}^2$,
$b_C = 10{,}056\ \mathrm{cm/sec}^2$.

DRITTER TEIL

DYNAMIK

VIII. Dynamik des materiellen Punktes

26. Bestimmung der Kräfte aus der gegebenen Bewegung

637. In einem Schacht wird ein Förderkorb, dessen Gewicht 280 kg beträgt, mit gleichförmiger Beschleunigung herabgelassen; in den ersten 10 sec erreicht der Korb die Tiefe von 35 m.

Welche Kraft wirkt am Seil, an dem der Korb hängt?

Lösung: 260 kg.

638. Eine waagerechte Platte ist mit 10 kg belastet und wird mit einer Beschleunigung von 4 m/sec² senkrecht nach unten bewegt.

Wie stark ist dabei der Druck der Belastung auf die Platte?

Lösung: 5,92 kg.

639. An einem $P = 3$ kg schweren Körper, der auf dem Tische liegt, ist ein Faden angebunden.

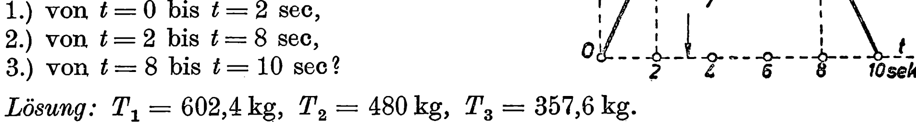
Mit welcher Beschleunigung muß man an dem Faden senkrecht nach oben ziehen, damit er zerreißt? Die Bruchbelastung des Fadens beträgt $T = 4{,}2$ kg.

Lösung: $b = 3{,}92$ m/sec².

640. Die Geschwindigkeitsverteilung einer nach oben gerichteten Fahrstuhlbewegung entspricht der angegebenen graphischen Darstellung. Der Fahrstuhl hat ein Gewicht von 480 kg.

Wie groß sind die Seilkräfte T_1, T_2 und T_3 des Seiles, an dem der Fahrstuhl hängt, während der drei Zeitintervalle:

1.) von $t = 0$ bis $t = 2$ sec,
2.) von $t = 2$ bis $t = 8$ sec,
3.) von $t = 8$ bis $t = 10$ sec?



Lösung: $T_1 = 602{,}4$ kg, $T_2 = 480$ kg, $T_3 = 357{,}6$ kg.

641. Ein 3 kg schwerer Stein hängt an einem 1 m langen Faden und bewegt sich in senkrechter Ebene auf einem Kreis.

Man bestimme die Winkelgeschwindigkeit ω des Steins, bei der der Faden zerreißt. Die Bruchbelastung des Fadens beträgt 9 kg.

Lösung: $\omega = 4{,}44$ sec^{-1}.

642. Auf Kurvenstrecken der Eisenbahn findet eine Überhöhung der Außenschiene gegenüber der Innenschiene statt, damit der Druck des fahrenden Zuges senkrecht zur Schienenebene gerichtet bleibt.

Man bestimme die Überhöhung h der Außenschiene gegenüber der Innenschiene. Der mittlere Krümmungsradius des Gleises beträgt 400 m, die Geschwindigkeit des Zuges 10 m/sec. Die Spurweite der Schienen beträgt 1,6 m.

Lösung: $h = 4{,}1$ cm.

643. In einem Eisenbahnwagen wird ein Frachtstück mit einer Federwaage gewogen, während dieser eine Kurve mit der Geschwindigkeit von 72 km/h durchfährt. Das Frachtstück wiegt 5 kg. Die Waage zeigt ein Gewicht von 5,1 kg an. Wie stark ist die Krümmung der Gleisstrecke, wenn man von der Masse der Waage absieht?

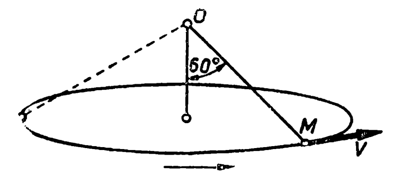
Lösung: 202 m.

644. Ein Gewicht von 2 kg hängt am Ende eines 1 m langen Fadens. Infolge eines Stoßes hat das Gewicht eine horizontale Geschwindigkeit von 5 m/sec. Wie stark ist die Belastung des Fadens unmittelbar nach dem Stoß?

Lösung: 7,1 kg.

645. Ein 1 kg schweres Gewicht M hängt am Ende eines 30 cm langen Fadens, der im Punkt O befestigt ist. Das Gewicht stellt ein Kegelpendel dar, d. h., es beschreibt einen horizontalen Kreis, wobei der Faden mit der Vertikalachse einen Winkel von 60° bildet.

Man bestimme die Geschwindigkeit v des Gewichtes und die Fadenkraft T.



Lösung: $v = 210$ cm/sec, $T = 2$ kg.

646. Ein 1000 kg schweres Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 10 m/sec über eine gewölbte Brücke. Der Krümmungsradius in Brückenmitte beträgt $\varrho = 50$ m.

Wie stark ist der Druck, den das Auto auf die Brücke ausübt in dem Augenblick, in dem es die Mitte derselben passiert?

Lösung: 796 kg.

647. In der aufsteigenden Kabine eines Fahrstuhls wird ein Körper mit einer Federwaage gewogen. Das Gewicht des Körpers beträgt 5 kg. Die Federwaage zeigt 5,1 kg an.

Wie groß ist die Beschleunigung der Kabine?

Lösung: 0,196 m/sec^2.

648. Das Chassis eines Straßenbahnwagens wiegt einschließlich Nutzlast $Q_1 = 10$ t. Das Fahrgestell hat ein Gewicht von $Q_2 = 1$ t.

Man bestimme die größte Kraft des Wagens auf die Schienen einer geradlinigen Strecke, wenn der Wagen bei der Fahrt senkrechte harmonische Schwingungen nach dem Gesetz $x = 2 \sin 10\, t$ cm ausführt.

Lösung: $N_1 = 13{,}04$ t; $N_2 = 8{,}96$ t.

649. Der Kolben einer Dampfmaschine bewegt sich nach folgender Gleichung:

$$x = r\left(\cos \omega t + \frac{r}{4\,l} \cos 2\, \omega t\right) \text{ cm};$$

es bedeuten:

r = Länge der Kurbel,
l = Länge der Kurbelstange,
ω = die konstante Winkelgeschwindigkeit der Kurbelwelle.

Wie groß ist die maximale Trägheitskraft des Q kg schweren Kolbens?

Lösung: $P = \frac{Q}{g}\, r\, \omega^2 \left(1 + \frac{r}{l}\right)$.

650. Ein Sieb zur Aufbereitung von Erzen führt senkrechte harmonische Schwingungen der Amplitude $a = 5$ cm aus.

Man finde die kleinste Kreisfrequenz der Siebschwingungen, bei der die Erzstücke, die auf dem Sieb liegen, abgesondert und nach oben geworfen werden.

Lösung: $\omega = 14 \text{ sec}^{-1}$.

651. Ein 20 g schwerer Körper schwingt auf einer horizontalen Geraden. Die Entfernung des Körpers von einem festen Punkt wird durch die Gleichung $s = 10 \sin \frac{\pi}{2}\, t$ bestimmt. Welche Abhängigkeit besteht zwischen der Kraft P, die auf den Körper wirkt, und der Entfernung s, und wie groß ist der höchste Wert dieser Kraft?

Lösung: $P = -5{,}03\, s$ g; $P_{\max} = 50{,}3$ g.

652. Die Bewegung eines Massenpunktes, dessen Gewicht 2 g beträgt, wird durch die Gleichungen

$$x = 3 \cos 2\,\pi\, t \text{ cm};$$
$$y = 4 \sin \pi\, t \text{ cm}$$

ausgedrückt (t in Sekunden).

Man bestimme die Kraftkomponenten, die auf den Punkt in Abhängigkeit von seinen Koordinaten einwirken.

Lösung: $X = -0{,}08\, x$ g; $Y = -0{,}02\, y$ g.

653. Eine Kugel der Masse m fällt unter dem Einfluß der Schwerkraft und des Luftwiderstandes. Ihre Bewegungsgleichung lautet: $x = 490\, t - 245\, (1 - e^{-2t})$ (x in Zentimeter, t in Sekunden). Die Achse zeigt senkrecht nach unten.

Es ist der Luftwiderstand P_L, der auf die Kugel wirkt, in Abhängigkeit von ihrer Geschwindigkeit v zu bestimmen, $g = 980$ cm/sec^2.

Lösung: $P_L = 2\, m \cdot v$.

654. Das Gewicht des Tisches einer Hobelmaschine beträgt $Q_1 = 700$ kg, das Gewicht des Werkstückes $Q_2 = 300$ kg, die Geschwindigkeit des Tisches $v = 0{,}5$ m/sec und die Anlaufzeit $t = 0{,}5$ sec.

Welche Kraft wird für den Anlauf benötigt, wenn die Bewegung als gleichförmig beschleunigt angesehen wird? Welche Kraft ist für die anschließende Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit erforderlich? Der Reibungskoeffizient beim Anlauf beträgt $\mu_1 = 0{,}14$. Für die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit gilt $\mu_2 = 0{,}07$.

Lösung: $P_1 = 242$ kg; $P_2 = 70$ kg.

655. Der beladene Wagen einer Standseilbahn mit einem Gewicht von $Q = 700$ kg wird auf einer Neigung von $\alpha = 15°$ heruntergelassen. Die Geschwindigkeit beträgt dabei $v = 1{,}6$ m/sec.

Es sind die Seilkraft für konstante Geschwindigkeit und für den Bremsweg des Wagens zu bestimmen. Die Bremszeit beträgt $t = 4$ sec, der Koeffizient des Bewegungswiderstandes $\mu = 0{,}015$.

Lösung: $S_1 = 171{,}5$ kg; $S_2 = 200{,}1$ kg.

656. Eine Last von $Q = 10$ t Gewicht hängt an einer Laufkatze, die sich auf dem Ausleger eines Laufkranes mit der Geschwindigkeit von $v = 1$ m/sec bewegt. Der Schwerpunktsabstand der Last vom Aufhängepunkt beträgt $l = 5$ m. Bei plötzlichem Bremsen der Laufkatze setzt die Last ihre Bewegung durch die Trägheit fort, so daß eine Schwingung entsteht.

Wie groß ist die höchste Beanspruchung des Seiles?

Lösung: $S = 10{,}2$ t.

657. Der Wagen einer Hängebahn durchfährt eine Krümmung vom Radius $R = 30$ m mit $v = 10$ m/sec Geschwindigkeit. Das Gewicht des Wagens beträgt 1,5 t. Wie groß ist die Zugkraft, die in der Aufhängung des Wagens wirkt, und um welchen Winkel α weicht der Wagen von der Vertikalen ab?

Lösung: $\alpha = 18° 47'$; $N = 1{,}585$ t.

658. Das Gewicht eines Eisenbahnzuges ohne Lokomotive, der sich mit gleichförmiger Beschleunigung geradlinig bewegt, beträgt 200 t. 60 Sekunden nach Beginn der Bewegung beträgt die Geschwindigkeit 54 km/h.

Man stelle die Kraft an der Kupplung zwischen Lokomotive und Zug während der Bewegung fest, wenn der Koeffizient des Fahrwiderstandes $\mu = 0{,}005$ beträgt.

Lösung: 6,1 t.

659. Ein 2000 kg schweres Flugzeug fliegt horizontal mit einer Beschleunigung von 5 m/sec^2 und hat im gegebenen Augenblick eine Geschwindigkeit von 200 m/sec. Der Luftwiderstand ist proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit. Er beträgt bei einer Geschwindigkeit von 1 m/sec 0,05 kg. Man stelle die Zugkraft des Propellers fest, wenn er in einem Winkel von 10° zur Flugrichtung steht.

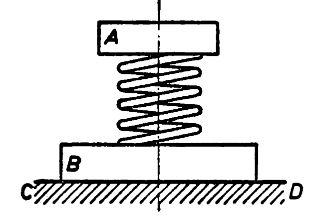
Lösung: $F = 3080$ kg.

660. Ein 6 t schwerer Lastkraftwagen fährt mit der Geschwindigkeit von 21,6 km/h auf eine Fähre. Im Augenblick des Befahrens der Fähre wird der Wagen gebremst und bleibt nach 10 m stehen.

Man stelle die Beanspruchung von jedem der beiden Seile fest, mit denen die Fähre am Ufer befestigt ist. Die Bewegung des Wagens wird als gleichförmig verzögert angenommen. Bei der Lösung dieser Aufgabe ist von der Masse und der Bewegung der Fähre abzusehen.

Lösung: Jedes der beiden Seile hat 550 kg aufzunehmen.

661. Zwei Lasten A und B vom Gewicht $P_A = 20$ kg und $P_B = 40$ kg sind durch eine Feder verbunden (vgl. Zeichnung). Die Last A führt freie Schwingungen der Amplitude 1 cm und der Periode 0,25 sec auf der vertikalen Geraden aus.



Man berechne den größten und kleinsten Druck, den die Lasten A und B auf die Stützfläche CD ausüben.

Lösung: $R_{\max} = 72{,}8$ kg, $R_{\min} = 47{,}2$ kg.

662. Eine Last von $P = 5$ kg Gewicht hängt an einer Feder und führt harmonische Schwingungen aus.

Man stelle unter Vernachlässigung der Widerstände die Federkonstante fest, wenn die Last P sechs volle Schwingungen in 2,1 sec ausführt.

Lösung: $c = 1{,}65$ kg/cm.

663. Ein Flugzeug führt einen senkrechten Sturzflug aus und erreicht dabei die Geschwindigkeit von 1000 km/h. Beim Herausziehen des Flugzeuges aus der Vertikallage beschreibt es einen Kreisbogen vom Radius $R = 600$ m.

Wie groß ist die Höchstkraft, die den 80 kg schweren Flugzeugführer auf den Sitz drückt?

Lösung: 1130 kg.

664. Wie groß ist das Gewicht einer Masse auf dem Mond und auf der Sonne, die auf der Erde 1 kg wiegt?

Mondbeschleunigung $g_M = 1{,}7$ m/sec²;
Sonnenbeschleunigung $g_S = 270$ m/sec².

Lösung: Die anziehende Kraft beträgt:
auf dem Mond 0,1735 kg,
auf der Sonne 27,55 kg.

665. Bei welcher Geschwindigkeit der Lokomotive fließt das Öl aus dem Schmiertopf des kurbelseitigen Schubstangenkopfes, der zur Schmierung des Kurbelzapfenlagers dient, wenn der Schmiertopfdeckel geöffnet ist? Der Durchmesser des Lokomotivenrades beträgt $D = 1900$ mm, der Kurbelradius $r = 325$ mm. Die Lokomotive bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf horizontaler gerader Strecke.

Lösung: $v \geqq 18{,}8$ km/h.

666. Eine Lokomotive vom Gewicht $Q = 180$ t fährt mit der Geschwindigkeit von $v = 72$ km/h über eine Brücke. In dem Augenblick, in dem sich die Lokomotive auf der Mitte der Brücke befindet, beträgt die Durchbiegung derselben $h = 0{,}1$ m.

Man stelle den zusätzlichen Druck fest, der in diesem Augenblick auf die Brücke ausgeübt wird. Dabei nimmt man an, daß die Brücke aus einem masselosen Träger mit konstantem Querschnitt besteht. Die Brücke hat eine Länge von 100 m und ist an beiden Seiten gelenkig gelagert. Die Abmessungen der Lokomotive sind zu vernachlässigen.

Lösung: $\dfrac{12Q\,hv^2}{gl^2} = 0{,}88$ t.

667. Ein Radfahrer durchfährt eine Kurve vom Radius 10 m mit 5 m/sec Geschwindigkeit.

Wie groß muß der Neigungswinkel des Fahrrades zur Vertikalen sowie der kleinstmögliche Reibungskoeffizient zwischen Fahrradreifen und dem Boden sein, damit das Fahrrad im Gleichgewicht bleibt?

Lösung: $14^\circ\,20'$; 0,255.

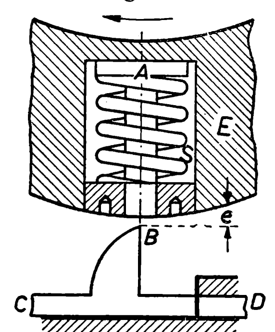
668. Eine Radrennbahn ist in den Kurven überhöht.

Mit welcher Höchst- und welcher Mindestgeschwindigkeit kann man in der überhöhten Kurve fahren? Die Kurve hat den Radius R, ihr Neigungswinkel zur Horizontalen beträgt α. Der Reibungskoeffizient der Gummireifen auf der Fahrbahn beträgt μ.

Lösung: $v_{\min} = \sqrt{gR\,\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \mu}{1 + \mu\operatorname{tg}\alpha}}$;

$$v_{\max} = \sqrt{gR\,\frac{\operatorname{tg}\alpha + \mu}{1 - \mu\operatorname{tg}\alpha}}.$$

669. Um einem Schwungradbruch vorzubeugen, wird folgende Vorrichtung verwendet. In der Felge E des Schwungrades sitzt der Körper A, der innen durch die Feder S gehalten wird. Erreicht die Geschwindigkeit des Schwungrades ihren Höchstbetrag, so erfaßt der aus dem Schwungradkranz heraustretende Körper A den Ansatz B des Riegels CD, der die Dampfzufuhr sperrt.



Gegeben sind: Gewicht des Körpers $A = 1{,}5$ kg; Entfernung des Ansatzes B vom Schwungrad $= 2{,}5$ cm; höchste Drehzahl des Schwungrades $= 120$ U/min.

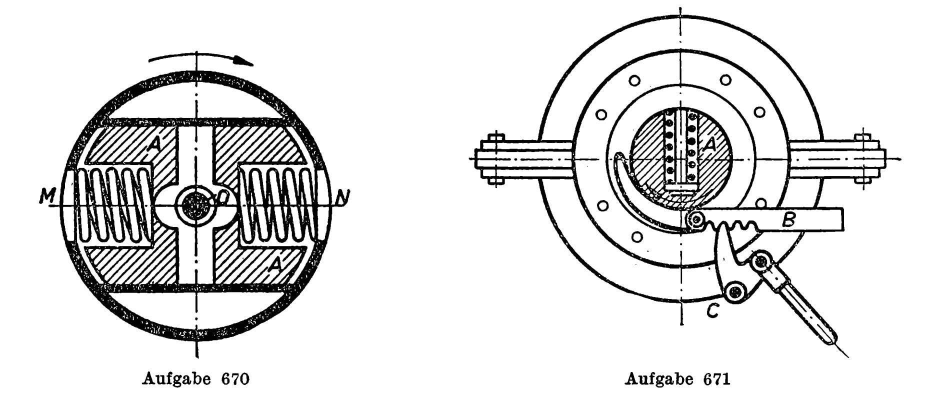
Man bestimme die Federkonstante c der Feder S unter der Annahme, daß die Masse des Körpers A in einem Punkt konzentriert ist. Seine Entfernung von der Drehachse des Schwungrades beträgt 147,5 cm.

Lösung: 14,5 kg/cm.

670. In einem Regler befinden sich die je 30 kg schweren Gewichte A, die längs der Achse MN gleiten können. Diese Gewichte sind mit den Punkten M und N durch Federn verbunden. Die Schwerpunkte der Gewichte fallen mit den Enden der Federn zusammen, deren Abstand von der Drehachse O in nicht gespanntem Zustand 5 cm betragen. Die Federkonstante beträgt $c = 20$ kg/cm.

Wie groß ist die Entfernung der Gewichtsschwerpunkte von der Achse O, wenn der Regler 120 U/min macht?

Lösung: 6,58 cm.



Aufgabe 670 Aufgabe 671

671. Der Schnellschluß einer Dampfturbine besteht aus einem Stift A vom Gewicht $Q = 0{,}225$ kg, der durch eine Feder in eine radiale Bohrung der Turbinenwelle eingedrückt wird. Bei normaler Drehzahl der Turbine $n = 1500$ U/min beträgt der Abstand des Stiftschwerpunktes von der Drehachse der Welle $l = 8{,}5$ mm. Erhöht sich die Drehzahl um 10%, so überwindet der Stift den Widerstand der Feder, tritt aus der Welle heraus und löst über ein Hebelsystem der Hebel B und C den Ventilschluß aus. Der Schwerpunkt des Stiftes verschiebt sich dabei um $x = 4{,}5$ mm aus seiner Normallage.

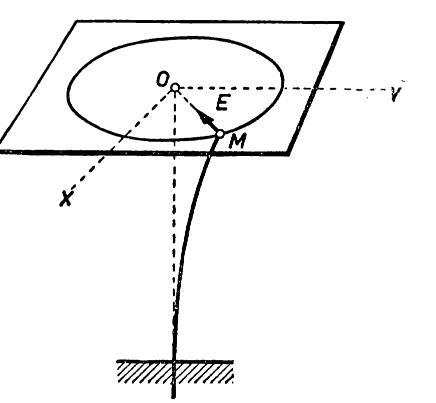
Es ist die Federkonstante der Stiftfeder zu bestimmen. Die Federkraft wird proportional zur Verschiebung angenommen.

Lösung: $c = 9{,}08$ kg/cm.

672. Ein Massepunkt m bewegt sich auf dem Teil der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, der im ersten Quadranten liegt. Der Punkt wird parallel zur y-Achse beschleunigt. Zur Zeit $t = 0$ waren die Punktkoordinaten $x = 0$, $y = b$ und die Anfangsgeschwindigkeit v_0. Man bestimme die Kraft, die auf die Punktmasse in jedem Punkt der Bewegungsbahn einwirkt.

Lösung: $F_y = -m \frac{v_0^2 b^4}{a^2 y^3}$.

673. Eine kleine Kugel der Masse m ist am oberen Ende eines elastischen Vertikalstabes befestigt, dessen unteres Ende fest eingespannt ist. Bei geringen Abweichungen des Stabes von der vertikalen Gleichgewichtslage kann man annehmen, daß sich der Kugelmittelpunkt in einer Horizontalebene Oxy bewegt, die durch die obere Gleichgewichtslage des Kugelmittelpunktes geht.



Man bestimme das Gesetz der Änderung der Kraft, die durch den Stab auf die Kugel einwirkt. Die Bewegung der Kugel ist bestimmt durch

$$x = a \cos kt, \; y = b \sin kt,$$

wobei a, b, k konstante Größen sind.

Lösung: $F = mk^2 r$, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

27. Bewegungsgleichungen der Punktdynamik

a) Geradlinige Bewegung

674. Ein Stein fällt ohne Anfangsgeschwindigkeit in einen Schacht. Der Schall vom Aufschlag des Steines auf dem Boden des Schachtes wird 6,5 sec nach dem Fallenlassen des Steines vernommen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles beträgt 330 m/sec.

Wie tief ist der Schacht?

Lösung: 175 m.

675. Ein schwerer Körper gleitet auf einer glatten Ebene, die eine Neigung von 30° hat.

Welche Zeit braucht der Körper, um die Strecke von 9,6 m zurückzulegen, wenn seine Geschwindigkeit bei Beginn der Bewegung 2 m/sec beträgt?

Lösung: 1,61 sec.

676. Beim Abfeuern eines Geschützes verläßt das Geschoß mit einer Geschwindigkeit von 570 m/sec das Rohr. Das Gewicht des Geschosses beträgt 6 kg.

Wie groß ist die mittlere Kraft P der Pulvergase bei einer Rohrlänge von 2 m?

Wie lange dauert die Bewegung des Geschosses im Geschützrohr, wenn man den Druck der Gase als konstant annimmt?

Lösung: $P = 49{,}7$ t; 0,007 sec.

677. Ein Körper vom Gewicht P legt infolge eines Stoßes auf einer rauhen Fläche die Strecke $s = 24{,}5$ m in 5 sec zurück und bleibt dann stehen.

Wie groß ist der Reibungskoeffizient μ?

Lösung: $\mu = 0{,}2$.

678. Nach welcher Zeit und bei welcher Bremsstrecke kann ein Straßenbahnwagen aus einer Geschwindigkeit von 36 km/h zum Stehen gebracht werden? Der Bremswiderstand beträgt 300 kg pro 1 t Wagengewicht.

Lösung: 3,4 sec; 16,9 m.

679. Indem man in erster Annäherung den Widerstand einer Rücklaufbremse als konstant annimmt, soll die Dauer des Rückstoßes eines 76-mm-Feldgeschützrohres bestimmt werden. Die Anfangsgeschwindigkeit des Rohres beträgt 10 m/sec, die Länge des Rücklaufweges 1 m.

Lösung: 0,2 sec.

680. Man finde die größte Fallgeschwindigkeit einer $P = 10$ kg schweren Kugel vom Radius $r = 8$ cm, wenn man annimmt, daß der Luftwiderstand $R = k\sigma v^2$ beträgt. Hierin bedeutet:

v = Fallgeschwindigkeit,

σ = Projektionsfläche des fallenden Körpers auf die zur Fallrichtung senkrechte Ebene,

k = Dimensionsfaktor; er ist von der Form des Körpers abhängig und beträgt für die Kugel 0,024 kgsec^2/m^4.

Lösung: $v = 144$ m/sec.

681. Zwei geometrisch gleiche homogene Kugeln sind aus verschiedenem Material hergestellt. Das spezifische Gewicht des Kugelmaterials beträgt γ_1 und γ_2. Beide Kugeln fallen in Luft.

Man bestimme das Verhältnis der Höchstgeschwindigkeiten der Kugeln, wenn der Luftwiderstand proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit zunimmt.

Lösung: $$\frac{v_{1\,\max}}{v_{2\,\max}} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}.$$

682. Bei der Aufwärtsbewegung eines Massepunktes M auf einer rauhen schiefen Ebene, die mit der Horizontalen den Winkel α bildet, beträgt die Anfangsgeschwindigkeit 15 m/sec. Der Reibungskoeffizient ist $\mu = 0{,}1$. Der Winkel $\alpha = 30°$.

Es ist die Laufzeit und der Weg bis zum Stillstand zu bestimmen.

Lösung: $$s = \frac{v_0^2}{2g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)} = 19{,}55 \text{ m};$$

$$T = \frac{v_0}{g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)} = 2{,}61 \text{ sec}.$$

683. Bei einer Schußfahrt läuft ein Schneeschuhläufer einen Bergabhang von 45° hinab, ohne von den Skistöcken Gebrauch zu machen. Der Reibungskoeffizient der Schneeschuhe auf dem Schnee beträgt $\mu = 0{,}1$. Der Luftwiderstand während der Fahrt beträgt $F = av^2$, wobei a eine Konstante und v die Geschwindigkeit des Schneeschuhläufers ist. Bei einer Geschwindigkeit von 1 m/sec beträgt der Luftwiderstand 0,0635 kg.

Welche Höchstgeschwindigkeit erreicht der Schneeschuhläufer, wenn er mit Schneeschuhen 90 kg wiegt?

Auf wieviel vergrößert sich die Höchstgeschwindigkeit, wenn der Schneeschuhläufer ein besseres Skiwachs verwendet und dadurch den Reibungskoeffizienten bis auf 0,05 vermindert?

Lösung: $v_{1\max} = 108$ km/h,
$v_{2\max} = 111$ km/h.

684. Der Wasserwiderstand eines Schiffes wächst mit dem Quadrat der Geschwindigkeit. Er beträgt bei $v = 1$ m/sec $\alpha = 0{,}12$ t. Die Druckkraft der Schrauben in Bewegungsrichtung verändert sich nach dem Gesetz $T = T_0\left(1 - \frac{v}{v_s}\right)$, wobei $T_0 = 120$ t die Druckkraft der Schraube für $v = 0$ darstellt.
$v_s =$ konst. $= 33$ m/sec. Man bestimme die Höchstgeschwindigkeit, die das Schiff entwickeln kann.

Lösung: $v_{max} = 20$ m/sec $= 72$ km/h.

685. Ein Flugzeug fliegt horizontal. Der Luftwiderstand ist proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit und beträgt bei einer Geschwindigkeit von 1 m/sec 0,05 kg. Die Zugkraft der Luftschraube ist konstant 3080 kg; sie bildet einen Winkel von 10° mit der Flugrichtung.

Man bestimme die Höchstgeschwindigkeit des Flugzeuges.

Lösung: $v_{\max} = 246$ m/sec.

686. Ein Eisenbahnwagen rollt mit gleichbleibender Geschwindigkeit über ein geradliniges Zuggleis, welches ein Gefälle von $\alpha = 10°$ hat.

Man nehme an, der Reibungswiderstand sei proportional dem Normaldruck, und bestimme die Beschleunigung des Wagens und dessen Geschwindigkeit 20 sec nach Beginn der Bewegung, wenn er ohne Anfangsgeschwindigkeit auf einem Gleis von $\beta = 15°$ Gefälle abwärts rollt.

Welche Strecke legt der Wagen in dieser Zeit zurück?

Lösung: $b = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha}\, g = 0{,}87$ m/sec²;

$$v = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha}\, gt = 1{,}74 \text{ m/sec};$$

$$s = \frac{g \sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha}\,\frac{t^2}{2} = 17{,}4 \text{ m}.$$

687. Ein Flugzeug landet mit Schneekufen auf einem horizontalen Felde. Der Flugzeugführer setzt das Flugzeug ohne senkrechte Geschwindigkeitskomponente im Landungsaugenblick auf (Landegeschwindigkeit 18,5 m/sec). Der Reibungskoeffizient zwischen den Kufen des Flugzeuges und dem Schnee beträgt $\mu = 0{,}08$. Der Luftwiderstand des Flugzeuges ist proportional dem Quadrat der Ge-

schwindigkeit. Bei einer Geschwindigkeit von 1 m/sec ist die horizontale Komponente der Luftkraft $k_x = 0{,}09$ kg. Die vertikale nach oben gerichtete Komponente beträgt $k_y = 0{,}7$ kg. Das Gewicht des Flugzeuges beträgt 2000 kg. Man bestimme die Länge des Weges und die benötigte Zeit bis zum Stillstand.

Lösung: $s = 216$ m; $T = 22{,}5$ sec.

688. Ein Flugzeug beginnt einen Sturzflug ohne vertikale Anfangsgeschwindigkeit. Die Widerstandskraft der Luft ist proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit.

Man finde die Geschwindigkeit v als Funktion der zurückgelegten Strecke und der Höchstgeschwindigkeit des Sturzfluges.

Lösung: $v = v_{\max} \sqrt{1 - e^{-2gs/v^2_{\max}}}$.

689. In welcher Zeit T erreicht ein Körper vom Gewicht p die Gipfelhöhe H, wenn er mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 vertikal nach oben geworfen wird? Der Luftwiderstand wird durch die Formel: $L = k^2 \cdot p \cdot v^2$ ausgedrückt, wobei v die Geschwindigkeit des Körpers ist.

Lösung: $H = \frac{\ln (v_0{}^2 k^2 + 1)}{2\,gk^2}$; $T = \frac{\operatorname{arctg} kv_0}{kg}$.

690. Ein 2 kg schwerer Körper, der mit der Geschwindigkeit $v_0 = 20$ m/sec vertikal nach oben geworfen wird, erfährt einen Luftwiderstand, der bei der Geschwindigkeit v m/sec die Größe $L = 0{,}04 \cdot v$ besitzt.

In wieviel Sekunden wird der Körper seine höchste Stellung erreichen?

Lösung: 1,7 sec.

691. Ein Unterseeboot bekommt einen geringen Abtrieb p und taucht in die Tiefe unter. Hierbei kann der Widerstand des Wassers $W = k \cdot S \cdot v$ als proportional zur Tauchgeschwindigkeit angenommen werden, wobei k der Proportionalitätsfaktor, S die Fläche der horizontalen Projektion des Bootes und v die Größe der Geschwindigkeit beim Untertauchen sind. Die Masse des Bootes beträgt M.

Man bestimme die Sinkgeschwindigkeit v, wenn für $t = 0$ $v = 0$ ist.

Lösung: $v = \frac{p}{kS}\left(1 - e^{-\frac{kSt}{M}}\right)$.

692. Man bestimme die Strecke z, die das untertauchende Boot in der Zeit T unter den in der vorigen Aufgabe gegebenen Bedingungen zurückgelegt hat.

Lösung: $z = \frac{p}{kS}\left[T - \frac{M}{kS}\left(1 - e^{-\frac{kST}{M}}\right)\right]$.

693. Bei geringen Geschwindigkeiten wird der Fahrwiderstand der Eisenbahn durch folgende empirische Formel bestimmt: $R = (2{,}5 + 0{,}05\,v) \cdot Q$ kg, wobei Q das Gewicht der Eisenbahn in Tonnen und v die Geschwindigkeit in m/sec darstellen.

Nach welcher Zeit und in welcher Entfernung erreicht eine Grubenbahn auf einer horizontalen Gleisstrecke die Geschwindigkeit $v = 12$ km/h, wenn das Gewicht der Bahn nebst elektrischer Lokomotive $Q = 40$ t und die Zugkraft der elektrischen Lokomotive $F = 200$ kg beträgt? Man bestimme weiterhin die Zugkraft N der elektrischen Lokomotive bei der anschließenden Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit.

Lösung: $t = 141$ sec; $s = 245$ m; $N = 106{,}6$ kg.

694. Ein Teilchen der Masse m, das die elektrische Ladung e trägt, befindet sich in einem homogenen elektrischen Feld $E = A \sin (kt)$ (A und k sind gegebene Konstante).

Man bestimme die Bewegung des Teilchens, wenn die Kraft $F = eE$ in Richtung des elektrischen Feldes auf das Teilchen einwirkt. Die Einwirkung der Schwerkraft ist zu vernachlässigen. Die ursprüngliche Stellung des Teilchens ist als Koordinatenursprung zu betrachten. Die Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens beträgt Null.

Lösung: $x = \frac{eA}{mk}\left(t - \frac{\sin kt}{k}\right)$.

695. Wie groß muß die konstante Zugkraft der Schraube T bei horizontalem Flug eines Flugzeuges sein, damit das Flugzeug während der Flugstrecke von s Metern seine Geschwindigkeit von v_0 m/sec auf v_1 m/sec vergrößern kann? Die Zugkraft der Schraube wirkt in der Geschwindigkeitsrichtung. Der Flugwiderstand, der entgegen der Geschwindigkeitsrichtung wirkt, ist proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit und beträgt bei einer Geschwindigkeit von 1 m/sec a kg. Das Gewicht des Flugzeuges ist P kg.

Lösung: $$T = \frac{a\left(v_0^2 - v_1^2 e^{\frac{2ags}{P}}\right)}{1 - e^{\frac{2ags}{P}}} \text{ kg.}$$

696. Ein Schiff mit 10000 t Wasserverdrängung bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 16 m/sec. Der Wasserwiderstand ist proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit des Schiffes und beträgt 30 t bei einer Geschwindigkeit von 1 m/sec.

Welche Entfernung legt das Schiff zurück, bis es eine Geschwindigkeit von 4 m/sec erreicht? In welcher Zeit legt das Schiff diese Entfernung zurück?

Lösung: $s = 47{,}1$ m; $T = 6{,}38$ sec.

697. Ein Körper fällt ohne Anfangsgeschwindigkeit. Der Luftwiderstand beträgt $R = k^2pv^2$, wobei v die Geschwindigkeit des Körpers und p das Gewicht des Körpers sind.

Welche Geschwindigkeit hat der Körper nach Ablauf der Zeit t seit Beginn der Bewegung? Wie groß ist der Höchstwert der Geschwindigkeit?

Lösung: $v = \frac{1}{k}\frac{e^{kgt} - e^{-kgt}}{e^{kgt} + e^{-kgt}}$; $v_{\max} = \frac{1}{k}$.

698. Ein Straßenbahnführer schaltet allmählich den Widerstand aus und vergrößert dadurch die Zugkraft des Wagenmotors proportional der Zeit von Null aus so, daß sie sich jede Sekunde um 120 kg vergrößert.

Man finde die Funktionen der Weg-Zeit-Kurve des Wagens. Das Gewicht des Wagens beträgt 10 t, der Fahrwiderstand ist konstant und beträgt 0,2 t; die Anfangsgeschwindigkeit ist gleich Null.

Lösung: Die Bewegung beginnt nach Ablauf von 5/3 sec nach Stromeinschaltung.

$$s = 0{,}01962 \left(t - \frac{5}{3}\right)^3 \text{ m}.$$

699. Man bestimme die Bewegung einer Massekugel längs eines gedachten geradlinigen Kanals, der durch den Mittelpunkt der Erde geht. Es ist bekannt, daß die Anziehungskraft innerhalb der Erdkugel proportional der Entfernung des sich bewegenden Punktes vom Erdmittelpunkt und auf diesen hin gerichtet ist. Die Kugel wird von der Erdoberfläche aus ohne Anfangsgeschwindigkeit in den Kanal gelassen.

Man bestimme die Geschwindigkeit der Kugel bei der Durchquerung des Erdmittelpunktes und die Bewegungszeit bis zu diesem Augenblick. Der Radius der Erde beträgt $R = 637 \cdot 10^6$ cm, die Erdbeschleunigung auf der Erdoberfläche wird mit $g_0 = 980$ cm/sek^2 angenommen.

Lösung: Die Entfernung der Kugel vom Erdmittelpunkt ändert sich nach dem

Gesetz $x = R \cos \sqrt{\frac{g_0}{R}}\, t$;

$$v = 7{,}9 \text{ km/sec}; \quad T = 21{,}1 \text{ min}.$$

700. Ein Körper fällt ohne Anfangsgeschwindigkeit aus einer Höhe h auf die Erde. Bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes wird angenommen, daß die Anziehungskraft der Erde umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung des Körpers vom Erdmittelpunkt ist.

Man finde die Zeit T, nach deren Ablauf der Körper die Erdoberfläche erreicht, sowie die Geschwindigkeit v, die er in dieser Zeit besitzt. Der Radius der Erde beträgt R, die Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche g.

Lösung: $v = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}$; $T = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R+h}{2g}}\left(\sqrt{Rh} + \frac{R+h}{2} \arccos \frac{R-h}{R+h}\right)$.

701. Ein Körper vom Gewicht $p = 10$ kg bewegt sich unter Einwirkung der veränderlichen Kraft $F = 10\,(1 - t)$ kg, t in Sekunden.

Nach wieviel Sekunden bleibt der Körper stehen, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 20$ cm/sec beträgt und die Kraft in Richtung der Geschwindigkeit des Körpers wirkt? Welche Strecke legt dabei der Körper zurück?

Lösung: $t = 2{,}02$ sec; $s = 692$ cm.

702. Ein materieller Punkt der Masse m führt unter Einwirkung der Kraft, die sich nach dem Gesetz: $F = F_0 \cos \omega t$ verändert, eine geradlinige Bewegung aus. F_0 und ω sind konstante Größen. Im Anfangsmoment hatte der Punkt die Geschwindigkeit $\dot{x}_0 = v_0$. Man stelle die Bewegungsgleichung auf.

Lösung: $x = \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos \omega t) + v_0 t$.

703. Bei der Bewegung eines Körpers von 9,8 kg Gewicht in einem inhomogenen Medium verändert sich der Bewegungswiderstand nach dem Gesetz $F = -\frac{2v^2}{3+s}$ kg, wobei v die Geschwindigkeit des Körpers in m/sec und s der zurückgelegte Weg in Metern ist.

Man bestimme den zurückgelegten Weg als Funktion der Zeit. Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt $v_0 = 5$ m/sec.

Lösung: $s = 3\,[\sqrt[3]{5t+1} - 1]$ m.

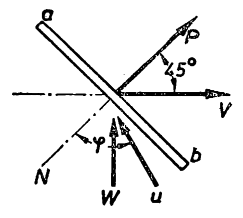
704. Ein Eisenbahnwagen vom Gewicht $Q = 9216$ kg wird durch Wind, der in Richtung des Gleises weht, in Bewegung gesetzt und rollt auf der horizontalen Gleisstrecke. Der Fahrwiderstand des Wagens beträgt $\frac{1}{200}$ seines Gewichtes. Die Winddruckkraft ist $P = kSu^2$ kg, wobei S die 6 m² große Fläche der Hinterwand des Wagens, u die Relativgeschwindigkeit des Windes in bezug auf den Wagen und $k = 0{,}12$ sind. Die absolute Geschwindigkeit des Windes beträgt $w = 12$ m/sec.

Man bestimme:

1) die Höchstgeschwindigkeit v_{max} des Wagens;
2) die Zeit T, die der Wagen brauchen würde, um diese Geschwindigkeit zu erreichen;
3) die Strecke x_1, die der Wagen zurücklegen muß, um die Geschwindigkeit 3 m/sec zu erreichen, wenn die Anfangsgeschwindigkeit des Wagens Null war.

Lösung: 1) $v_{max} = 4$ m/sec; 2) $T = \infty$; 3) $x_1 = 187$ m.

705. Ein Eissegler (einmastiges Lastschiff), der mit dem Fahrgast $Q = 196{,}2$ kg wiegt, wird durch den Winddruck geradlinig über eine glatte horizontale Eisfläche bewegt. Die Segelfläche (vgl. Abb.) bildet mit der Richtung der Bewegung einen Winkel von 45°. Die absolute Geschwindigkeit w des Windes steht senkrecht zur Richtung der Bewegung. Die Größe des Winddruckes P wird durch die NEWTONsche Formel $P = kSu^2 \cos^2\varphi$ ausgedrückt, wobei φ der Winkel ist, den die relative Geschwindigkeit des Windes u mit der Senkrechten N zur Segelfläche S bildet. $S = 5$ m², $k = 0{,}113$ ist ein Proportionalitätsfaktor. Der Druck P wirkt senkrecht zur Fläche ab.



Man finde unter Vernachlässigung der Reibung:

1) die Höchstgeschwindigkeit v_{max}, die der Eissegler erreichen kann;
2) welchen Winkel α bildet bei dieser Geschwindigkeit mit der Segelfläche ein Wimpel, der sich auf dem Mastbaum befindet?;
3) Welche Strecke x muß der Eissegler zurücklegen, um auf die Geschwindigkeit $v = \frac{2}{3}w$ zu kommen? Die Anfangsgeschwindigkeit ist gleich Null.

Lösung: 1) $v_{max} = w$; 2) $\alpha = 0°$; 3) $x_1 = 90$ m.

706. Ein Schiff mit $P = 1500$ t Wasserverdrängung überwindet den Wasserwiderstand $R = \alpha\, v^2$ t, wobei $\alpha = 0{,}12$ und v die Geschwindigkeit des Schiffes bedeuten. Die Druckkraft der Schrauben verändert sich nach dem Gesetz $T = T_0\left(1 - \frac{v}{v_s}\right)$, wobei die Druckkraft der Schrauben bei Stillstand des Schiffes $T_0 = 120$ t und $v_s = \text{konst.} = 33{,}3$ m/sec betragen.

Man finde die Abhängigkeit der Geschwindigkeit des Schiffes von der Zeit, wenn die Anfangsgeschwindigkeit v_0 beträgt.

Lösung: $v = \dfrac{70\, v_0 + 20\,(v_0 + 50)\,(e^{0{,}055\,t} - 1)}{70 + (v_0 + 50)\,(e^{0{,}055\,t} - 1)}$, v_0 in m/sec.

707. Man finde für die Aufgabe 706 die Abhängigkeit der zurückgelegten Strecke von der Geschwindigkeit.

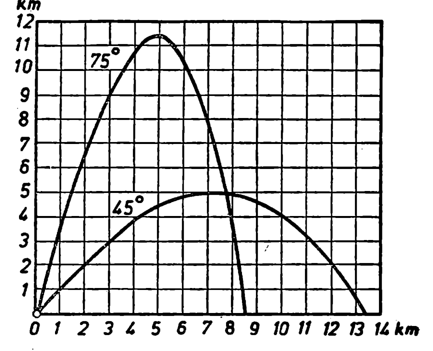
Lösung: $$x = 637{,}5 \ln \left(\frac{v_0^2 + 30\, v_0 - 1000}{v^2 + 30\, v - 1000}\right) + 273{,}9 \ln \frac{(v - 20)\,(v + 50)}{(v_0 - 20)\,(v_0 + 50)},$$ v und v_0 in m/sec.

708. Man finde für die Aufgabe 706 die Abhängigkeit der Strecke von der Zeit bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 10$ m/sec.

Lösung: $s = 20\,t - 1272 \ln \dfrac{6\, e^{0{,}055\,t}}{6\, e^{0{,}055\,t} + 1} - 199{,}3$ m.

b) Krummlinige Bewegung

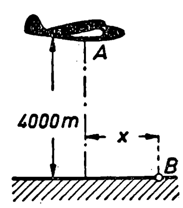
709. Ein Seegeschütz (105 mm, 35 Kaliber) feuert ein Geschoß von 18 kg Gewicht mit der Geschwindigkeit $v_0 = 700$ m/sec ab. Die wirkliche Bewegungsbahn des Geschosses in der Luft ist für 2 Fälle aus der Zeichnung zu sehen: 1) wenn der Winkel der Rohrachse mit dem Horizont 45° beträgt, 2) wenn der Winkel 75° beträgt.



Man bestimme für jeden Fall, um wieviel Kilometer sich die Schußhöhe und -weite vergrößern würden, wenn das Geschoß nicht unter Einwirkung des Luftwiderstandes steht.

Lösung: Vergrößerung der Schußhöhe 1) 7,5 km; 2) 12 km.
Vergrößerung der Schußweite 1) 36,6 km; 2) 16,7 km.

710. Das Flugzeug A fliegt mit der horizontalen Geschwindigkeit 500 km/h in einer Höhe von 4000 m über der Erde.

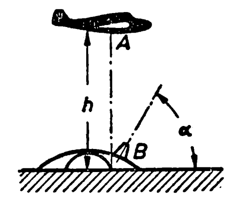


In welcher waagerechten Entfernung x vom gegebenen Punkt B aus muß eine Bombe ohne relative Anfangsgeschwindigkeit aus dem Flugzeug geworfen werden, damit sie auf diesen Punkt fällt? Vom Luftwiderstand ist abzusehen.

Lösung: $x = 3960$ m.

711. Das Flugzeug A fliegt mit der horizontalen Geschwindigkeit v_1 in der Höhe h. Mit dem Flakgeschütz B wird in dem Moment auf das Flugzeug geschossen, in dem sich das Flugzeug senkrecht über dem Geschütz befindet.

Man finde: 1) Welcher Bedingung muß die Anfangsgeschwindigkeit v_0 des Geschosses entsprechen, damit es das Flugzeug treffen kann? 2) Unter welchem Winkel zur Horizontalen muß der Schuß abgefeuert werden? Vom Luftwiderstand ist abzusehen.



Lösung: 1) $v_0^2 \geqq v_1^2 + 2gh$; 2) $\cos\alpha = \frac{v_1}{v_0}$.

712. Die größte horizontale Schußweite eines Geschützes beträgt L.
Man bestimme für diesen Fall die horizontale Schußweite l bei einem Schußwinkel $\alpha = 30°$ und die Höhe h der Bewegungsbahn. Vom Luftwiderstand ist abzusehen.

Lösung: $l = \frac{\sqrt{3}}{2} L$; $h = \frac{L}{8}$.

713. Bei einem Schußwinkel α hat das Geschoß die horizontale Schußweite l_α. Man bestimme die horizontale Schußweite bei einem Schußwinkel von $\frac{\alpha}{2}$. Vom Luftwiderstand ist abzusehen.

Lösung: $l_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{l_\alpha}{2\cos\alpha}$.

714. Man finde die Schußweite, wenn der Krümmungsradius der Bewegungsbahn in ihrem höchsten Punkte $\varrho_0 = 16$ km beträgt und der Neigungswinkel des Geschützrohres zur Horizontalen $\alpha = 30°$ beträgt. Vom Luftwiderstand ist abzusehen.

Lösung: $x_{\max} = 2\,\varrho_0 \operatorname{tg}\alpha = 18480$ m.

715. Man bestimme den Neigungswinkel des Rohres eines weittragenden Geschützes, wenn man das Ziel in einer Entfernung von 32 km erkannt hat und die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses $v_0 = 600$ m/sec beträgt. Vom Luftwiderstand ist abzusehen.

Lösung: $\alpha_1 = 30°\,18'$, $\alpha_2 = 59°\,42'$.

716. Man löse vorherige Aufgabe für den Fall, daß sich das Ziel 200 m über dem Niveau der Artilleriestellungen befindet.

Lösung: $\alpha_1 = 30°\,45'$, $\alpha_2 = 59°\,23'$.

717. Aus einem Geschütz, das sich im Punkt O befindet, wird ein Schuß unter dem Winkel α zur Horizontalen mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 abgeschossen. Gleichzeitig wird ein Schuß von dem Punkt A, der sich auf der Horizontalen in der Entfernung l vom Punkt O befindet, senkrecht nach oben abgefeuert. Man bestimme, mit welcher Anfangsgeschwindigkeit v_1 das zweite Geschoß abgefeuert werden muß, damit es mit dem ersten zusammenstößt. Vom Luftwiderstand ist abzusehen.

Lösung: $v_1 = v_0 \sin\alpha$, unabhängig von der Entfernung l.

718. Man finde den geometrischen Ort aller materiellen Punkte im Moment t, die gleichzeitig in einer Ebene von einem Punkt mit der gleichen Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter verschiedenen Winkeln zur Horizontalen abgeworfen werden.

Lösung: Kreis vom Radius $v_0 t$; der Kreismittelpunkt liegt auf der Vertikalen des Wurfpunktes um $\frac{1}{2} g t^2$ tiefer als dieser Punkt.

719. Man finde den geometrischen Ort der Brennpunkte sämtlicher parabolischer Bewegungsbahnen, die derselben Anfangsgeschwindigkeit v_0 und verschiedenen Wurfwinkeln entsprechen.

Lösung: $x^2 + y^2 = \frac{v_0^4}{4 g^2}$.

720. Ein Körper vom Gewicht P, der mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter dem Winkel α zur Horizontalen abgeworfen wird, bewegt sich unter dem Einfluß der Schwerkraft und des Luftwiderstandes R.

Man bestimme die größte Höhe h des Körpers über der horizontalen Ebene der Anfangsstellung. Der Widerstand stellt eine lineare Funktion der Geschwindigkeit dar: $R = kPv$.

Lösung: $h = \frac{v_0 \sin\alpha}{gk} - \frac{1}{gk^2} \ln\,(1 + k v_0 \sin\alpha)$.

721. Man finde unter den Bedingungen der vorherigen Aufgabe die Bewegungsgleichungen des Körpers.

Lösung: $x = \frac{v_0 \cos\alpha}{kg}\,(1 - e^{-kgt}), \quad y = \frac{1}{kg}\left(v_0 \sin\alpha + \frac{1}{k}\right) \cdot (1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k}$.

722. Man bestimme unter den Voraussetzungen der Aufgabe 720, in welchem Abstand s der Punkt auf der Horizontalen seine höchste Lage erreicht.

Lösung: $s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g\,(k v_0 \sin\alpha + 1)}$.

723. Aus einem Rohr in der Mitte eines runden Wasserbeckens strömen Wasserstrahlen unter verschiedenen Winkeln φ zur Horizontalen. Die Anfangsgeschwindigkeit eines Wasserstrahls beträgt $v_0 = \sqrt{\frac{4g}{3\cos\varphi}}$ m/sec; g ist die Erdbeschleunigung. Die Höhe der Rohrmündung beträgt 1 m.

Man bestimme, unabhängig von der Höhe des Beckenrandes, den kleinsten Radius R des Beckens, bei dem das ganze Wasser, das aus dem Rohr fließt, vom Becken aufgefangen wird.

Lösung: $R = 2{,}83$ m.

724. Man bestimme die Bewegung des schweren materiellen Punktes der Masse m. Der Massenpunkt wird durch eine Kraft angezogen, deren Größe proportional der Entfernung vom Koordinatenursprung O ist. Außerdem wirkt die Erdbeschleunigung g. Die Bewegung wird im luftleeren Raum ausgeführt; die Anziehungskraft pro Längeneinheit beträgt k^2m. Für den Bewegungsbeginn gilt $t = 0$; $x = a$, $\dot{x} = 0$, $y = 0$, $\dot{y} = 0$, wobei die Achse Oy vertikal nach abwärts gerichtet ist.

Lösung: Die harmonische schwingende Bewegung

$$x = a \cos kt; \; y = \frac{g}{k^2}\,(1 - \cos kt)$$

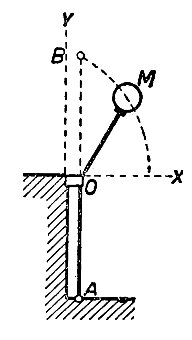
wird auf der Geraden $y = \frac{g}{k^2} - \frac{g}{k^2 a}\,x$, $x \leqq a$ ausgeführt.

725. Ein Punkt mit der Masse m bewegt sich unter Wirkung einer Abstoßungskraft, die sich nach dem Gesetz $F = mk^2r$ verändert, vom festen Koordinatenursprung O weg, wobei r der Abstand des Punktes vom Koordinatenursprung ist.

Im Anfangsmoment befindet sich der Punkt in M_0 (a, O) und hat die Geschwindigkeit v_0, die parallel zur y-Achse gerichtet ist. Man bestimme die Bewegungsbahn des Punktes.

Lösung: Hyperbel: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{ky}{v_0}\right)^2 = 1$.

726. Ein elastischer Faden ist im Punkt A befestigt und geht durch einen beweglichen glatten Ring O. An seinem freien Ende hängt eine kleine Kugel M mit der Masse m. Die Länge des ungedehnten Fadens beträgt $l = AO$; seine Federkonstante ist k^2m. Die Masse bewegt sich in der Ebene Oxy und hat im Punkt B die senkrecht zur Achse AB gerichtete Geschwindigkeit v_0; die Fadenlänge hat sich dabei auf das Doppelte vergrößert.



Man bestimme die Bewegungsbahn der Kugel, wobei die Wirkung der Schwerkraft vernachlässigt werden kann und die Fadenkraft als proportional zu seiner Verlängerung angesehen wird.

Lösung: Ellipse $\frac{v_0^2\,x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1$.

727. Der Punkt M mit der Masse m wird von den feststehenden Zentren $C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_n$ durch Kräfte angezogen, die proportional den Abständen sind. Die Anziehungskraft des Zentrums C_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ beträgt $k_i m MC_i$, wobei MC_i der Abstand des Punktes M vom Punkt C_i bedeutet. Der Punkt M und die anziehenden Zentren liegen in der Ebene Oxy.

Man bestimme die Bahn des Punktes M für folgende Randbedingungen: $t = 0$: $x = x_0$, $y = y_0$, $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = v_0$. Die Wirkung der Schwerkraft wird vernachlässigt.

Lösung: Ellipse: $$\left(\frac{x - a}{x_0 - a}\right)^2 + \left[(y - b) + \frac{x - a}{x_0 - a}\,(b - y_0)\right]^2 \frac{k}{v_0^2} = 1,$$

$$\text{wobei } a = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{i=n} k_i x_i; \; b = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{i=n} k_i y_i; \; k = \sum_{i=1}^{i=n} k_i.$$

728. Ein Punkt M wird durch die Kräfte $kmMC_1$ und $kmMC_2$, die den Abständen MC_1 und MC_2 proportional sind, von den beiden Punkten C_1 und C_2 angezogen. Der Punkt C_1 ist unbeweglich und befindet sich im Koordinatenursprung. Der Punkt C_2 bewegt sich gleichförmig auf der Achse Ox, so daß $x_2 = 2\,(a + bt)$ beträgt.

Man finde die Bewegungsbahn des Punktes M bei der Annahme, daß dieser sich im Moment $t = 0$ in der Ebene Oxy befindet und seine Koordinaten $x = y = a$ betragen. Seine Geschwindigkeit hat dabei die Komponenten $\dot{x} = \dot{z} = b$, $\dot{y} = 0$.

Lösung: Die Bewegungsbahn ist eine Schraubenlinie. Sie verläuft auf einem elliptischen Zylinder, dessen Achse Ox ist. Die Ellipse hat die Gleichung $\frac{y^2}{a^2} + \frac{2\,kz^2}{b^2} = 1$; die Steigung der Schraube beträgt $\pi \cdot b \cdot \sqrt{\frac{2}{k}}$.

729. Ablenkung von Kathodenstrahlen im elektrischen Feld. Ein Teilchen der Masse m, das die negative Ladung e trägt, kommt mit einer Geschwindigkeit v_0 in ein homogenes elektrisches Feld der Feldstärke E. Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 steht senkrecht zur Richtung der Feldsstärke.

Man bestimme die Bewegungsbahn des Teilchens. Es ist bekannt, daß im elektrischen Feld die Kraft $F = eE$ in Richtung der Feldstärke auf das Teilchen einwirkt. Die Wirkung der Schwerkraft wird vernachlässigt.

Lösung: $y = \frac{e \cdot E}{m{v_0}^2 \cdot 2} \cdot x^2$.

730. Ablenkung von Kathodenstrahlen im Magnetfeld. Ein Teilchen der Masse m, das die negative Ladung e trägt, kommt mit einer Geschwindigkeit v_0 in ein homogenes magnetisches Feld der Induktivität H. Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 steht senkrecht zur Feldrichtung.

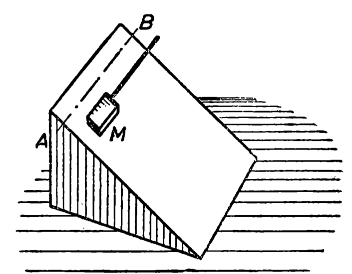
Man bestimme die Bewegungsbahn des Teilchens. Es ist bekannt, daß die Kraft: $\mathfrak{F} = - e\, [\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}]$ auf das Teilchen einwirkt. Bei der Lösung können zur Vereinfachung die Bewegungsgleichungen auf die Koordinaten bezogen werden.

Lösung: Ein Kreis vom Halbmesser $\frac{mv_0}{eH}$.

731. Man bestimme die Bewegungsbahn eines Teilchens der Masse m, das die elektrische Ladung e trägt, wenn es in ein homogenes elektrisches Feld der Stärke $E = A \cdot \cos\,(kt)$ mit der Geschwindigkeit v_0, die senkrecht zur Richtung der Feldstärke steht, eintritt. Der Einfluß der Schwerkraft wird vernachlässigt. Im elektrischen Feld wirkt die Kraft $F = - eE$ auf den Massenpunkt.

Lösung: $y = \frac{eA}{mk^2}\,(1 - \cos \frac{k\,x}{v_0})$, worin die y-Achse die Richtung der Feldstärke hat und der Koordinatenursprung mit der anfänglichen Lage des Punktes im Felde übereinstimmt.

732. Ein schwerer Körper M bewegt sich auf einer rauhen geneigten Fläche. Er wird ständig durch einen Faden in horizontaler Richtung parallel zur Geraden AB weggezogen. Von einem gewissen Zeitpunkt ab wird die Bewegung des Körpers geradlinig und gleichförmig, wobei die parallel zu AB gerichtete Geschwindigkeitskomponente 12 cm/sec beträgt. Man bestimme die zweite Komponente v_1 der Geschwindigkeit sowie die Fadenkraft T für folgende Werte: Neigung der Fläche $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{30}$, Reibungskoeffizient $\mu = 0{,}1$, Gewicht des Körpers 300 g.



Lösung: $v_1 = 4{,}24$ cm/sec; $T = 28{,}3$ g.

28. Impuls- und Flächensatz des Massenpunktes

733. Ein Eisenbahnzug bewegt sich auf einer horizontalen, geradlinigen Gleisstrecke. Beim Bremsen wirkt eine konstante Widerstandskraft, die gleich 0,1 des Zuggewichtes ist. Bei Beginn des Abbremsens beträgt die Geschwindigkeit des Zuges 72 km/h.

Man berechne Bremszeit und Bremsweg.

Lösung: 20,4 sec; 204 m.

734. Ein schwerer Körper gleitet auf einer rauhen geneigten Fläche ohne Anfangsgeschwindigkeit abwärts. Die Fläche bildet mit der Horizontalen den Winkel $\alpha = 30°$.

Man bestimme, in welcher Zeit T der Körper einen Weg von der Länge 39,2 m zurücklegt, wenn der Reibungskoeffizient $\mu = 0{,}2$ beträgt.

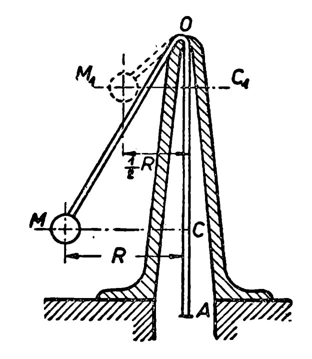
Lösung: 4,94 sec.

735. Ein 400 t schwerer Zug befährt mit der Geschwindigkeit 54 km/h eine Steigung $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}006$ (α: Steigungswinkel). Der Reibungskoeffizient (Koeffizient des Fahrwiderstandes) beträgt 0,005. 50 Sekunden nach Befahren der Steigung hat sich die Geschwindigkeit auf 45 km/h verlangsamt.

Man stelle die Zugkraft der Lokomotive fest.

Lösung: 2,36 t.

736. Ein kleines Gewicht M ist am Ende eines undehnbaren Fadens MOA angebunden, der teilweise durch ein vertikales Röhrchen geführt wurde. Das Gewicht bewegt sich um die Achse des Röhrchens auf einem Kreise mit dem Halbmesser $MC = R$ mit 120 U/min. Nach langsamem Einziehen des Fadens CA durch das Röhrchen beschreibt das Gewicht einen Kreis mit dem Halbmesser $\frac{1}{2} R$.



Wieviel Umdrehungen in der Minute macht das Gewicht auf diesem Kreisumfang?

Lösung: 480 U/min.

737. Zur Feststellung des Gewichtes eines beladenen Eisenbahnzuges wurde zwischen der Lokomotive und den Wagen ein Dynamometer angebracht. Nach zwei Minuten zeigte das Dynamometer den Durchschnittswert 100,8 t an. Der Zug hatte inzwischen die Geschwindigkeit $v = 57{,}6$ km/h erreicht (zu Beginn stand der Zug). Der Reibungskoeffizient ist $\mu = 0{,}02$.

Man bestimme das Gewicht des Zuges.

Lösung: 3000 t.

738. Wie groß muß der Reibungskoeffizient μ zwischen den Rädern eines gebremsten Autos und dem Boden sein, wenn das Auto bei einer Fahrgeschwindigkeit von $v = 72$ km/h 6 Sekunden nach Beginn des Abbremsens stehen bleibt?

Lösung: $\mu \geqq 0{,}34$.

739. Eine Kugel vom Gewicht $Q = 20$ g verläßt den Gewehrlauf mit der Geschwindigkeit $v = 650$ m/sec. Sie bewegt sich im Lauf während des Zeitraumes $t = 0{,}00095$ sec.

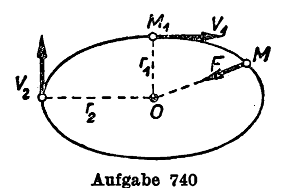
Man bestimme den mittleren Gasdruck, der die Kugel antreibt, wenn der Querschnitt des Laufes 150 mm² beträgt.

Lösung: Der durchschnittliche Druck ist 931 kg/cm².

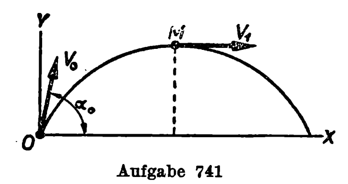
740. Die Punktmasse M bewegt sich um ein festes Zentrum unter dem Einfluß der Anziehungskraft dieses Zentrums.

Man finde die Geschwindigkeit v_2 in dem Punkt der Bahn, der am weitesten vom Zentrum entfernt ist. Die Geschwindigkeit der Punktmasse ist im Augenblick der kürzesten Entfernung vom Zentrum $v_1 = 30$ cm/sec, r_2 ist fünfmal so groß wie r_1.

Lösung: $v_2 = 6$ cm/sec.



Aufgabe 740



Aufgabe 741

741. Man finde den Gesamtimpuls aller Kräfte, die auf ein Geschoß während des Zeitraumes einwirken, in dem das Geschoß von seiner anfänglichen Lage O die höchste Lage M erreicht.

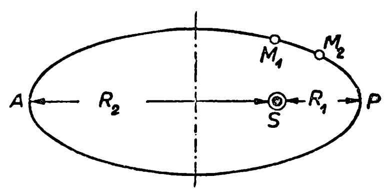
Gegeben ist: $v_0 = 500$ m/sec, $\alpha_0 = 60°$, $v_1 = 200$ m/sec, Gewicht: 100 kg.

Lösung: Die Komponenten des Gesamtimpulses sind:

$$S_x = -510 \text{ kg sec}; \quad S_y = -4410 \text{ kg sec}.$$

742. Zwei Meteorite M_1 und M_2 beschreiben dieselbe Ellipse, in deren Brennpunkt S sich die Sonne befindet. Die Entfernung zwischen ihnen ist so klein, daß man den Bogen der Ellipse M_1M_2 als Sehne berechnen kann. Es ist bekannt, daß die Entfernung zwischen M_1M_2 gleich a war, als sich ihre Mitte im Perihel P (Sonnennähe) befand. Wir nehmen an, daß sich die Meteoriten mit gleichen Sektorgeschwindigkeiten bewegen.

Man bestimme die Entfernung zwischen M_1 und M_2, wenn ihre Mitte das Aphel A durchläuft und bekannt ist, daß $SP = R_1$ und $SA = R_2$ sind.



Lösung: $M_1M_2 = \frac{R_1}{R_2} a$.

743. Ein Knabe, der 40 kg schwer ist, steht auf den Schlittenkufen eines Lastschlittens, dessen Gewicht 40 kg beträgt, und führt jede Sekunde einen Stoß mit dem Impuls 2 kg sec aus.

Man finde die Geschwindigkeit, die der Schlitten in 15 Sekunden annimmt, wenn der Widerstandskoeffizient $\mu = 0{,}01$ ist.

Lösung: 2,2 m/sec.

744. Ein Punkt führt eine gleichförmige Bewegung über einen Kreisumfang mit der Geschwindigkeit $v = 20$ cm/sec aus. Er vollzieht eine volle Umdrehung im Zeitraum $T = 4$ sec.

Man finde den Impuls S der Kräfte, die auf den Punkt im Zeitraum einer halben Periode einwirken, wenn die Masse des Punktes $m = 5$ g ist. Man bestimme den durchschnittlichen Wert der Kraft F.

Lösung: $S = 200$ dyn sec, $F = 100$ dyn in Richtung der Endgeschwindigkeit.

745. Zwei mathematische Pendel, die an Fäden der Länge l_1 und l_2 ($l_1 > l_2$) aufgehängt sind, führen Schwingungen gleicher Amplitude aus. Beide Pendel begannen gleichzeitig sich aus ihren äußersten geneigten Stellungen nach der gleichen Richtung zu bewegen.

Man bestimme die Bedingung, der die Längen l_1 und l_2 entsprechen müssen, damit die Pendel nach Ablauf einer gewissen Zeit wieder synchron schwingen. Man bestimme den kleinsten Zeitraum T.

Lösung: $\sqrt{l_1/l_2} = k/n$, worin k, n ganze Zahlen sind und der Bruch $\frac{k}{n}$ nicht gekürzt werden kann, $T = kT_2 = nT_1$.

746. Eine kleine Kugel vom Gewicht p g, die an einem undehnbaren Faden angebunden ist, gleitet über eine glatte horizontale Fläche, während das andere Ende des Fadens mit konstanter Geschwindigkeit a in eine Öffnung gezogen wird, die sich in der Fläche befindet.

Man bestimme die Bewegung der Kugel und die Spannkraft des Fadens T. Es ist bekannt, daß im Anfang der Faden eine Gerade bildete, die Entfernung zwischen Kugel und Öffnung gleich R und die Komponente der Anfangsgeschwindigkeit der Kugel senkrecht zur Richtung des Fadens v_0 war.

Lösung: In Polarkoordinaten, wenn die Öffnung als Koordinatenursprung dient und der Winkel $\varphi = 0$ ist, gilt:

$$r = R - at; \; \varphi = \frac{v_0 t}{R - at}; \; T = \frac{m v_0^2 R^2}{r^3}.$$

747. Man bestimme die Masse M der Sonne mit folgenden Werten: Der Radius der Erde ist $R = 637 \cdot 10^6$ cm, ihre durchschnittliche Dichte 5,5 g/cm³. Die große Halbachse des Erdkreislaufes a ist gleich $149 \cdot 10^{11}$ cm, die Umlaufzeit der Erde um die Sonne beträgt $T = 365{,}25$ Tage. Die Anziehungskraft zwischen zwei Massen von je 1 g im Abstand von 1 cm beträgt $\frac{gR^2}{m}$, worin m die Masse der Erde ist (Gravitationskonstante). Aus dem Gesetz von KEPLER entnehmen wir die Anziehungskraft, die die Sonne auf die Erde ausübt: $k = \frac{4\pi^2 a^3 m}{T^2 r^2}$, worin r der Abstand der Erde von der Sonne ist (Physikalisches Maßsystem).

Lösung: $M = 197 \cdot 10^{31}$ g.

748. Ein Punkt der Masse m, der unter der Einwirkung der Zentralkraft F steht, beschreibt eine Schleifenlinie: $r^2 = a \cos 2\varphi$, worin a eine konstante Größe und r die Entfernung des Punktes vom Zentrum ist. Im Anfang $r = r_0$ ist die Geschwindigkeit des Punktes gleich v_0 und bildet den Winkel α mit der Geraden, die den Punkt mit dem Zentrum verbindet.

Man bestimme die Größe der Kraft F, wenn bekannt ist, daß sie nur vom Abstand r abhängt.

Nach der BIENETschen Gleichung ist

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right),$$

worin c die doppelte Sektorgeschwindigkeit des Punktes ist.

Lösung: Die Anziehungskraft ist $F = \frac{3 m a^2}{r^7} r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha$.

749. Der Punkt M der Masse m bewegt sich in der Nähe des festen Zentrums O unter dem Einfluß einer Kraft F, die von diesem Zentrum ausgeht und nur von dem Abstand $MO = r$ abhängt.

Man finde die Größe der Kraft F und die Bahn des Punktes. Es ist bekannt, daß die Geschwindigkeit des Punktes $v = \frac{a}{r}$ ist, worin a eine Konstante darstellt.

Lösung: Die Anziehungskraft ist $F = \frac{m a^2}{r^3}$. Die Bahn ist eine logarithmische Spirale.

750. Man bestimme die Bewegung des Punktes der Masse 1 g unter der Einwirkung einer zentralen Anziehungskraft, die umgekehrt proportional dem Kubus der Entfernung des Punktes vom Zentrum der Kraft ist, bei folgenden Werten: Bei dem Abstand 1 cm ist die Kraft gleich 1 dyn. Im Anfang beträgt der Abstand des Punktes vom Zentrum $r_0 = 2$ cm. Die Geschwindigkeit beträgt $v_0 = 0{,}5$ cm/sec und bildet den Winkel 45° mit der Richtung der Geraden, die vom Zentrum zum Punkte verläuft.

Lösung: $r = 2e^{\varphi}$; $r^2 = 4 + t\sqrt{2}$.

751. Ein Punkt der Masse m bewegt sich auf einer Bahn unter dem Einfluß einer Zentralkraft, deren Gleichung in Polarkoordinaten folgende Form hat: $r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$; p und e sind Konstante. Das Anziehungszentrum liegt im Pol des Koordinatensystems.

Man bestimme die Kraft, unter deren Einfluß sich der Punkt bewegt.

Lösung: $F_r = -m\frac{h^2}{p \cdot r^2}$, $F_\varphi = 0$, $h = r^2\frac{d\varphi}{dt} = \text{konst.}$

752. Ein Punkt der Masse m bewegt sich unter Wirkung einer Zentralkraft, die umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung des Punktes vom Zentrum ist.

Man bestimme die Bahn des Punktes, wenn er sich im Anfang in der Entfernung R vom Zentrum befand.

Lösung: Die Bahn des Punktes kann je nach der Größe der Anfangsgeschwindigkeit des Punktes eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel sein. Die Bahn ist eine Ellipse, wenn $v_0 < \sqrt{\frac{2\gamma}{R}}$; eine Parabel, wenn $v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma}{R}}$; eine Hyperbel, wenn $v_0 > \sqrt{\frac{2\gamma}{R}}$ ist. Dabei ist $\sqrt{\frac{2\gamma}{R}}$ die Geschwindigkeit, die der Punkt annehmen würde, wenn er ohne Anfangsgeschwindigkeit aus dem Unendlichen bis zu der Stelle fallen würde, die sich in der Entfernung R vom Zentrum befindet. Die Gleichung der Bahn ist in Polarkoordinaten:

$$r = \frac{h^2}{\gamma}\,\frac{1}{[1 + e\cos(\varphi - \alpha)]},\ \text{mit } h = r^2\frac{d\varphi}{dt} = \text{konst.};$$

$$e^2 = \frac{h^4}{R^2\gamma^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\varepsilon} - \frac{2h^2}{\gamma R} + 1;\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{h^2}{R\gamma}\cdot\operatorname{ctg}\varepsilon}{1 - h^2/R\gamma},$$

wobei ε der Winkel zwischen Geschwindigkeitsvektor und Ortsvektor ist.

753. Das Teilchen M der Masse 1 g wird zum festen Zentrum O durch eine Kraft angezogen, die der fünften Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist. Diese Kraft ist bei einem Abstand von 1 cm gleich 8 dyn. Im Anfang befindet sich das Teilchen in der Entfernung $OM_0 = 2$ cm. Es hat eine Geschwindigkeit, die senkrecht zu OM_0 gerichtet ist, vom Betrage $v_0 = 0{,}5$ cm/sec.

Man bestimme die Bahn des Teilchens.

Lösung: Kreis mit dem Radius 1 cm.

754. Ein Punkt der Masse 20 g, der sich unter Einfluß einer Anziehungskraft dem unbeweglichen Mittelpunkt nähern will, beschreibt nach dem Gesetz von NEWTON in der Zeit von 50 sec eine vollständige Ellipse mit den Halbachsen 10 cm und 8 cm.

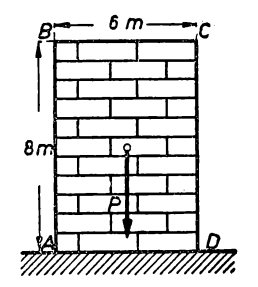
Man bestimme Größt- und Kleinstwert der Anziehungskraft F bei dieser Bewegung.

Lösung: $F_{max} = 19{,}7$ dyn, $F_{min} = 1{,}2$ dyn.

29. Arbeit und Leistung

755. Ein homogenes Rechtkant $ABCD$, dessen Ausmaße in der Zeichnung angegeben sind, wiegt $Q = 4000$ kg.

Man bestimme die Arbeit, die man anwenden muß, um das Rechtkant um die Kante D zu kippen.



Lösung: 4000 mkg.

756. Man bestimme die Arbeitskraft, die man aufwenden muß, um ein Gewicht von 2 t um 5 m hochzuheben. Man bewege es auf einer unter 30° geneigten Fläche. Der Reibungskoeffizient beträgt 0,5.

Lösung: 18660 mkg.

757. Zur Hebung der Wassermenge von 5000 m³ um 3 m ist eine Pumpe mit einem 2 PS Motor aufgestellt.

Wieviel Zeit wird für die Ausführung dieser Arbeit benötigt, wenn der Wirkungsgrad der Pumpe 0,8 ist?

Als mechanischen Wirkungsgrad bezeichnet man das Verhältnis der Nutzarbeit, in diesem Falle der Arbeit, die für die Hebung des Wassers angewandt wird, zur erforderlichen Arbeit, die infolge störender Widerstände größer als die Nutzarbeit ist.

Lösung: 34,722 Std.

758. Wie groß ist die Leistung einer Maschine in PS und Kilowatt (kW), die in der Minute einen Hammer mit dem Gewicht von 200 kg 84mal um 0,75 m hochhebt? Der Wirkungsgrad der Maschine beträgt 0,7.

Lösung: 4 PS = 2,94 kW.

759. Man berechne in PS und in Megawatt die Gesamtleistung von drei Wasserfällen, die nacheinander in einem Flußlauf vorkommen. Die Höhe der Wasserfälle beträgt beim ersten Wasserfall 12 m, beim zweiten 12,8 m, beim dritten 15 m. Die Durchflußmenge des Wassers beträgt 75,4 m³/sec.

Lösung: 40000 PS = 29,4 Megawatt.

760. Man berechne die Leistung eines Turbinengenerators in der Station eines Straßenbahnnetzes. Die Anzahl der Straßenbahnwagen des Netzes beträgt 45, das Gewicht jedes Wagens 10 t, der Widerstand durch Reibung gleich 0,02 des Wagengewichtes und die durchschnittliche Geschwindigkeit der Wagen 12 km/h. Die Verluste in der Leitung betragen 5 %. Es wurde angenommen, daß der Anfahrstrom aus der Rückgewinnung des Bremsstroms gedeckt werden kann.

Lösung: 420 PS = 309 kW.

761. Das Löschen der Kohle auf einem Frachtkahn erfolgt mit Hilfe eines Motors, der den Födereimer hebt. Der Eimer nimmt 1 t auf und wiegt selbst 200 kg. In einer Arbeitszeit von 12 Stunden müssen 600 t Kohle gelöscht werden, wobei der Eimer bis zur Höhe von 10 m gehoben wird.

Man bestimme die theoretische Leistung des Motors.

Lösung: 2,22 PS = 1,63 kW.

762. Man berechne die Arbeit, die beim Heben eines Gewichtes von 20 kg aufgewendet wird. Das Gewicht wird auf einer geneigten Fläche eine Strecke von 6 m bewegt. Der Winkel, den die Fläche mit der Horizontalen bildet, beträgt 30°, der Reibungskoeffizient ist 0,01.

Lösung: 61,04 mkg.

763. Wenn ein Schiff die Fahrtgeschwindigkeit von 15 Knoten hat, entwickelt die Maschine 5133 PS Leistung.

Man bestimme den Strömungswiderstand des Wassers bei dieser Geschwindigkeit des Schiffes, wenn man weiß, daß der Wirkungsgrad der Maschine gleich 0,4 und 1 Knoten = 0,5144 m/sec sind.

Lösung: 20 t.

764. Man berechne in PS und kW die Leistung einer Dampfmaschine, wenn der durchschnittliche Druck des Kolbens während eines ganzen Arbeitsganges 5 kg/cm² beträgt. Der Weg des Kolbens beträgt 40 cm, seine Fläche 300 cm², die Zahl der Arbeitsgänge 120 in der Minute und der Wirkungsgrad 0,9.

Lösung: 14,4 PS = 10,6 kW.

765. Ein Schleifstein mit 60 cm Durchmesser macht 120 Umdrehungen in der Minute. Die verbrauchte Leistung beträgt 1,6 PS. Der Reibungskoeffizient des Schleifsteins bei der Berührung mit dem Werkstück beträgt 0,2.

Mit welcher Kraft drückt der Stein auf das Werkstück?

Lösung: 159 kg.

766. Man bestimme die Leistung des Motors einer Planhobelmaschine, wenn die Länge des Arbeitshubes 2 m, seine Dauer 10 sec, die Schnittkraft 1200 kg und der Wirkungsgrad der Hobelmaschine 0,8 betragen. Die Bewegung sei gleichförmig.

Lösung: 4 PS.

767. Im 18. Jahrhundert benutzte man für das Auspumpen von Wasser aus den Kohlenschächten den Pferdeantrieb, den man „Göpel" nannte. Der mittlere Durchmesser des Göpels ist $d = 8$ m. Seine Welle macht $n = 6$ U/min. Man bestimme die durchschnittliche Zugkraft des Pferdes, das den Göpel bewegt, wenn man die Leistung mit 1 PS ansetzt.

Lösung: 29,9 kg.

768. An das Ende einer elastischen Feder (Federkonstante c) wird ein Gewicht Q angehängt, wodurch die Feder angespannt wird. Man suche den Ausdruck für die vollständige mechanische Energie des Systems.

Lösung: $\frac{Q}{2g} \dot{x}^2 + \frac{c}{2} x^2 - Qx = \text{konst.}$

wobei x vom Ende der nichtgespannten Feder nach unten gerechnet wird.

769. Beim Skilauf über eine Entfernung von 20 km auf horizontalem Wege vollführte der Schwerpunkt des Läufers harmonische Schwingungen mit der Amplitude 8 cm und der Periode $T = 4$ sec. Das Gewicht des Läufers ist 80 kg und der Reibungskoeffizient zwischen Skier und Schnee $\mu = 0{,}05$. Man bestimme die Arbeit des Läufers während des Marsches, wenn er die ganze Strecke in 1 Std. 30 Min. zurückgelegt hat. Ferner bestimme man die Durchschnittsleistung des Skiläufers.

Bemerkung: Man nehme an, daß die Arbeit durch Abbremsen beim Senken des Schwerpunktes des Läufers 0,4 der Arbeit ausmacht, die beim Heben des Schwerpunktes bis zur gleichen Höhe aufgewendet wird.

Lösung: 104 600 mkg, 0,258 PS.

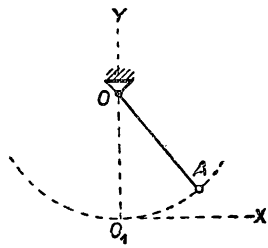
770. Ein mathematisches Pendel A vom Gewicht P und der Länge l erreicht unter dem Einfluß einer horizontal gerichteten Kraft $\frac{Px}{l}$ die Höhe y.

Man berechne die potentielle Energie des Pendels auf zweierlei Art:

1) als Arbeit der Schwerkraft;

2) als Arbeit, die von der Kraft $\frac{Px}{l}$ geleistet wird.

Man ermittle, unter welchen Bedingungen beide Berechnungsarten zu gleichen Ergebnissen führen.



Lösung: 1) Py 2) $Px^2/2l$.

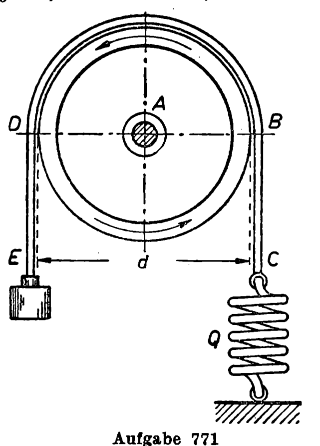
Beide Lösungen stimmen überein, wenn man y^2 vernachlässigt.

771. Zwecks Bestimmung der Leistung eines Motors wird auf seine Riemenscheibe A ein Band mit hölzernen Klötzchen gelegt. Die rechte Hälfte des Bandes (BC) wird durch eine Federwaage festgehalten (Q). Die linke Bandhälfte (DE) ist mit einem Gewicht (P) belastet.

Man bestimme die Leistung des Motors. Dieser hat beim gleichmäßigen Antrieb der Riemenscheibe 120 U/min, die Federwaage der rechten Bandhälfte zeigt 4 kg an. Das Gewicht P ist gleich 1 kg. Der Durchmesser der Riemenscheibe $d = 63{,}6$ cm.

Der Unterschied der Anspannungen der Bandhälften BC und DE ist gleich der Kraft, die die Riemenscheibe abbremst. Diese Arbeit berechne man für 1 sec.

Lösung: 0,16 PS = 117,8 Watt.



Aufgabe 771

T
100 cm
A
t

Aufgabe 772

772. Mittels eines Riemens wird die Leistung 20 PS übertragen. Der Halbmesser der Riemenscheibe ist 50 cm und die Drehzahl der Scheibe 150 U/min.

Man bestimme die Spannkräfte T und t, wobei angenommen wird, daß die Spannkraft T des ziehenden Riemenbandes doppelt so groß ist wie die Spannkraft t des gezogenen Bandes.

Lösung: $T = 382$ kg, $t = 191$ kg.

30. Energiesatz des Massenpunktes

773. Auf einer geneigten Fläche, die mit der Horizontalen den Winkel 30° bildet, gleitet ohne Anfangsgeschwindigkeit ein schwerer Körper. Der Reibungskoeffizient ist 0,1.

Welche Geschwindigkeit erreicht der Körper, nachdem er 2 m vom Anfangspunkt der Bewegung aus zurückgelegt hat?

Lösung: 4,02 m/sec.

774. Ein Geschoß mit dem Gewicht von 24 kg verläßt mit einer Geschwindigkeit von 500 m/sec das Geschützrohr. Die Länge des Geschützrohres beträgt 2 m.

Welchen mittleren Wert hat die Druckkraft der Gase auf das Geschoß?

Lösung: 152,9 t.

775. Ein Massenpunkt wiegt 3 kg und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 5 m/sec auf einer horizontalen Geraden nach links. An diesem Punkt soll eine konstante Kraft angreifen, die nach rechts gerichtet ist. Die Wirkung der Kraft soll nach 30 Sekunden aufhören. Die Geschwindigkeit des Punktes beträgt dann 55 m/sec und ist nach rechts gerichtet.

Man bestimme die Größe dieser Kraft und die von ihr geleistete Arbeit.

Lösung: 0,612 kg, 459 mkg.

776. Ein Zug bewegt sich mit der Geschwindigkeit 36 km/h auf einer abfallenden Strecke (Neigungswinkel $\alpha = 0{,}008$). In einem Augenblick der Gefahr beginnt der Lokomotivführer den Zug abzubremsen. Der Widerstand infolge Abbremsung und Reibung der Achsen beträgt ein Zehntel des Zuggewichtes.

Man bestimme, in welcher Entfernung und in welcher Zeit nach Beginn der Abbremsung der Zug zum Stillstand kommen muß, wobei $\sin\alpha = \alpha$ gesetzt werden kann.

Lösung: 55,3 m, 11,06 sec.

777. Ein Zug mit einem Gewicht von 200 t bewegt sich mit der Beschleunigung 0,2 m/sec^2 auf einer horizontalen Strecke. Der Widerstand des Zuges, der von der Lokomotive überwunden wird, beträgt pro Tonne des Zuggewichtes 10 kg und soll unabhängig von der Geschwindigkeit sein.

Man bestimme die von der Lokomotive entwickelte Leistung im Augenblick $t = 10$ sec, wenn im Augenblick $t = 0$ die Geschwindigkeit des Zuges 18 m/sec war.

Lösung: 1620 PS = 1192 kW.

778. Der Boden wird mittels eines 60 kg schweren Handstampfers gestampft. Dieser hat einen Querschnitt von 12 dm^2 und fällt von der Höhe 1 m herab. Beim Aufprall dringt der Stampfer 1 cm tief in den Boden, wobei man den Widerstand des Bodens als konstant annehmen kann.

Welche höchste Belastung kann der Boden aushalten, ohne nachzugeben?

Es wird angenommen, daß der festgestampfte Boden eine Belastung, ohne nachzugeben, aushalten kann, die den Widerstand nicht überschreitet, der dem Stampfer beim Eindringen in den Boden entgegenwirkt.

Lösung: 5,05 kg/cm^2.

779. Der Widerstand, den ein Plattformwagen bei der Bewegung infolge der Reibung in den Achsen zu überwinden hat, beträgt 15 kg. Das Gewicht des Plattformwagens beträgt 6 t. Ein Arbeiter stemmt sich dagegen und bringt den Wagen auf einer horizontalen und geradlinigen Strecke zum Rollen, wobei er einen Druck von 25 kg ausübt. Nach 20 m überläßt er den Plattformwagen sich selbst.

Man bestimme die Höchstgeschwindigkeit v_{max} des Wagens während der Bewegung, wobei man den Luftwiderstand und die Reibung der Räder an den Schienen vernachlässige, und die gesamte Strecke s, die der rollende Plattformwagen bis zum Stillstand zurücklegt.

Lösung: $v_{max} = 0{,}808$ m/sec;
$s = 33{,}33$ m.

780. Ein Nagel wird in eine Wand eingeschlagen, welche einen Widerstand von $R = 70$ kg aufweist. Bei jedem Hammerschlag dringt der Nagel um die Länge $l = 0{,}15$ cm in die Wand ein.

Man bestimme das Gewicht des Hammers P, der beim Aufschlag auf den Nagelkopf die Geschwindigkeit $v = 1{,}25$ m/sec hat.

Lösung: 1,37 kg.

781. Ein Meteorstein, der im Jahre 1751 auf die Erde niederging, hatte das Gewicht von 39 kg. Beim Aufprall drang er bis zur Tiefe $l = 1{,}875$ m in den Erdboden ein. Untersuchungen haben gezeigt, daß der Erdboden am Orte des Niederganges des Meteorsteins dem eindringenden Körper einen Widerstand von $F = 50$ t entgegengebracht hat.

Mit welcher Geschwindigkeit erreichte der Meteor die Erdoberfläche? Von welcher Höhe mußte er ohne Anfangsgeschwindigkeit fallen, damit er an der Erdoberfläche die erwähnte Geschwindigkeit erreichte (die Schwerkraft wird als konstant angenommen und der Luftwiderstand vernachlässigt)?

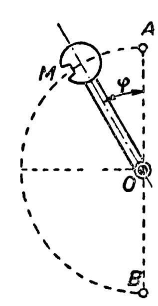
Lösung: $v = 217$ m/sec; $H = 2400$ m.

782. Ein nicht abgebremster Zug mit dem Gewicht $P = 500\,t$, der sich ohne Maschinenkraft bewegt, erfährt bei der Bewegung den Widerstand $R = (765 + 51\,v)$, wobei v die Geschwindigkeit in m/sec ist.

Man nehme die Anfangsgeschwindigkeit des Zuges mit $v_0 = 15$ m/sec an und bestimme die Strecke, die der Zug durchfährt bis zum Stillstand.

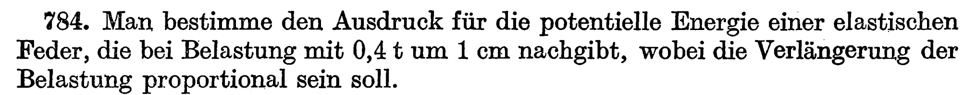
Lösung: 4,6 km.

783. Den Hauptteil der Kerbschlagprüfmaschine stellt ein schweres Gußstück M dar, das an einem Stab befestigt ist, der sich fast ohne Reibung um eine Achse O drehen kann. Man lasse die Masse des Stabes unberücksichtigt und betrachte das Gußstück M als einen Massenpunkt. Die für das Gußstück in der Zeichnung angegebene Entfernung OM sei 0,981 m.



Man bestimme die Geschwindigkeit v dieses Punktes in der niedrigsten Lage B, wenn er aus der Höchstlage A mit verschwindend geringer Anfangsgeschwindigkeit herabfällt.

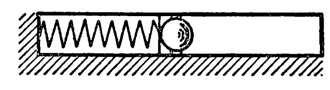
Lösung: $v = 6{,}2$ m/sec.



784. Man bestimme den Ausdruck für die potentielle Energie einer elastischen Feder, die bei Belastung mit 0,4 t um 1 cm nachgibt, wobei die Verlängerung der Belastung proportional sein soll.

Lösung: $U = 0{,}2\,x^2 + \text{konst.}$

785. Die Feder eines Katapultes hat ungespannt die Länge von 20 cm. Die Kraft zur Veränderung ihrer Länge um 1 cm ist 0,2 kg.



Mit welcher Geschwindigkeit v fliegt eine 30 g schwere Kugel heraus, wenn die Feder auf die Länge 10 cm zusammengepreßt wird?

Lösung: 8,1 m/sec.

786. Die statische Durchbiegung eines Trägers, der in der Mitte mit dem Gewicht Q belastet wird, ist 2 mm. Man bestimme die größte Durchbiegung des Trägers bei Vernachlässigung seiner Masse in zwei Fällen:

1) Die Last Q wird auf den ungebogenen Träger ohne Anfangsgeschwindigkeit aufgelegt.

2) Die Last Q fällt ohne Anfangsgeschwindigkeit von der Höhe 10 cm auf die Mitte des ungebogenen Trägers.

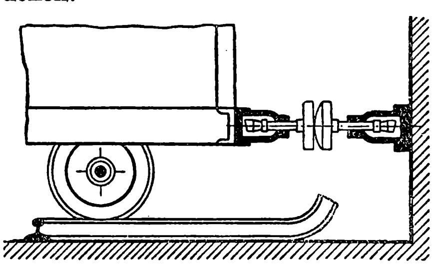
Bei der Lösung der Aufgabe muß beachtet werden, daß die Federkraft des Trägers proportional der Durchbiegung ist.

Lösung: 1) 4 mm; 2) 22,1 mm.

787. Ein Wagen mit dem Gewicht 16 t stößt mit der Geschwindigkeit 2 m/sec auf zwei Puffer eines Prellbockes.

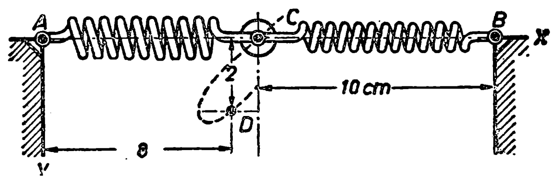
Man bestimme die größte Zusammendrückung der Pufferfedern des Prellbockes beim Anprall des Wagens. Es ist bekannt, daß die Pufferfedern des Wagens und des Prellbockes gleich stark sind und sich unter Einwirkung einer Kraft von 5 t um 1 cm zusammendrücken.

Lösung: 5,7 cm.



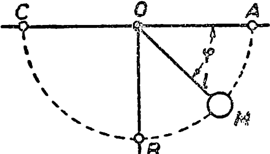
788. Zwei entspannte Federn AC und BC sind auf einer horizontalen Geraden Ax angeordnet. Sie werden gelenkig an den unbeweglichen Punkten A und B befestigt und im Punkt C mit dem Gewicht 1,962 kg belastet. Die Feder AC kann mit einer Kraft von 2 kg um 1 cm zusammengedrückt und die Feder CB mit der Kraft von 4 kg um 1 cm auseinandergezogen werden. Die Entfernungen betragen: $AC = BC = 10$ cm. Dem Gewicht wird eine Geschwindigkeit $v_0 = 2$ m/sec so erteilt, daß es bei der nachfolgenden Bewegung durch den Punkt D geht (vergl. Abb.). Wenn als Koordinatenanfang der Punkt A angenommen wird und man den Koordinatenachsen die abgebildeten Richtungen gibt, hat der Punkt D die Koordinaten $x_D = 8$ cm und $y_D = 2$ cm.

Man bestimme die Geschwindigkeit des Gewichtes im Augenblick des Durchgangs durch den Punkt D, der in der Horizontalebene xy liegt.



Lösung: $v = 1,78$ m/sec.

789. Eine Last M vom Gewicht P, die mit einem gewichtslosen und undehnbaren Faden der Länge l an dem Punkt O hängt, beginnt sich in der Vertikalebene ohne Anfangsgeschwindigkeit vom Punkt A an zu bewegen. Beim Fehlen von Widerständen erreicht die Last M die Lage C, wobei ihre Geschwindigkeit Null wird.



Indem man die potentielle Energie, die das Gewicht der Last M im Punkt B besitzt, gleich Null annimmt, bestimme man die Kurven der kinetischen und potentiellen Energieänderungen sowie deren Summe in Abhängigkeit von dem Winkel.

Lösung: Zwei Sinuskurven und eine Gerade, die durch die Gleichungen bestimmt werden:
$T = Pl \sin \varphi; \quad U = Pl\,(1 - \sin \varphi); \quad T + U = Pl.$

790. Der Massenpunkt m vollführt unter der Wirkung einer elastischen Kraft eine harmonische Schwingung auf der Geraden Ox nach folgendem Gesetz: $x = a \sin\,(kt + \beta)$.

Indem man die Widerstände vernachlässigt, bestimme man die Kurven der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie U des bewegten Punktes in Abhängigkeit von der Koordinate x. Im Koordinatenanfang ist $U = 0$.

Lösung: Beide Kurven sind Parabeln, die durch die Gleichungen bestimmt sind: $T = \frac{m}{2} k^2 (a^2 - x^2)$; $U = \frac{mk^2}{2} x^2$.

791. Welche vertikale Kraft gleichbleibender Größe und Richtung muß man auf einen Massenpunkt einwirken lassen, damit beim Fallen des Punktes auf die Erde von einer Höhe, die gleich dem Erdhalbmesser ist, diese Kraft dem Punkt dieselbe Geschwindigkeit erteilt wie die Anziehungskraft der Erde, die umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung des Punktes vom Mittelpunkt der Erde ist?

Lösung: $\frac{P}{2}$, wobei P das Gewicht des Punktes auf der Erdoberfläche ist.

792. Eine Feder, die von der Kraft P zusammengedrückt wird, befindet sich in Ruhe. Plötzlich kehrt die Kraft P ihre Richtung um.

Man bestimme unter Vernachlässigung der Masse der Feder, um wievielmal größer die sich dadurch ergebende größte Verlängerung l_2 ist als die ursprüngliche Zusammendrückung l_1.

Lösung: $\frac{l_2}{l_1} = 3$.

793. Ein Körper wird von der Erdoberfläche mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen.

Man bestimme die Höhe H, bis zu der sich der Körper erhebt. Man beachte, daß die Schwerkraft umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung vom Mittelpunkt der Erde gemessen und der Luftwiderstand vernachlässigt wird. Der Erdhalbmesser $R = 6370$ km, $v_0 = 1$ km/sec.

Lösung: $H = \frac{Rv_0^2}{2\,gR - v_0^2} = 51$ km.

794. Zwei Teilchen haben eine positive elektrische Ladung. Die Ladung des ersten Teilchens q_1 ist gleich 100 absoluten elektrostatischen Einheiten CGS, die Ladung des zweiten Teilchens $q_2 = 0{,}1\, q_1$. Das erste Teilchen bleibt unbeweglich, das zweite entfernt sich infolge der Abstoßkraft F von dem ersten Teilchen. Die Masse des zweiten Teilchens ist 1 g. Die Anfangsentfernung von dem ersten Teilchen war 5 cm und die Anfangsgeschwindigkeit 0.

Man bestimme die oberste Grenze der Geschwindigkeit des sich bewegenden Teilchens. Dabei beachte man, daß nur eine Abstoßungskraft $F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$ wirkt, wobei r die Entfernung zwischen beiden Teilchen ist.

Lösung: 20 cm/sec.

795. Man bestimme die Geschwindigkeit v_0, die man einem Körper auf der Erdoberfläche senkrecht nach oben erteilen muß, damit er eine Höhe gleich dem Erdhalbmesser erreicht. Dabei soll man nur die Anziehungskraft der Erde berücksichtigen, die umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung des Körpers vom Erdmittelpunkt ist. Der Erdhalbmesser ist $637 \cdot 10^6$ cm; die Beschleunigung der Anziehungskraft auf der Erdoberfläche ist 980 cm/sec^2.

Lösung: 7,9 km/sec.

796. Man bestimme, mit welcher Geschwindigkeit v_0 ein Geschoß von der Erdoberfläche in Richtung des Mondes abgeschossen werden muß, damit es den Punkt erreicht, an dem die Anziehungskräfte der Erde und des Mondes gleich stark sind, und dort im Gleichgewicht bleibt. Man vernachlässige die Bewegungen der Erde, des Mondes und den Luftwiderstand. Die Erdbeschleunigung ist an der Erdoberfläche mit $g = 9{,}8$ m/sec^2 einzusetzen. Das Verhältnis der Massen des Mondes zur Masse der Erde ist gleich $m : M = 1 : 80$. Die Entfernung zwischen Erde und Mond ist $d = 60\, R$, wobei der Erdhalbmesser mit $R = 6000$ km einzusetzen ist. Der Koeffizient f, der in die Formel mit aufgenommen wird und die Gravitationskonstante darstellt, wird aus der Gleichung bestimmt:

$$m_1 g = m_1 f \left[\frac{M}{R^2} - \frac{m}{(d-R)^2}\right].$$

Lösung: $$v_0{}^2 = \frac{2\, gR\,(d-R)}{d} \cdot \frac{\sqrt{\frac{M}{m}}\,(d-R) - R}{\sqrt{\frac{M}{m}}\,(d-R) + R} = \frac{59}{30}\,\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\, gR;$$

$$\alpha = \frac{1}{59\sqrt{80}};\quad v_0 = 10{,}75 \text{ km/sec}.$$

797. Der Fahrstuhl eines Grubenaufzuges bewegt sich nach unten mit der Geschwindigkeit $v = 12$ m/sec. Das Gewicht des Fahrstuhles ist $P = 6$ t.

Welche Reibungskraft muß die Fallbremse zwischen dem Fahrstuhl und den Wänden des Schachtes entwickeln, damit der Fahrstuhl auf der Strecke von 10 m zum Stillstand kommt, wenn das ihn tragende Seil gerissen ist? Die Reibungskraft wird als konstant angenommen.

Lösung: $F = P\left(1 + \frac{v_0{}^2}{2\, gs}\right) = 10{,}3$ t.

31. Gemischte Aufgaben

798. Eine Masse von 1 kg Gewicht hängt an einem 50 cm langen Faden am Festpunkt O. In der Anfangslage bildet die Masse mit der Vertikalen den Winkel 60°. Ihr wird eine Geschwindigkeit $v_0 = 210$ cm/sec in der Vertikalebene senkrecht zum Faden nach unten erteilt.

Man bestimme:

1) die Anspannung des Fadens in der niedrigsten Lage;

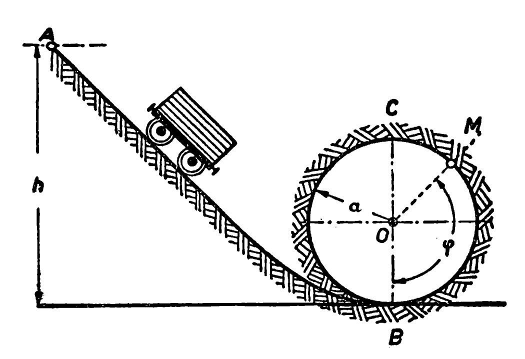
2) die von der Vertikallage ab zu zählende Höhe, bis zu der sich die Last wieder erhebt.

Lösung: 1) 2,9 kg; 2) 47,5 cm.

799. Indem die Bedingungen der vorherigen Aufgabe, mit Ausnahme der Geschwindigkeit v_0, erhalten bleiben, bestimme man, bei welcher Geschwindigkeit die Last den ganzen Kreisumfang beschreibt.

Lösung: $v_0 > 4{,}43$ m/sec.

800. Ein Wagen mit dem Gewicht P rollt auf den Schienen AB und in der Ringschleife BC mit dem Halbmesser a. Von welcher Höhe h muß der Wagen ohne Anfangsgeschwindigkeit zum Abrollen gebracht werden, damit er den ganzen Ring durchläuft, ohne sich von ihm abzulösen? Man bestimme den Druck N des Wagens auf den Ring im Punkte M, für den $\sphericalangle\, MOB = \varphi$ ist.

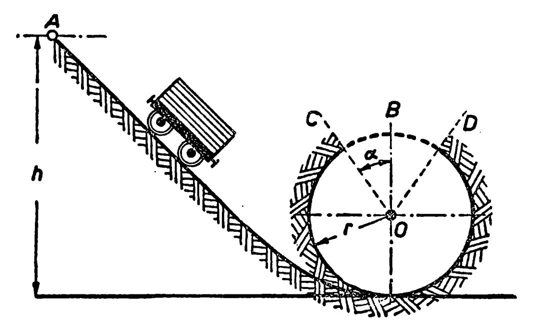


Lösung: $h > 2{,}5\, a$; $N = P\left(\frac{2\,h}{a} - 2 + 3\cos\varphi\right)$ kg.

801. Die Laufbahn, auf der sich ein Wagen bewegt, der vom Punkt A herabrollt, bildet eine offene Schleife mit dem Radius r, wie in der Zeichnung angezeigt: $\sphericalangle\, BOC = \sphericalangle\, BOD = \alpha$.

Man bestimme die Höhe h, von der der Wagen ohne Anfangsgeschwindigkeit herabrollen muß, damit er die ganze Schleife der Bahn durchläuft. Man bestimme auch die Größe des Winkels α, bei dem diese Höhe h am geringsten ist.

Hinweis: Auf dem Abschnitt *DC* bewegt sich der Schwerpunkt des Wägelchens auf einer Parabel.



Lösung: $h = r\left(1 + \cos\alpha + \frac{1}{2\cos\alpha}\right)$; $h_{\min}$ für $\alpha = 45°$.

802. Ein schweres Stahlgußstück mit dem Gewicht $Q = 20$ kg ist an einem Stab befestigt, der sich ohne Reibung um die unbewegliche Achse O drehen kann.

Man bestimme den größten Druck auf die Achse bei Vernachlässigung der Masse des Stabes (siehe Zeichnung zur Aufgabe 783).

Lösung: 100 kg.

803. Welchen Winkel mit der Vertikalen bildet der sich drehende Stab (in der vorherigen Aufgabe) in dem Augenblick, in dem der Druck auf die Achse Null ist?

Lösung: $\alpha = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$.

804. Ein Fallschirmspringer, der 70 kg wiegt, springt vom Flugzeug ab und öffnet den Fallschirm, nachdem er 100 m gefallen ist.

Man bestimme die Spannkraft der Stränge, mit denen der Fallschirmspringer am Schirm hängt, wenn sich die Geschwindigkeit des Fallschirmes 5 Sekunden nach Öffnen des Schirmes auf 4,3 m/sec verringert hat. Gleichbleibender Luftwiderstand sei vorausgesetzt. Bis zum Öffnen des Schirmes ist der Luftwiderstand zu vernachlässigen.

Lösung: 127,4 kg.

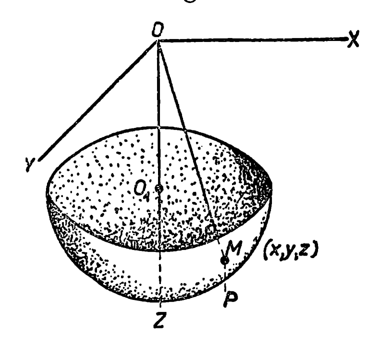
805. Der Lokomotivführer eines Zuges, der mit 12 m/sec Geschwindigkeit fährt, schließt, als sich der Zug der auf einem 2 m hohen Hügel liegenden Station bis auf 500 m genähert hat, das Dampfventil und beginnt zu bremsen.

Wie groß muß der konstante Bremswiderstand sein, damit der Zug an der Station zum Stillstand kommt, wenn das Gewicht des Zuges 1000 t und der Reibungswiderstand 2 t beträgt?

Lösung: 8690 kg.

806. Ein sphärisches Pendel besteht aus einem Faden OM der Länge l, der mit einem Ende an dem unbeweglichen Punkt O befestigt ist, und aus einer Punktmasse m, die das Gewicht Q hat und an dem anderen Ende des Fadens befestigt ist. Die Punktmasse wird aus der Gleichgewichtslage gebracht, so daß ihre Koordinaten zur Zeit $t = 0$ die Werte $x = x_0$, $y = 0$, $z = z_0$ haben. Dem Punkt erteilt man außerdem die Geschwindigkeit $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_0$, $\dot{z}_0 = 0$.

Man bestimme, bei welchem Verhältnis der Anfangsbedingungen die Punktmasse einen Kreisumfang in einer horizontalen Ebene beschreibt und wie groß die Umlaufzeit auf diesem Kreisumfang ist.



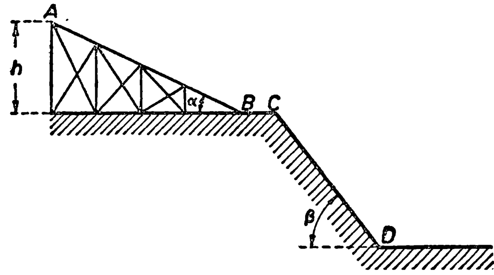
Lösung: $v_0 = x_0 \sqrt{\frac{g}{z_0}}$, $T = 2\pi \sqrt{\frac{z_0}{g}}$.

807. Ein Skifahrer gleitet vor dem Verlassen der Sprungschanze auf der Sprungbahn AB, die einen Winkel von 30° zur Horizontalen bildet. Vor dem Absprung befährt er noch eine kleine horizontale Strecke BC, deren Länge wir bei der Berechnung vernachlässigen. Im Augenblick des Absprungs verleiht sich der Skiläufer durch einen Stoß eine vertikale Geschwindigkeitskomponente $v_y = 1$ m/sec.

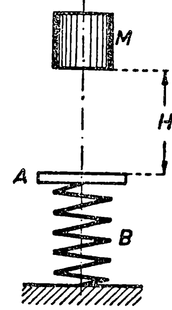
Die Höhe der Sprungbahn beträgt $h = 9$ m, der Reibungskoeffizient zwischen Skier und Schnee $\mu = 0{,}08$, die Landungsrichtung auf der Strecke CD bildet den Winkel $\beta = 45°$ mit der Horizontalen.

Man bestimme die Sprungweite des Skispringers, indem man den Luftwiderstand vernachlässigt.

Bemerkung: Die Sprungweite mißt man als Länge vom Absprungspunkt C bis zum Landepunkt auf der Strecke CD.



Lösung: 47,4 m.



808. Eine Last P fällt ohne Anfangsgeschwindigkeit von der Höhe H auf die Platte A, die auf einer Spiralfeder B aufliegt. Durch den Anprall der herabfallenden Last M wird die Feder um den Betrag h zusammengepreßt.

Indem man das Gewicht der Platte A und die Widerstände vernachlässigt, berechne man die Zeit T, die notwendig ist, damit die Feder um den Betrag h zusammengepreßt wird, und den Impuls S der elastischen Federkraft während der Zeit T.

Lösung: $T = \frac{h}{\sqrt{2g\,(H+h)}}\left\{\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{h}{2\sqrt{H\,(H+h)}}\right\}$;

$$S = \frac{p}{\sqrt{2g\,(H+h)}}\left\{(h+2H)\,[\cos\alpha - \cos\,(kT+\alpha)] + T\sqrt{2g(H+h)}\right\},$$

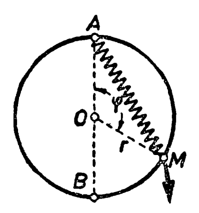
wobei $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{h}{2\sqrt{H\,(H+h)}}$; $k = \frac{\sqrt{2g\,(H+h)}}{h}$ ist.

809. Bei einer Schwungradexplosion wurde eins seiner Teile $s = 280$ m weit von der ursprünglichen Lage am Katastrophenort fortgeschleudert.

Man vernachlässige den Luftwiderstand bei der Bewegung des Teils zwischen den in der gleichen Ebene liegenden Ausgangs- und Endpunkten und bestimme den kleinstmöglichen Wert der Drehzahl des Schwungrades im Augenblick der Katastrophe, wenn der Halbmesser des Rades $R = 1{,}75$ m betrug.

Lösung: $n = 286$ U/min.

810. Eine Last M, die mittels einer Feder am oberen Punkt eines Ringes angehängt ist, der in einer vertikalen Ebene liegt, fällt, indem sie am Ring ohne Reibung gleitet, herab.



Wie groß muß die Federkonstante sein, damit die Last auf den Ring im unteren Punkt B gleich Null wird, wenn folgendes beachtet wird: Halbmesser des Ringes 20 cm, Gewicht der Last 5 kg. In der Anfangslage der Last war die Entfernung AM gleich 20 cm und die Feder entspannt. Die Anfangsgeschwindigkeit der Last war Null. Das Gewicht der Feder wird vernachlässigt.

Lösung: Die Feder verlängert sich bei einer Kraft von 0,5 kg um 1 cm.

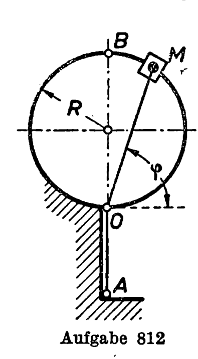
811. Man bestimme die Kraft der Last M auf den Ring im unteren Punkt B (siehe Zeichnung der vorherigen Aufgabe) nach folgenden Angaben: Halbmesser des Ringes 20 cm, Gewicht der Last 7 kg. In der Anfangslage beträgt die Entfernung bei auseinandergezogener Feder AM 20 cm. Die Länge beträgt dabei das Doppelte des ungespannten Zustandes (die ungespannte Länge ist 10 cm). Die Federkraft setzt der Verlängerung um 1 cm den Widerstand 0,5 kg entgegen. Die Anfangsgeschwindigkeit der Last ist gleich Null. Das Gewicht der Feder wird vernachlässigt.

Lösung: Der Druck ist nach oben gerichtet und beträgt 7 kg.

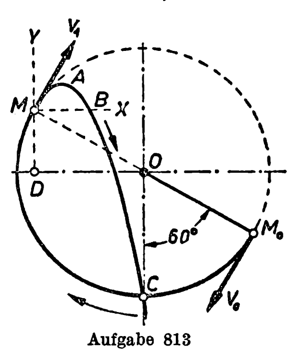
812. Ein glatter schwerer Ring M, der das Gewicht Q hat, gleitet ohne Reibung auf dem Umfang eines Ringes vom Halbmesser R, der in der Vertikalen liegt. An dem Ring ist ein elastischer Faden MOA befestigt, der durch einen anderen glatten Ring O hindurchgeht, wobei letzterer im Punkt A befestigt ist. Die Spannung des Fadens ist gleich Null, wenn der Ring M sich im Punkt O befindet. Zum Auseinanderziehen des Fadens um 1 cm muß eine Kraft c angewandt werden. Zu Anfang befindet sich der Ring im Punkt B labilen Gleichgewicht. Bei einem kleinen Stoß beginnt er am Umfang zu gleiten.

Man bestimme die Kraft N, die der Ring auf den Umfang ausübt.

Lösung: $N = 2\,Q + cR + 3\,(Q + cR)\cos(2\varphi)$. Die Kraft ist nach außen gerichtet, wenn N größer als 0 und nach innen, wenn N kleiner als 0 ist.



Aufgabe 812



Aufgabe 813

813. Eine Punktmasse von 1 kg Gewicht ist an einem Faden der Länge 50 cm angehängt, der im Punkt O befestigt ist. In der Anfangslage M_0 bildet die Masse mit der Vertikalen den Winkel 60°. Sie besitzt dabei eine Geschwindigkeit $v_0 = 350$ cm/sec in der Vertikalebene senkrecht zum Faden.

1.) Man bestimme die Lage M der Masse, in der die Spannung des Fadens gleich Null ist, und die Geschwindigkeit v_0, die sie in dieser Lage besitzt.

2.) Man bestimme die Bahn der anschließenden Bewegung der Masse bis zu dem Augenblick, in dem der Faden wieder gespannt ist. Man bestimme ferner die Zeit, während der diese Bahn durchlaufen wird.

Lösung: 1.) Der Punkt M befindet sich über der Horizontalen des Punktes O in der Entfernung $MD = 25$ cm und hat die Geschwindigkeit $v_1 = 157$ cm/sec.

2.) Die Gleichung der Parabel $MABC$ in bezug auf die Achsen Mx und My ist $y = x\sqrt{3} - 0{,}08\,x^2$. Die Masse beschreibt diese Parabel in der Zeit von 0,55 sec.

814. Ein mathematisches Pendel ist auf einem Flugzeug angebracht, das die Höhe 10 km erreicht.

Um wieviel muß man das Pendel verkürzen, damit die Periode der kleinen Schwingungen des Pendels in dieser Höhe unverändert bleibt? Die Schwerkraft wird umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung vom Mittelpunkt der Erde angenommen (R = 6377,4 km).

Lösung: Um $0{,}00313\,l$, wobei l die Länge des Pendels auf der Erdoberfläche darstellt.

815. Im Festpunkt O hängt an einem Faden OM der Länge l eine Masse m. Zu Anfang bildet der Faden OM mit der Vertikalen den Winkel α. Die Geschwindigkeit der Masse ist gleich Null. Bei der anschließenden Bewegung trifft der Faden einen dünnen Draht O_1, dessen Richtung senkrecht zur Bewegungsebene der Last verläuft und dessen Lage durch die Koordinaten $h = OO_1$ und β gegeben ist.

Man bestimme den kleinsten Wert des Winkels α, bei dem der Faden OM nach Berührung mit dem Draht sich auf dem Draht aufwindet. Desgleichen bestimme man die Änderung der Spannkraft des Fadens im Augenblick seiner Berührung mit dem Draht. Die Dicke des Drahtes wird vernachlässigt.

Lösung: $\alpha = \arccos\left[\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2} + \cos\beta\right) - \frac{3}{2}\right]$;

die Spannung des Fadens vergrößert sich um den Betrag

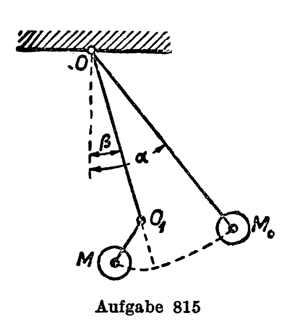
$$2\,mg\,\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2} + \cos\beta\right).$$

816. Ein Punkt mit der Masse m bewegt sich auf der Innenfläche des Kreiszylinders mit dem Halbmesser r. Man nehme die Oberfläche des Zylinders als absolut glatt und seine Achse als vertikal gerichtet an. Die Wirkung der Schwerkraft soll berücksichtigt werden.

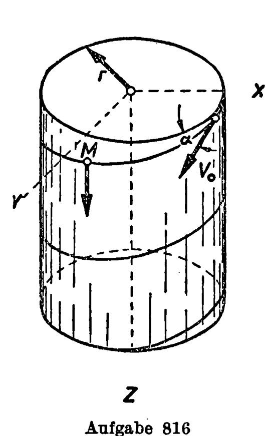
Man bestimme den Druck des Punktes auf den Zylinder.

Die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes beträgt v_0 und bildet mit der Horizontalen den Winkel α.

Lösung: $N = \dfrac{mv_0^2 \cos^2\alpha}{r}$.



Aufgabe 815



Aufgabe 816

817. In der vorherigen Aufgabe bilde man die Gleichungen der Bewegung des Massenpunktes, wenn sich der Punkt zu Anfang auf der Achse Ox befindet.

Lösung: $x = r\cos\left[\frac{v_0\cos\alpha}{r}\cdot t\right]$; $y = r\sin\left[\frac{v_0\cos\alpha}{r}\cdot t\right]$; $z = v_0 t\sin\alpha + \frac{gt^2}{2}$.

818. Ein Stein befindet sich auf dem Scheitel A einer Halbkugel und erhält eine horizontale Anfangsgeschwindigkeit v_0.

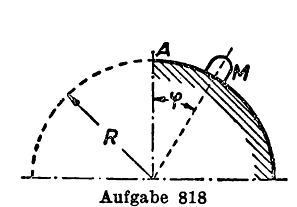
An welcher Stelle wird der Stein die Kugel verlassen? Bei welchen Werten von v_0 wird der Stein die Kuppel schon zu Anfang verlassen? Die Reibung wird bei der Bewegung des Steines auf der Kugel vernachlässigt.

Lösung: $\varphi = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right)$; $v_0 \geqq \sqrt{gR}$.

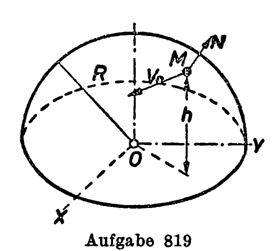
819. Ein Punkt mit der Masse m bewegt sich auf der glatten Oberfläche einer Halbkugel mit dem Halbmesser R. Man nehme an, daß auf den Punkt die Schwerkraft parallel der Achse z einwirkt, der Punkt zu Anfang die Geschwindigkeit v_0 hatte und sich in der Höhe h_0 befand.

Man bestimme die Kraft, die der Punkt auf die Kugel ausübt, wenn er sich in der Höhe h, vom Kuppelboden aus gerechnet, befindet.

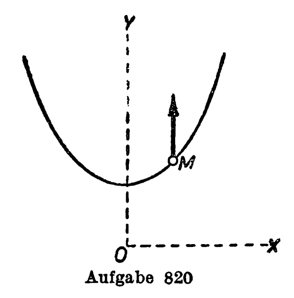
Lösung: $N = \frac{mg}{R}\left(3h - 2h_0 - \frac{v_0^2}{g}\right)$.



Aufgabe 818



Aufgabe 819



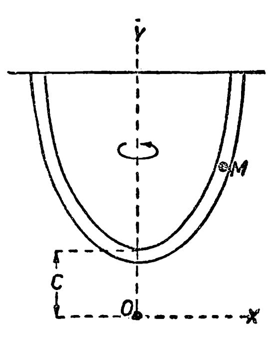
Aufgabe 820

820. Ein Punkt mit der Masse m bewegt sich auf einer Kettenlinie der Gleichung $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) = a \cdot \cos\left(\frac{x}{a}\right)$ unter der Wirkung einer Abstoßungskraft, die parallel zur Achse Oy und senkrecht zur Achse Ox gerichtet und gleich kmy ist. Im Augenblick $t = 0$ ist $x = 1$ m, $\dot{x} = 1$ m/sec.

Man bestimme die Kraft N des Punktes auf die Bewegungskurve für $k = 1\ \text{sec}^{-2}$ und $a = 1$ m (die Schwerkraft fehlt). Der Krümmungsradius der Kettenlinie ist gleich $\frac{y^2}{a}$.

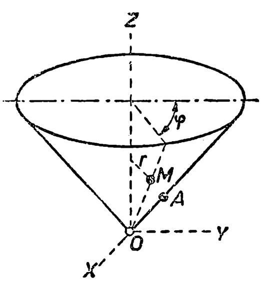
Lösung: $N = 0$; $x = (1 + t)$ m.

821. Nach welcher flachen Kurve soll man ein Röhrchen biegen, damit ein in das Röhrchen an beliebiger Stelle eingelegtes Kügelchen in bezug auf das Röhrchen im Gleichgewicht bleibt, wenn sich das Röhrchen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die Achse Oy dreht?



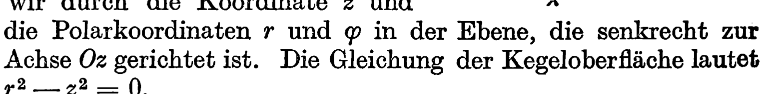
Lösung: nach der Parabel $y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + c$.

822. Die Masse $m = 1\,\mathrm{g}$ bewegt sich unter dem Einfluß einer Abstoßungskraft, $F = c \cdot OM$ dyn, mit $c = 1$ dyn/cm, die der Entfernung vom Scheitel O proportional ist, auf der glatten Oberfläche eines Kreiskegels, dessen Öffnungswinkel $2\,\alpha = 90°$ beträgt. Zu Anfang befindet sich die Masse im Punkt A. Die Entfernung OA ist $a = 2$ cm. Die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 2$ cm/sec ist parallel der Kegelgrundfläche gerichtet.



Man bestimme die Bewegung der Masse (die Schwerkraft fehlt).

Anmerkung: Die Lage des Punktes M bestimmen wir durch die Koordinate z und die Polarkoordinaten r und φ in der Ebene, die senkrecht zur Achse Oz gerichtet ist. Die Gleichung der Kegeloberfläche lautet $r^2 - z^2 = 0$.



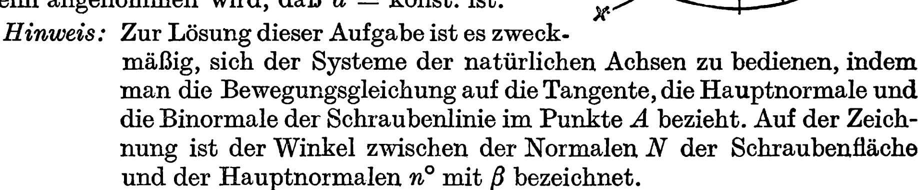
Lösung: $r^2 = e^{2t} + e^{-2t}$; $\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) = e^{2t}$.

823. Man bestimme unter den Bedingungen der vorangegangenen Aufgabe die Kraft des Punktes auf die Kegeloberfläche für $t = 0$. Dabei berücksichtige man daß die Achse des Kegels vertikal nach oben gerichtet ist und die Schwerkraft nicht vernachlässigt werden darf.

Lösung: $N = m \sin\alpha \left[g + \frac{a^2 v_0^2 \sin(2\,\alpha)}{2\,r^3}\right]$.

824. Ein Massenpunkt A bewegt sich unter dem Einfluß der Schwerkraft auf einer rauhen Schraubenfläche, deren Achse Oz vertikal gerichtet ist. Die Oberfläche wird durch die Gleichung $z = a\,\varphi + f(r)$ gegeben. Der Reibungskoeffizient des Punktes an der Oberfläche sei μ.

Man bestimme die Bedingung, unter der die Bewegung des Punktes in einer gleichbleibenden Entfernung von der Achse, d. h. in einer Schraubenlinie erfolgt, wobei $AB = r_0 =$ konst. bleibt. Ferner bestimme man die Geschwindigkeit dieser Bewegung, wenn angenommen wird, daß $a =$ konst. ist.



Hinweis: Zur Lösung dieser Aufgabe ist es zweckmäßig, sich der Systeme der natürlichen Achsen zu bedienen, indem man die Bewegungsgleichung auf die Tangente, die Hauptnormale und die Binormale der Schraubenlinie im Punkte A bezieht. Auf der Zeichnung ist der Winkel zwischen der Normalen N der Schraubenfläche und der Hauptnormalen $n°$ mit β bezeichnet.

Lösung: Die Bewegung auf der Schraubenlinie ist unter der Bedingung $\operatorname{tg}\alpha - \mu\sqrt{1 + f'^2(r_0)\cos^2\alpha} = 0$ möglich. Die Geschwindigkeit der Bewegung beträgt

$$v = \sqrt{g r_0 f'(r_0)};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{r_0}.$$

32. Schwingende Bewegungen

825. Die Feder AB, die mit einem Ende am Punkt A befestigt ist, bietet einen solchen Widerstand, daß man zu ihrer Verlängerung um 1 cm eine Kraft von 20 g im Punkt B bei statischer Belastung aufwenden muß. An das untere Ende B der nicht deformierten Feder hängt man ein Gewicht von 100 g, das ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen wird.

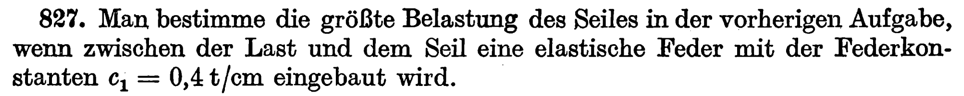
Man finde die Gleichung der weiteren Bewegung des Gewichtes unter Vernachlässigung der Masse der Feder. Man bestimme die Amplitude und die Schwingungsperiode und beziehe die Bewegung des Gewichtes auf die Koordinatenachse, die von der statischen Gleichgewichtslage des Gewichtes aus vertikal nach unten führt.

Lösung: $x = -5 \cos (14\,t)$; $a = 5$ cm; $T = 0{,}45$ sec.

826. Beim gleichmäßigen Herablassen einer Last $Q = 2$ t mit einer Geschwindigkeit von $v = 5$ m/sec wurde plötzlich das obere Ende des Seils, an dem die herabgelassene Last hing, aufgehalten. Das Seil hatte sich am Beschlag des Traggestells festgeklemmt.

Unter Vernachlässigung des Seilgewichtes bestimme man die größte Belastung des Seils bei den folgenden Schwingungen des Gewichtes. Dabei beträgt die Federkonstante des Seils $c = 4$ t/cm.

Lösung: $F = 47{,}1$ t.



827. Man bestimme die größte Belastung des Seiles in der vorherigen Aufgabe, wenn zwischen der Last und dem Seil eine elastische Feder mit der Federkonstanten $c_1 = 0{,}4$ t/cm eingebaut wird.

Lösung: $F = 15{,}6$ t.

828. Eine Last Q fällt aus einer Höhe $h = 1$ m ohne Anfangsgeschwindigkeit und trifft auf die Mitte eines elastischen Horizontalträgers auf. Die Enden des Trägers sind eingespannt.

Man finde die Gleichung der weiteren Bewegung der Last, indem man die Bewegung auf eine Koordinate bezieht, die von der statischen Gleichgewichtslage der auf dem Träger liegenden Last aus vertikal nach unten führt. Die statische Durchbiegung des Trägers beträgt in seiner Mitte bei der angegebenen ruhenden Belastung 0,5 cm. Die Masse des Trägers wird vernachlässigt.

Lösung: $x = -\,0{,}5 \cos (44{,}3\,t) + 10 \sin (44{,}3\,t)$ cm.

829. Auf eine Wagenfederung kommt eine Belastung von P kg. Infolge dieser Belastung hat die Wagenfederung bei der ruhenden Gleichgewichtslage eine Durchbiegung von 5 cm.

Man bestimme die Dauer T der Eigenschwingungen. Der elastische Widerstand ist proportional der vertikalen Komponente der Durchbiegung.

Lösung: $T = 0{,}45$ sec.

830. Man bestimme die Periode der freien Schwingungen des Fundamentes einer Maschine, das auf einem elastischen Boden steht. Das Gewicht des Fundamentes mit der Maschine beträgt $Q = 90$ t. Die Auflagefläche des Fundamentes beträgt $S = 15$ m², die Federkonstante des Bodens ist $c = \lambda S$, wobei $\lambda = 3$ kg/cm³ der sogenannte Härtegrad des Bodens ist.

Lösung: $T = 0{,}09$ sec.

831. Man bestimme die Periode der freien Vertikalschwingungen eines Schiffes in ruhigem Wasser, wenn das Gewicht des Schiffes P Tonnen und die Fläche seines Horizontalschnittes S m² beträgt und nicht von der Höhe des Schnittes abhängig ist. Das Gewicht des Wassers beträgt 1 Tonne für 1 m³. Man vernachlässige alle Kräfte, die durch die Zähigkeit des Wassers bedingt sind.

Lösung: $T = 2\pi \sqrt{\frac{P}{Sg}}$.

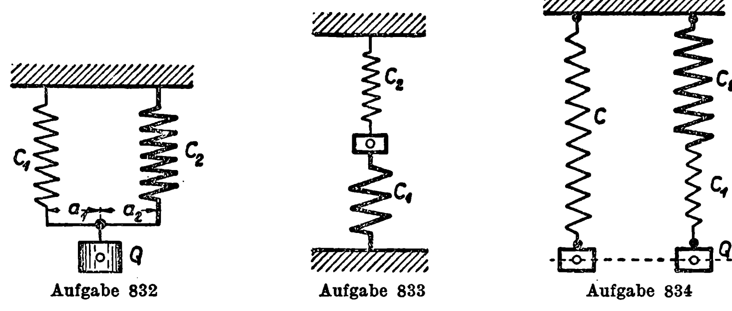
832. Man bestimme die Periode der freien Schwingungen einer Masse mit dem Gewicht Q, die an zwei parallel verbundenen Federn befestigt ist. Man bestimme ferner die Federkonstante der Feder, die dieser Doppelfeder entspricht, wenn die Last eine solche Lage hat, daß die Verlängerungen beider Federn gleich sind. Die Federn besitzen die gegebenen Federkonstanten c_1 und c_2.

Lösung: $T = 2\pi \sqrt{\frac{Q}{g(c_1 + c_2)}}$; $c = c_1 + c_2$.

Die Lage der Last entspricht der Gleichung $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_2}{c_1}$.

833. Man bestimme die Periode der freien Schwingungen einer Masse mit dem Gewicht Q, die zwischen zwei Federn mit verschiedenen Federkonstanten befestigt ist.

Lösung: $T = 2\pi \sqrt{\frac{Q}{g(c_1 + c_2)}}$.



Aufgabe 832 Aufgabe 833 Aufgabe 834

834. Man bestimme die Federkonstante c kg/cm einer Feder, die einer Doppelfeder äquivalent ist. Letztere besteht aus zwei hintereinander angeordneten Federn mit verschiedenen Federkonstanten c_1 und c_2. Man bestimme weiterhin die Dauer der Eigenschwingung einer Masse mit dem Gewicht Q kg, die an die Doppelfeder angehängt ist.

Lösung: $c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$, $T = 2\pi \sqrt{\frac{Q(c_1 + c_2)}{g\, c_1 c_2}}$.

835. Eine Schraubenfeder besteht aus n Gängen, deren Federkonstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sind.

Man bestimme die Federkonstante c einer gleichartigen Feder, die der gegebenen äquivalent ist.

Lösung: $c = 1 \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i}$.

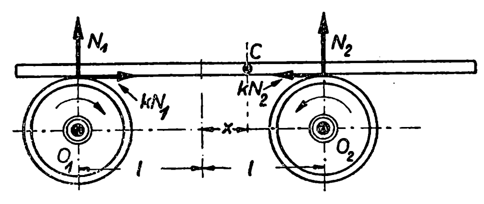
836. Eine Masse, die das Gewicht P g hat, hängt in einem unbeweglichen Punkt an einem elastischen Faden. Die aus der Gleichgewichtslage gebrachte Last beginnt zu schwingen.

Man finde den Ausdruck für die Länge x des Fadens als Funktion der Zeit und bestimme, welcher Bedingung die Anfangslänge x_0 des Fadens entsprechen muß, damit der Faden während der Bewegung der Last gespannt bleibt. Die Fadenkraft ist proportional der Verlängerung; die Länge des Fadens im ungedehnten Zustand ist l; infolge einer statischen Belastung von q g verlängert sich der Faden um 1 cm. Die Anfangsgeschwindigkeit ist gleich Null.

Lösung: $x = l + \frac{P}{q} + \left(x_0 - l - \frac{P}{q}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{qg}{P}}\, t\right)$; $l \leqq x_0 \leqq l + \frac{2P}{q}$.

837. Auf zwei zylindrischen Riemenscheiben gleicher Halbmesser, die sich in entgegengesetzten Richtungen drehen (vergl. Abb.), liegt ein homogener Stab frei auf; die Mittelpunkte der Riemenscheiben O_1 und O_2 liegen auf einer horizontalen Geraden; die Entfernung O_1O_2 ist gleich $2\,l$; der Stab wird durch die Reibungskräfte, die sich in den Berührungspunkten mit der Riemenscheibe entwickeln, in Bewegung gebracht; diese Kräfte sind dem Druck des Stabes auf die Riemenscheibe proportional, wobei μ der Reibungskoeffizient ist.

1) Man bestimme die Bewegung des Stabes, nachdem er aus der Symmetrielage um x_0 cm bei $v_0 = 0$ verschoben wurde.
2) Man bestimme den Reibungskoeffizienten μ, wenn man weiß, daß die Periode T der Schwingungen des Stabes bei $l = 25$ cm gleich 2 sec ist.



Lösung: 1) $x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g\mu}{l}}\, t\right)$; 2) $\mu = \frac{4\pi^2 l}{gT^2} = 0{,}25$.

838. Eine Feder trägt zunächst die Last p g und danach die Last $3\,p$ g. Man bestimme, um wieviel sich die Schwingungsperiode ändert. Die Federkonstante der Feder beträgt c g/cm. Für die Anfangsbedingungen gilt, daß die Lasten an das nicht gespannte Ende der Feder angehängt und ohne Anfangsgeschwindigkeit herabgelassen werden. Man bestimme die Bewegungsgleichungen.

Lösung: $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{3}$; $x_1 = -\frac{p}{c} \cos\left(\sqrt{\frac{cg}{p}}\, t\right)$; $x_2 = -\frac{3p}{c} \cos\left(\sqrt{\frac{cg}{3p}}\, t\right)$.

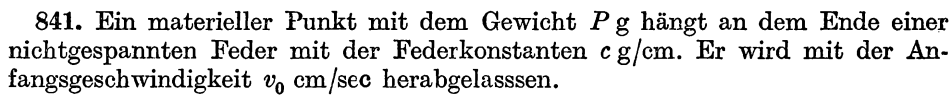
839. Ein Körper mit dem Gewicht $Q = 12$ kg, der am Ende einer Feder befestigt ist, vollführt harmonische Schwingungen. Mit Hilfe einer Stoppuhr wird festgestellt, daß der Körper 100 volle Schwingungen in 45 sec macht. Anschließend wird an das Ende der Feder zusätzlich die Last $Q_1 = 6$ kg angehängt. Man bestimme die Periode der Schwingungen beider Lasten.

Lösung: $T_1 = T\sqrt{\frac{Q + Q_1}{Q}} = 0{,}55$ sec.

840. Eine Masse M, die an dem Festpunkt A mittels einer Feder angehängt ist, führt kleine harmonische Schwingungen in vertikaler Ebene aus. Sie gleitet ohne Reibung auf dem Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser AB gleich l ist. Die ungespannte Länge der Feder beträgt a. Die Federkonstante ist so groß, daß die Feder unter der Einwirkung einer Kraft gleich dem Gewicht der Masse M um b verlängert wird.

Man bestimme die Periode T der Schwingungen, wenn $l = a + b$ ist. Man vernachlässige die Masse der Feder und nehme an, daß sie bei den Schwingungen auseinandergezogen bleibt.

Lösung: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.



841. Ein materieller Punkt mit dem Gewicht P g hängt an dem Ende einer nichtgespannten Feder mit der Federkonstanten c g/cm. Er wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 cm/sec herabgelasssen.

Man finde die Bewegungsgleichung des Massenpunktes sowie seine Schwingungsdauer, wenn auf ihn im Augenblick der tiefsten Lage eine nach unten gerichtete Kraft Q = konst. einwirkt. Man wähle den Koordinatenanfang in der Lage des statischen Gleichgewichtes, d. h. in der Entfernung $\frac{P}{c}$ vom Ende der nichtgespannten Feder.

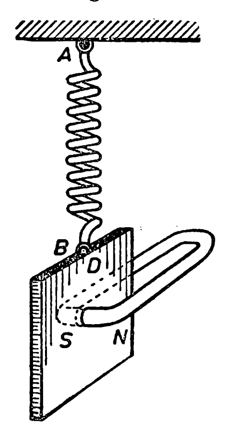
Lösung: $x = \frac{Q}{c} + \left[\sqrt{\left(\frac{v_0^2 P}{cg}\right) + \left(\frac{P}{c}\right)^2} - \frac{Q}{c}\right] \cos\left(\sqrt{\frac{cg}{P}}\, t\right)$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{P}{cg}}$,
wobei t von dem Augenblick an gezählt wird, in dem die Kraft Q zu wirken anfängt.

842. Zur Bestimmung der Erdbeschleunigung an einem Ort der Erdkugel macht man zwei Versuche. An das Ende einer Feder hängt man eine Last P_1 und mißt die statische Verlängerung l_1 der Feder. Dann hängt man an das Ende derselben Feder eine andere Last P_2 und mißt wieder die statische Verlängerung l_2. Dann wiederholt man beide Versuche, indem man beide Lasten nacheinander frei schwingen läßt. Man mißt die Schwingungzeiten T_1 und T_2. Den zweiten Versuch macht man, um den Einfluß der Masse der Feder zu berücksichtigen. Man nimmt dabei an, daß dieser Einfluß bei Bewegung der Last der Hinzufügung einer zusätzlichen Masse zur schwingenden Masse äquivalent ist.

Man finde die Formel zur Bestimmung der Erdbeschleunigung nach diesen Angaben.

Lösung: $g = \frac{4\pi^2 (l_1 - l_2)}{T_1^2 - T_2^2}$.

843. Eine Platte D mit einem Gewicht von 100 g hängt mit der Feder AB im unbeweglichen Punkt A und bewegt sich zwischen den Polen eines Magneten. Infolge der Wirbelströme wird die Bewegung durch eine Kraft abgebremst, die der Geschwindigkeit proportional ist. Der Bewegungswiderstand ist gleich $kv\Phi^2$ dyn, wobei $k = 0{,}0001$, $v =$ Geschwindigkeit in cm/sec und Φ der Magnetfluß zwischen den Polen N und S sind. Zu Anfang ist die Geschwindigkeit der Platte gleich Null und die Feder spannungslos. Bei statischer Einwirkung einer Kraft von 20 g im Punkt B tritt eine Verlängerung der Feder um 1 cm ein.



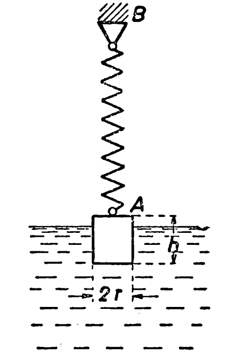
Man bestimme die Bewegung der Platte, wenn $\Phi = 1000\sqrt{5}$ Einheiten *CGS* ist.

Lösung: $x = e^{-2{,}5\,t}\,(5 \cos 13{,}78\, t + 0{,}907 \sin 13{,}78\, t)$, wobei x die Entfernung des Schwerpunktes der Platte von der Gleichgewichtslage vertikal nach unten ist.

844. Man bestimme die Bewegung der Platte D unter den Bedingungen der vorherigen Aufgabe, beachte aber dabei, daß der Magnetfluß $\Phi = 10\,000$ Einheiten *CGS* besitzt.

Lösung: $x = -\frac{5}{48} e^{-98\,t}\,(49\,e^{96\,t} - 1)$.

845. Ein Zylinder mit dem Gewicht P g, dem Halbmesser r cm und der Höhe h cm hängt an der Feder AB, deren oberes Ende B befestigt ist. Der Zylinder taucht beim statischen Gleichgewichtszustand um die Hälfte seiner Höhe ins Wasser. Zu Anfang wurde der Zylinder um $^2/_3$ seiner Höhe eingetaucht und begann dadurch ohne Anfangsgeschwindigkeit die Vertikalbewegung.



Man setze für die Federkonstante c g/cm, führe die Wirkung des Wassers auf die zusätzliche Auftriebskraft zurück und bestimme die Bewegung des Zylinders in bezug auf die Gleichgewichtslage. Das spezifische Gewicht des Wassers nehme man mit γ g/cm³ an.

Lösung: $x = \frac{1}{6}\, h \cos kt$ mit $k^2 = \frac{g}{p}\,(c + \pi \gamma r^2)$.

846. Man bestimme in der vorangegangenen Aufgabe die harmonische schwingende Bewegung des Zylinders. Dabei ist der Widerstand des Wassers der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional und gleich αv anzunehmen.

Lösung: Eine schwingende Bewegung des Zylinders erhält man,

wenn $\left(\frac{c}{m} + \frac{\pi r^2}{m}\gamma\right) - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 > 0$.

Es wird $x = \frac{h}{6}\sqrt{\frac{k^2}{k^2 - n^2}}\, e^{-nt} \sin\left(\sqrt{k^2 - n^2}\, t + \beta\right)$,

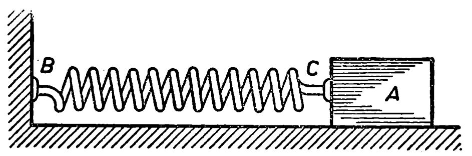
mit $k^2 = \frac{c}{m} + \frac{\pi r^2}{m}\gamma$; $n = \frac{\alpha}{2m}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{n}\sqrt{k^2 - n^2}$, $m = \frac{P}{g}$.

847. Ein Körper A mit einem Gewicht von 0,5 kg liegt auf einer rauhen horizontalen Fläche und ist mit dem unbeweglichen Punkt B durch eine Feder verbunden, deren Achse BC horizontal ist. Der Reibungskoeffizient der Fläche beträgt 0,2. Die Feder ist so beschaffen, daß man eine Kraft von 0,25 kg benötigt, um sie um 1 cm zu verlängern. Der Körper A hat sich von dem Punkt B so weit entfernt, daß sich die Feder um 3 cm gedehnt hat. Danach wird der Körper freigegeben, ohne daß ihm eine Anfangsgeschwindigkeit erteilt wird.

Man bestimme:

1) die Anzahl der Schwingungen, die der Körper ausführt,
2) die Amplitudendifferenzen der Schwingungen,
3) die Dauer T einer jeden Schwingung. (Gemeint ist hier die Zeit der Bewegung zwischen zwei Bewegungsnullpunkten.)

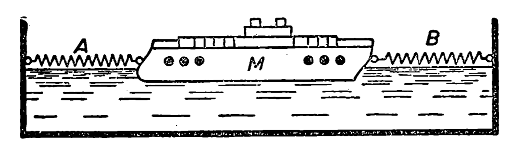
Der Körper kommt zum Stillstand, wenn in der Lage, bei der seine Geschwindigkeit Null ist, die elastische Kraft der Feder gleich der Reibungskraft oder geringer ist.



Lösung: 1) 4 Schwingungen;
2) 5,2 cm; 3,6 cm; 2,0 cm; 0,4 cm;
3) $T = 0{,}141$ sec.

848. Um den Wasserwiderstand eines Schiffes bei ganz geringen Geschwindigkeiten zu ermitteln, läßt man das Modell M in einem Gefäß schwimmen, und befestigt Bug und Heck des Schiffsmodells mit zwei gleichen Federn A und B, deren Spannkraft proportional ihrer Verlängerung ist. Die Beobachtungen zeigen, daß sich die Auslenkung des Modells aus der Gleichgewichtslage nach jeder Schwingung vermindert. Sie läßt sich durch eine geometrische Reihe darstellen, bei der der Faktor 0,9 auftritt. Die Dauer einer Schwingung beträgt $T = 0{,}5$ sec.

Man bestimme die Kraft R des Wasserwiderstandes in Gramm, die auf jedes Gramm des Modellgewichtes bei einer Geschwindigkeit des Modells von 1 cm/sec kommt. Dabei nimmt man an, daß der Wasserwiderstand mit der ersten Potenz der Geschwindigkeit anwächst.

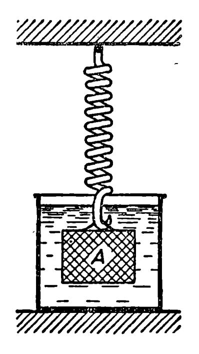


Lösung: $R = 0{,}00043$ g.

Anmerkung der deutschen Redaktion:

Wegen der hierbei auftretenden instationären Strömung kann die angeführte Methode die Kraftmessung im Strömungs- oder Schleppkanal nicht ersetzen.

849. Zur Bestimmung der Zähigkeit einer Flüssigkeit wandte COULOMB folgende Methode an: Er hängte eine dünne Platte A an einer Feder auf und ließ die Platte zunächst in der Luft und dann in der Flüssigkeit schwingen, deren Zähigkeit bestimmt werden sollte; COULOMB stellte die Dauer T_1 der Schwingung im ersten und die Dauer T_2 im zweiten Fall fest. Die Reibungskraft zwischen Platte und Flüssigkeit kann in Gramm durch die Formel $2\,S\eta v$ ausgedrückt werden, wobei $2\,S$ die Oberfläche der Platte, v die Geschwindigkeit und η der Zähigkeitskoeffizient sind.



Indem man die Reibung der Platte in der Luft vernachlässigt, bestimme man den Koeffizienten η nach den aus den Versuchen für T_1 und T_2 gefundenen Werten. Dabei beträgt das Gewicht der Platte P Gramm.

Lösung: $\eta = \dfrac{\pi P}{gST_1T_2}\sqrt{T_2^2 - T_1^2}.$

850. Ein Körper mit dem Gewicht von 5 kg hängt an einer Feder, deren Federkonstante 2 kg/cm beträgt. Der Widerstand des umgebenden Mediums ist proportional der Geschwindigkeit. Die Amplitude hatte sich nach vier Schwingungen auf ein Zwölftel verringert.

Man bestimme die Schwingungsdauer und das logarithmische Dekrement der Dämpfung.

Lösung: $T = 0{,}319$ sec; $\dfrac{nT}{2} = 0{,}316.$

851. Ein Körper mit einem Gewicht von 5,88 kg hängt an einer Feder und schwingt beim Fehlen eines Widerstandes mit der Periode $T = 0{,}4\,\pi$ sec und beim Vorhandensein eines der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportionalen Widerstandes mit der Periode $T_1 = 0{,}5\,\pi$ sec.

Man bestimme die Widerstandskraft k bei einer Geschwindigkeit von 1 cm/sec und berechne die Bewegung, wenn angenommen wird, daß die Feder zu Anfang gegenüber der Gleichgewichtslage um 4 cm auseinandergezogen war und der Körper sich dann selbst überlassen wurde.

Lösung: $k = 0{,}036$; $x = 5\,e^{-3t}\sin\left(4t + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{4}{3}\right).$

852. Ein Körper mit dem Gewicht von 1,96 kg hängt an einer Feder, die durch eine Kraft von 1 kg um 20 cm auseinandergezogen wird. Bei der Bewegung des Körpers tritt ein Widerstand auf, der proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit ist und bei der Geschwindigkeit 1 cm/sec gleich 0,02 kg beträgt. Zu Anfang ist die Feder um 5 cm gegenüber der Gleichgewichtslage auseinandergezogen. Der Körper begann die Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit.

Man bestimme die Bewegung des Körpers.

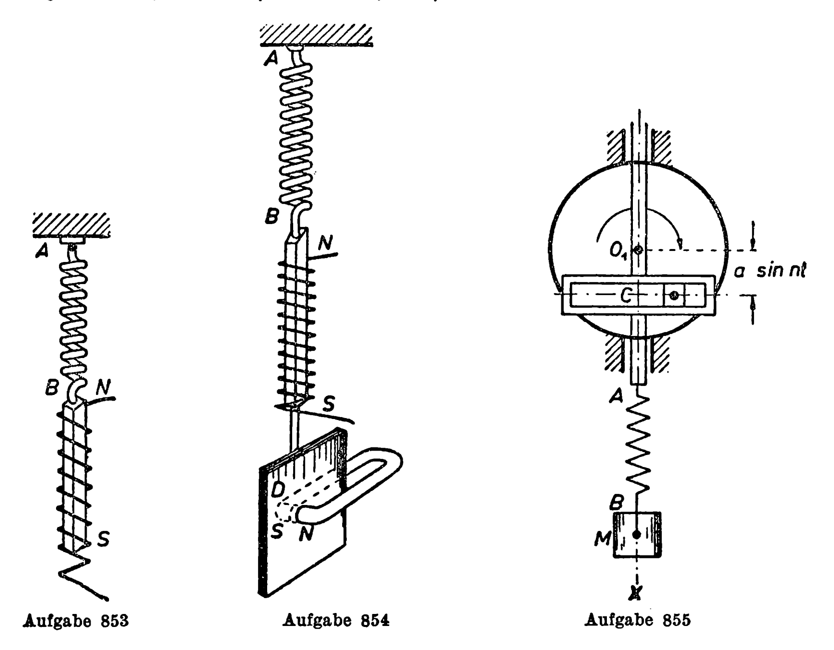
Lösung: $x = 5\,e^{-5t}\,(5\,t + 1)$ cm.

853. An einer Feder mit der Federkonstanten $c = 20$ g/cm hängt ein Magnetstab, der ein Gewicht von 100 g hat. Das untere Ende des Magneten geht durch eine Spule, durch die ein Wechselstrom $i = 20 \sin 8\pi t$ Amp. geleitet wird. Der Strom beginnt im Augenblick $t = 0$ zu fließen und zieht den Magnetstab in die Spule. Bis zu diesem Augenblick hing der Stab unbeweglich an der Feder. Die magnetische Anziehungskraft wird durch die Gleichung $F = 16\pi i$ dyn bestimmt. Man berechne die erzwungene Schwingung des Magneten.

Lösung: $x = -0{,}023 \sin 8\pi t$ cm.

854. An einer Feder mit der Federkonstanten $c = 20$ g/cm hängt ein Magnetstab, der ein Gewicht von 50 g hat und durch eine Spule hindurchgeht. Außerdem ist an der Feder eine 50 g schwere Kupferplatte befestigt. Diese ist zwischen den Polen eines Magneten beweglich. Durch die Spule fließt ein Strom $i = 20 \sin 8\pi t$ Amp und erzeugt eine Kraft von $F = 16\pi i$ dyn. Die Abbremskraft der Kupferplatte infolge der Wirbelströme ist gleich $kv\Phi^2$, wobei $k = 10^{-4}$, $\Phi = 1000\sqrt{5}$ *CGS*-Einheiten und v die Geschwindigkeit der Platte ist. Man bestimme die erzwungene Schwingung der Platte.

Lösung: $x = 0{,}022 \sin (8\pi t - 0{,}91\pi)$ cm.



Aufgabe 853 Aufgabe 854 Aufgabe 855

855. Ein Gewicht M hängt an der Feder AB, deren oberes Ende vertikale Schwingungen mit der Amplitude a und der Frequenz n: $O_1C = a \sin nt$ cm ausführt. Man bestimme die erzwungene Schwingung des Gewichtes bei folgenden Angaben: Das Gewicht wiegt 400 g; die Feder verlängert sich durch eine Kraft von 40 g um 1 cm; $a = 2$ cm; $n = 7\,\text{sec}^{-1}$.

Lösung: $x = 4 \sin (7\,t)$ cm.

856. Man bestimme die Bewegung eines Gewichtes (siehe Aufgabe 855), das an der Feder AB hängt, deren oberes Ende A harmonische Schwingungen in der Vertikalen mit der Amplitude a cm und der Frequenz k sec^{-1} ausführt. Die statische Auslenkung der Feder durch das Gewicht ist δ cm. Im Anfang nahm der Punkt A die Mittelstellung ein, und das Gewicht befand sich in Ruhe. Die Anfangslage des Gewichtes sei der Koordinatenanfang, die Achse Ox ist vertikal nach unten gerichtet.

Lösung: $x = \frac{ag}{k^2\delta - g}\left[k\sqrt{\frac{\delta}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}\,t - \sin kt\right]$ für $k \gtrless \sqrt{\frac{g}{\delta}}$;

bzw. $x = \frac{a}{2}\left[\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}\,t - \sqrt{\frac{g}{\delta}}\,t\cos kt\right]$ für $k = \sqrt{\frac{g}{\delta}}$.

857. Ein materieller Punkt mit der Masse $m = 2$ g hängt an einer Feder, deren Federkonstante $c = 6$ dyn/cm beträgt. Auf den Punkt wirkt eine erregende Kraft $S = 12\sin(pt + \delta)$ dyn ein.

Bei welcher Frequenz p erreicht die Amplitude der erzwungenen Schwingung ihren Höchstwert, wenn der Bewegungswiderstand proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit und gleich $R = 0{,}1\sqrt{mc}\cdot\dot{x}$ dyn ist.

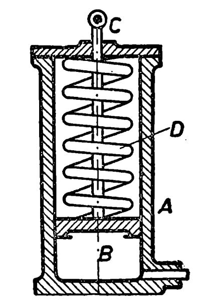
Lösung: $A_{\max} = 20$ cm; $p = 1{,}72$ sek^{-1}.

858. Die statische Durchbiegung der Wagenfeder eines belasteten Güterwagens beträgt $\Delta\, l_{st} = 5$ cm.

Man bestimme die kritische Geschwindigkeit, bei der das „Galoppieren" des Wagens beginnt. Der Wagen empfängt an den Stoßfugen der Schienen Stöße, die eine erzwungene Schwingung hervorrufen. Die Länge der Schienen beträgt $L = 12$ m.

Lösung: $v = 96$ km/h.

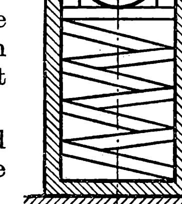
859. Der Indikator einer Dampfmaschine besteht aus einem Zylinder A, in dem sich der Kolben B bewegt, der auf die Feder D drückt. Mit dem Kolben ist ein Stab verbunden, an dessen Ende ein schreibender Stift C befestigt ist. Man nehme an, daß sich der auf einen Quadratzentimeter bezogene Dampfdruck p auf den Kolben B gemäß der Formel $p = 4 + 3\sin\frac{2\pi}{T}t$ verändert, wobei T die Zeit einer Wellenumdrehung ist, und bestimme die Amplitude der erzwungenen Schwingungen des Stiftes C, wenn die Welle 3 U/sec macht.



Gegeben sind: Die Fläche des Indikatorkolbens mit 4 cm^2 und das Gewicht des beweglichen Teiles des Indikators $Q = 1$ kg. Weiterhin ist bekannt, daß die Feder durch eine Kraft von 3 kg um 1 cm zusammengedrückt wird.

Lösung: $a = 4{,}5$ cm.

860. Ein Elektromotor ist auf einer Platte montiert, die von einer Spiralfeder gestützt wird. Das Gesamtgewicht von Motor und Platte beträgt 32,7 kg. Die Feder ist so beschaffen, daß durch eine Belastung von 30 kg eine Verringerung ihrer Höhe um 1 cm bewirkt wird. Auf der Welle des Motors ist eine Masse (M_1) mit einem Gewicht von 200 g im Abstande 1,3 cm von der Wellenachse O befestigt. Die Winkelgeschwindigkeit des Motors beträgt 30 sec^{-1}.



Man bestimme die erzwungene Schwingung der Platte und nehme an, daß sie zu Anfang in Ruhe war; ferner werde $g = 981$ cm/sec^2 gesetzt.

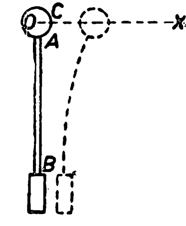
Lösung: $x = 0{,}12\,t \sin(30\,t)$ cm.

861. Ein materieller Punkt vom Gewicht $p = 3$ g hängt an einer Feder mit der Federkonstanten $c = 12$ g/cm. Auf den Punkt wirken eine erregende Kraft $F = H \sin(62{,}6\,t + \beta)$ g und eine Widerstandskraft, die der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional und gleich $R = a\dot{x}$ g ist. Um wieviel verringert sich die Amplitude der erzwungenen Schwingung des Massenpunktes, wenn sich die Widerstandskraft um das Dreifache vergrößert?

Lösung: Die Amplitude der erzwungenen Schwingung wird auf ein Drittel verringert.

33. Relativbewegungen

862. Am Ende A eines vertikalen biegsamen Stabes AB ist eine 2,5 kg schwere Last C befestigt. Die Last C wird aus der Gleichgewichtslage gebracht und führt unter dem Einfluß einer Federkraft, die der Auslenkung aus der Gleichgewichtslage proportional ist, harmonische Schwingungen aus. Der Stab AB ist so beschaffen, daß man eine Kraft von 0,1 kg aufbringen muß, um sein Ende A um 1 cm zu verschieben.



Man finde die Amplitude der erzwungenen Schwingung für den Fall, daß der Befestigungspunkt B des Stabes horizontale harmonische Schwingungen mit der Amplitude 1 mm und der Periode 1,1 sec ausführt.

Lösung: 5,9 mm.

863. Der Aufhängepunkt eines mathematischen Pendels der Länge l bewegt sich mit konstanter Beschleunigung auf der Vertikalen.

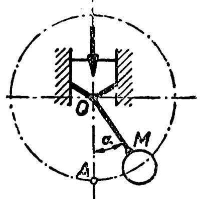
Man bestimme die Periode T der kleinen Pendelschwingungen in den beiden folgenden Fällen:

1) Die Beschleunigung des Aufhängepunktes ist aufwärts gerichtet und hat die Größe p;

2) Die Beschleunigung ist abwärts gerichtet; ihre Größe ist $p > g$.

Lösung: 1) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+p}}$; 2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-p}}$.

864. Das mathematische Pendel OM von der Länge l ist zu Anfang um einen Winkel α gegen die Ruhelage OA geneigt und hat die Geschwindigkeit Null. Der Aufhängepunkt des Pendels hat in diesem Augenblick ebenfalls die Geschwindigkeit Null, bewegt sich jedoch dann mit der konstanten Beschleunigung $p \geqq g$ vertikal abwärts.



Man bestimme die Länge s des Kreisbogens, den der Punkt M in seiner relativen Bewegung um den Punkt O beschreibt.

Lösung: 1) $p = g$; $s = 0$;
2) $p > g$; $s = 2\,l\,(\pi - \alpha)$.

865. Ein Eisenbahnzug fährt mit einer Geschwindigkeit von 15 m/sec von Süden nach Norden über eine Strecke, die längs eines Längengrades angelegt ist. Das Gewicht des Zuges beträgt 2000 t.

Man bestimme den Seitendruck des Zuges auf die Schienen, wenn er die nördliche Breite 60° durchquert und den Seitendruck für die entgegengesetzte Fahrtrichtung.

Lösung: 384 kg jeweils auf die rechte Schiene.

866. Ein materieller Punkt fällt in der nördlichen Halbkugel frei von 500 m Höhe auf die Erde. Man berücksichtige die Rotation der Erde um ihre Achse, vernachlässige den Luftwiderstand und bestimme, um wieviel sich der Massenpunkt beim Herabfallen nach Osten bewegt. Die geographische Breite des Ortes ist 60°.

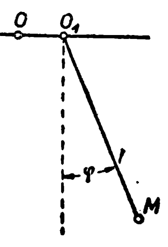
Lösung: Um 12 cm.

867. In einem Eisenbahnwagen, der sich auf einem geraden, horizontalen Gleis bewegt, führt ein Pendel kleine harmonische Schwingungen aus. Die mittlere Lage des Pendels bildet einen Winkel von 6° mit der Vertikalen.

1) Man bestimme die Beschleunigung b des Wagens.
2) Man bestimme die Differenz der Schwingungszeiten $T - T_1$ des Pendels; T, wenn sich der Wagen im Stillstand befindet; T_1 im gegebenen Fall.

Lösung: 1) $b = 103$ cm/sec², 2) $T - T_1 = 0{,}0028\,T$.

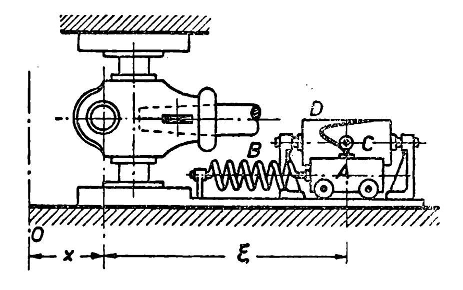
868. Der Aufhängepunkt eines Pendels der Länge l führt geradlinige horizontale harmonische Schwingungen um den unbeweglichen Punkt O aus. $OO_1 = a \sin pt$.



Man bestimme die kleinen Schwingungen des Pendels unter der Annahme, daß das Pendel zu Anfang in Ruhe war.

Lösung: $\varphi = \frac{ap^2}{l\,(k^2 - p^2)}\left[\sin\,(pt) - \frac{p}{k}\sin\,(kt)\right],\; k = \sqrt{\frac{g}{l}}.$

869. Zur Messung der Beschleunigung des Kolbens einer Dampfmaschine wird ein Gerät verwendet, das aus einem beweglichen Schlitten A und einer gleichförmig rotierenden Trommel D besteht, die am Kreuzkopf befestigt ist. Der Schlitten ist Q kg schwer und macht infolge entsprechender Führungen nur eine Translationsbewegung, bei der die Spitze des am Schlitten befestigten Bleistiftes E eine Gerade beschreibt, die parallel zur Achse des Zylinders liegt. Der Schlitten ist durch die Feder B mit dem Kreuzkopf verbunden (Federkonstante c kg/cm). Ein Uhrwerk dreht die Trommel mit der Winkelgeschwindigkeit von $\omega = \sec^{-1}$. Der Halbmesser der Trommel beträgt r cm.



Man finde die Gleichung der Kurve, die mit dem Bleistift auf dem Papierstreifen der Trommel aufgezeichnet wird. Die Bewegung des Kreuzkopfes in seiner Führung wird durch die Formel $x = a + l \cos \Omega t$ ausgedrückt. Hierbei ist a eine Konstante, die von der Wahl des Koordinatenursprunges abhängt. Ω ist die Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades der Dampfmaschine, l ist der Hub des Kolbens.

Lösung: $\xi = A \cos \sqrt{\frac{cg}{Q}}\, t + B \sin \sqrt{\frac{cg}{Q}}\, t + \frac{cl\, g}{cg - Q\,\Omega^2} \cos \Omega t;\ \eta = r\omega t,$

A und B sind Konstante, die sich aus den Anfangsbedingungen errechnen lassen.

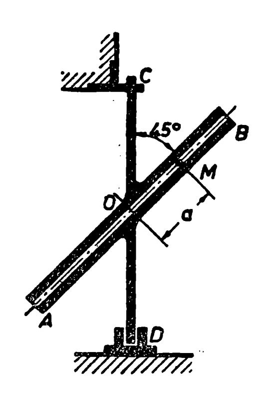
870. Ein Ring bewegt sich auf einem glatten Stab AB, der sich gleichmäßig in der horizontalen Ebene um die vertikale, durch A gehende Achse dreht (in 1 sec erfolgt eine Umdrehung). Die Länge des Stabes ist 1 m. Im Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Ring im Abstand von 60 cm von A und hat die Geschwindigkeit Null.

Man bestimme die Zeit t_1, nach welcher sich der Ring vom Stab löst.

Lösung: $t_1 = \frac{1}{2\pi} \ln 3 = 0{,}175$ sec.

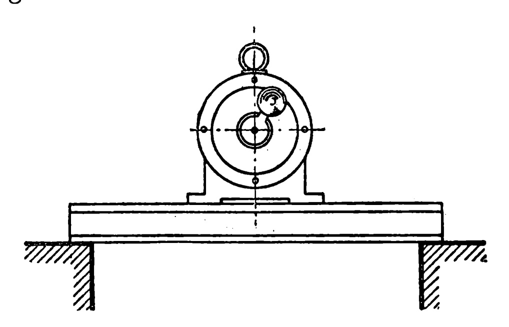
871. Das Röhrchen AB dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale Achse CD und bildet mit dieser den festen Winkel $\alpha = 45°$. Im Röhrchen befindet sich die schwere Kugel M.

Man bestimme die Bewegung dieser Kugel und beachte, daß ihre anfängliche Geschwindigkeit gleich Null und ihre ursprüngliche Entfernung vom Punkt O gleich a ist. Man vernachlässige die Reibung.



Lösung: $s = \frac{1}{2}\left(a - \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}\right)\left(e^{-\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t} + e^{\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t}\right) + \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}.$

872. Ein Elektromotor, dessen Gewicht 30 kg beträgt, steht auf einem Balken, dessen Steifigkeit $c = 300$ kg/cm ist. Auf der Welle des Motors ist im Abstand von 1,3 cm von der Wellenachse eine Masse mit einem Gewicht von 200 g angebracht. Die Winkelgeschwindigkeit des Motors beträgt $\omega = 90\ \text{sec}^{-1}$. Man bestimme die Amplitude der erzwungenen Schwingung des Motors und seine kritische Drehzahl. Die Masse des Balkens und sein Bewegungswiderstand sollen vernachlässigt werden.



Lösung: $A = 0{,}410$ mm; $n_k = 950$ U/min.

873. Ein Motor, dessen Gewicht $Q = 50$ kg beträgt, ist auf einem Balken mit der Federkonstante $c = 500$ kg/cm aufgestellt. Bei den gemeinsamen freien Schwingungen des Balkens und des Motors erwies sich die Abnahme der Amplituden zweier aufeinanderfolgender Auslenkungen aus der Ruhelage gleich $\frac{A_n}{A_{n+1}} = 10/9$. Auf der Welle des Motors befindet sich eine Unwucht vom Gewicht $p = 0{,}2$ kg in der Entfernung $r = 6$ cm von der Drehachse.

Man finde Amplitude und Phasenverschiebung der erzwungenen Schwingung des Motors. Die Drehzahl der Welle beträgt $n = \text{konst.} = 980$ U/min.

Lösung: $A = 0{,}253$ cm; $\varepsilon = 137°$.

874. Wie verändert sich die Erdbeschleunigung entlang eines Meridians infolge der Rotation der Erde um ihre Achse? Der Halbmesser der Erde beträgt $R = 6370$ km, die Erdbeschleunigung am Pol $g = 9{,}832$ m/sec².

Lösung: Vernachlässigt man wegen seiner Kleinheit das Glied mit $\frac{\omega^4}{2}$, so ist $g_1 = g\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{292}\right)$, worin g die Erdbeschleunigung am Pol und φ die geographische Breite ist.

875. Um wievielmal muß man die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation um ihre Achse vergrößern, damit ein Massenpunkt, der sich auf der Erdoberfläche am Äquator befindet, gewichtslos wird? Der Halbmesser der Erde R ist 6370 km.

Lösung: 17 mal.

876. Ein Artilleriegeschoß bewegt sich auf einer Bahn, die man annähernd als horizontale Gerade ansehen kann. Die Horizontalgeschwindigkeit des Geschosses beträgt $v_0 = 900$ m/sec. Das Geschoß soll ein 18 km entferntes Ziel treffen.

Man bestimme, um wieviel das Geschoß infolge der Rotation der Erde von dem Ziel abweichen wird. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt. Das Schießen findet in der nördlichen Breite $\varphi = 60°$ statt.

Lösung: Die Seitenabweichung erfolgt nach rechts. Ablenkung senkrecht zur Bewegungsrichtung $s = \omega v_0 t^2 \sin \varphi = 22{,}7$ m unabhängig von der Schußrichtung.

877. Ein langes Pendel besitzt eine geringe Anfangsgeschwindigkeit in der Nord-Süd-Richtung. Man finde die Zeit, nach deren Ablauf die Schwingungsebene des Pendels in die West-Ost-Richtung fällt.

Man berücksichtige die Erdrotation und sehe die Auslenkung des Pendels im Vergleich zu seiner Länge als klein an. Das Pendel befindet sich auf dem 60. nördlichen Breitengrad.

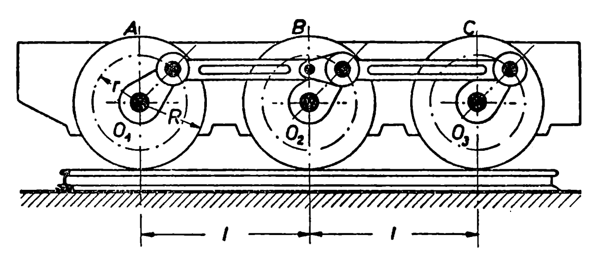
Lösung: $T = 13{,}86\ (0{,}5 + K)$ Std., wobei $K = 0, 1, 2, 3 \ldots$.

IX. Dynamik des materiellen Systems

34. Grundlagen der Kinetostatik

878. Eine Lokomotive bewegt sich auf einer geraden Strecke mit der Geschwindigkeit $v = 72$ km/h.

Man bestimme den zusätzlichen Druck, der durch die Trägheitskraft der Koppelstange ABC in ihrer niedrigsten Lage auf die Schiene ausgeübt wird. Die Koppelstange wiegt 200 kg. Ihre Masse kann als gleichförmig über ihre Länge verteilt angesehen werden. Die Länge der Kurbel beträgt $r = 0{,}3$ m und der Halbmesser der Räder $R = 1$ m. Die Räder rollen ohne Schlupf.



Lösung: 2,45 t.

879. Eine Lokomotive bewegt sich gleichförmig beschleunigt auf einer geraden horizontalen Strecke und erreicht 20 sec nach Beginn der Bewegung die Geschwindigkeit von 72 km/h.

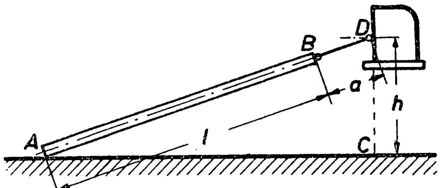
Man bestimme die Lage der freien Wasseroberfläche im Tender.

Befindet sich das Wasser bezüglich des Tenders im Gleichgewicht, so steht die Resultierende der Kräfte, die auf ein beliebiges Wasserteilchen der freien Oberfläche einwirken, senkrecht auf dieser Oberfläche.

Lösung: Die Wasseroberfläche ist unter dem Winkel $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}102 = 5° 50'$ zur Horizontalen geneigt.

880. Der Balken AB der Länge l liegt mit seinem Ende A auf dem horizontalen Boden AC auf. Das andere Ende B ist im Punkt D mit dem Seil BD der Länge a an einen Lastwagen befestigt, der sich gleichförmig beschleunigt über eine geradlinige horizontale Wegstrecke bewegt. Die Höhe CD beträgt h.

Man vernachlässige die Querabmessungen des Balkens und finde, bei welcher Beschleunigung b des Lastwagens das Seil und der Balken eine Gerade bilden.



Lösung: $b = \frac{g}{h} \sqrt{(l + a)^2 - h^2}.$

881. Mit welcher Beschleunigung muß sich ein Prisma, dessen Seitenfläche den Winkel α mit der Horizontalen bildet, über eine horizontale Fläche bewegen, damit die auf der Seitenfläche liegende Last sich in bezug auf das Prisma nicht verschiebt?

Lösung: $b = g \operatorname{tg} \alpha$.

882. Auf einem dreieckigen Prisma, dessen Seitenflächen die Winkel α und β mit der Horizontalen bilden, liegt eine homogene Kette. Die Mitte der Kette befindet sich auf der oberen Kante des Prismas C.

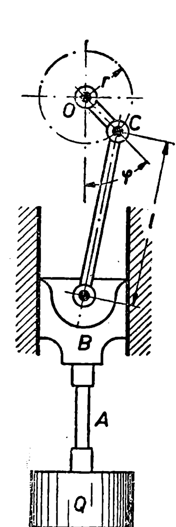
Mit welcher Beschleunigung muß man das Prisma über die horizontale Fläche bewegen, damit die Kette in bezug auf das Prisma in Ruhe bleibt?

Lösung: $b = g \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}$.

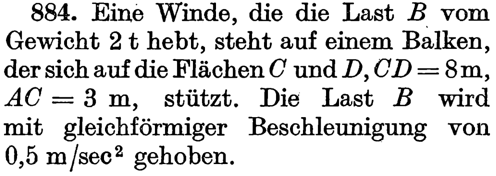
883. Zur Erforschung des Einflusses schnell aufeinanderfolgender Druck- und Zugkräfte auf einen Metallstab wird der zu prüfende Stab A mit seinem oberen Ende an den Stößel B des Kurbelmechanismus BCO befestigt. An das untere Ende wird eine Last Q angehängt.

Man finde die Kraft K, die den Stab ausdehnt. Die Kurbel OC dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die Achse O, das Gewicht der Last Q ist gleich p.

Hinweis: Der Ausdruck: $\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \varphi}$ ist in eine Reihe zu entwickeln und alle Glieder höherer Potenzen als $\left(\frac{r}{l}\right)^2$ zu vernachlässigen.

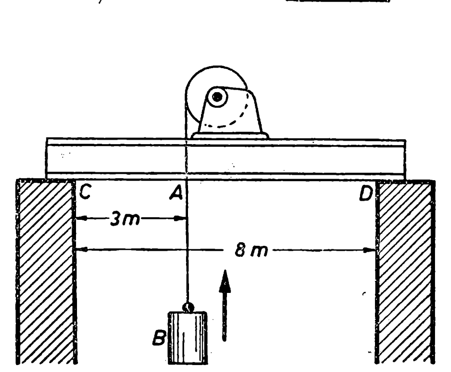


Lösung: $K = p + \frac{p}{g} r \omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2 \omega t\right)$.



884. Eine Winde, die die Last B vom Gewicht 2 t hebt, steht auf einem Balken, der sich auf die Flächen C und D, $CD = 8$ m, $AC = 3$ m, stützt. Die Last B wird mit gleichförmiger Beschleunigung von 0,5 m/sec² gehoben.

Man finde den zusätzlichen Druck auf die Stützflächen C und D, der von der Trägheitskraft der Last hervorgerufen wird.



Lösung: $P_c = 63{,}75$ kg; $P_D = 38{,}25$ kg.

885. Ein Lastkraftwagen mit einem Gewicht von 7 t befährt mit einer Geschwindigkeit von 12 km/h eine Fähre, die mit zwei parallelen Seilen an das Ufer festgebunden ist. Die Bremsen bringen den Lastkraftwagen erst nach einem Bremsweg von 3 m zum Stehen.

Man bestimme die Seilkraft und nehme dabei an, daß die Reibungskraft der Räder gegen den Boden der Fähre konstant ist. Masse und Beschleunigung der Fähre sind zu vernachlässigen.

Lösung: $T = 0{,}66$ t.

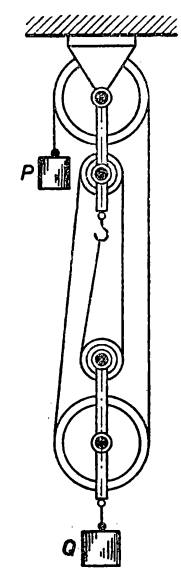
886. Ein Automobil vom Gewicht P bewegt sich geradlinig mit der Beschleunigung $\ddot{x}$. Man bestimme den vertikalen Druck der Vorder- und Hinterräder des Autos. Sein Schwerpunkt C befindet sich auf der Höhe h über der Bodenoberfläche. Die Abstände der Vorder- und Hinterachsen des Autos von der Vertikalen, die durch den Schwerpunkt geht, sind gleich a bzw. b. Die Trägheitsmomente der Räder sind zu vernachlässigen.

Wie muß sich das Auto bewegen, damit der Druck der Vorderräder gleich dem Druck der Hinterräder ist?

Lösung: $N_1 = \frac{P\,(gb - \ddot{x}h)}{g\,(a+b)}; \quad N_2 = \frac{P\,(ga + \ddot{x}h)}{g\,(a+b)}.$

Um gleichen Achsendruck zu erhalten, muß das Auto mit einer Verzögerung von $\ddot{x} = g\,\frac{a-b}{2\,h}$ bremsen.

887. Mit welcher Beschleunigung b senkt sich eine Last vom Gewicht P, wenn sie dabei die Last vom Gewicht Q mit dem Flaschenzug, der aus der Zeichnung zu ersehen ist, hebt? Wie lautet die Voraussetzung für eine gleichförmige Bewegung der Last P? Die Massen der Rollen und Stäbe sind zu vernachlässigen. Die Beschleunigung der Last Q ist viermal kleiner als die Beschleunigung der Last P.



Lösung: $b = 4\,g\,\frac{4\,P - Q}{16\,P + Q}; \quad \frac{P}{Q} = \frac{1}{4}.$

888. Ein glatter Keil mit dem Gewicht P und dem Winkel $2\,\alpha$ schiebt am Scheitel A zwei Platten vom Gewicht P_1 auseinander. Die Platten liegen im Ruhezustand auf einem glatten horizontalen Tisch.

Man finde die Gleichung der Bewegung des Keils und der Platten und bestimme die Kraft des Keils auf jede Platte.

Lösung: Die Gleichung der Bewegung des Keils ist

$$s = \frac{bt^2}{2}, \text{ wobei } b = g\,\frac{P \operatorname{ctg} \alpha}{P \operatorname{ctg} \alpha + 2P_1 \operatorname{tg} \alpha};$$

die Gleichung der Bewegung der Platten ist

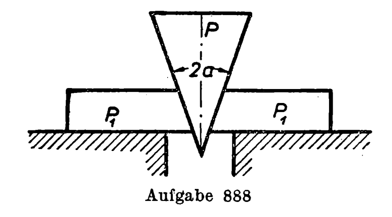
$$s_1 = \frac{b_1 t^2}{2}, \text{ wobei } b_1 = g\,\frac{P}{P \operatorname{ctg} \alpha + 2P_1 \operatorname{tg} \alpha};$$

Normalkraft jeder Platte $N = \dfrac{PP_1}{(P \operatorname{ctg} \alpha + 2P_1 \operatorname{tg} \alpha) \cos \alpha}$.

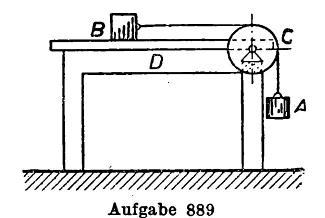
889. Die Last A vom Gewicht P_1 wird an einem gewichtslosen und undehnbaren Faden, der über die feste Rolle C läuft, herabgelassen und bewegt dabei eine Last B vom Gewicht P_2.

Man bestimme die Kraft des Tisches D auf den Fußboden. Das Gewicht des Tisches beträgt P_3.

Lösung: $N = P_1 + P_2 + P_3 - \dfrac{P_1^2}{P_1 + P_2}$.



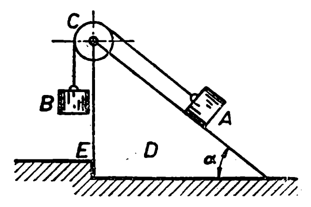
Aufgabe 888



Aufgabe 889

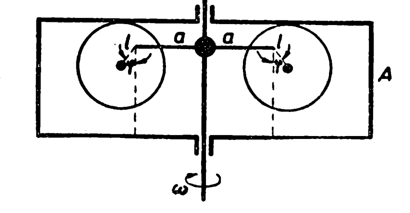
890. Eine Last A vom Gewicht P_1 bringt bei ihrer Abwärtsbewegung auf der schiefen Ebene D, die den Winkel α mit der Horizontalen bildet, durch einen gewichtslosen und undehnbaren Faden, der über die feste Rolle C läuft, die Last B vom Gewicht P_2 in Bewegung.

Man bestimme die Horizontalkomponente der Auflagerkraft der schiefen Ebene D auf den Ansatz E des Fußbodens.



Lösung: $N = P_1\,\dfrac{P_1 \sin \alpha - P_2}{P_1 + P_2} \cos \alpha$.

891. Ein Regler besteht aus zwei zylindrischen Scheiben vom Gewicht P_1, die im Abstand a von der Achse des Reglers exzentrisch aufgehängt sind. Der Regler dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Die Abstände der Scheibenmittelpunkte von der Aufhängung betragen l. Auf den Scheiben liegt die P_2 schwere Kapsel A des Reglers, die mit dem Reguliermechanismus verbunden ist.



Man bestimme die Abhängigkeit zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω und dem Winkel φ, den die Scheiben mit der Vertikalen bilden. Die Reibung werde vernachlässigt.

Lösung: $\omega^2 = g \dfrac{2P_1 + P_2}{2P_1\,(a + l \sin\varphi)} \operatorname{tg}\varphi.$

892. Um bei einem Schiff Schlingerbewegungen zu mindern, werden drei Stabilisatoren eingebaut. Jeder hat als Hauptteil ein 110 t schweres Schwungrad, das mit 910 U/min umläuft.

Man berechne die Größe des zusätzlichen Lagerdruckes, der durch eine Verschiebung des Schwungradschwerpunktes um 1,08 mm aus der Drehachse verursacht wird. Diese Schwerpunktsverschiebung entsteht durch Materialfehler und ungenaue Bearbeitung des Schwungrades.

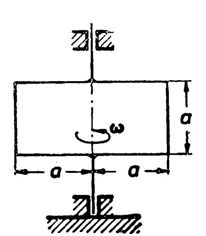
Lösung: Der Druck beträgt $N = 109{,}7$ t. Er wirkt auf der Geraden, die durch die Drehachse und den Schwerpunkt geht.

893. Ein homogener Stab OA vom Gewicht P und der Länge l dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine vertikale Achse, die senkrecht zum Stab steht.

Man bestimme die Zugkraft, die in einem Querschnitt des Stabes herrscht der die Entfernung a von der Drehachse hat.

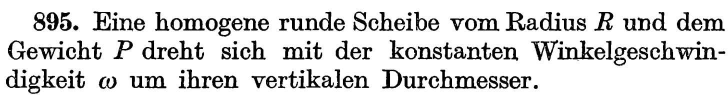
Lösung: $F = \dfrac{P\,(l^2 - a^2)\,\omega^2}{2\,gl}.$

894. Eine homogene rechtwinklige Platte vom Gewicht P dreht sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine vertikale Achse.

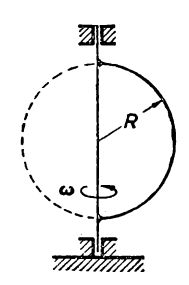


Welche Kraft wirkt dabei im Schnitt längs der Drehachse?

Lösung: $\dfrac{Pa\,\omega^2}{4\,g}.$



895. Eine homogene runde Scheibe vom Radius R und dem Gewicht P dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um ihren vertikalen Durchmesser.



Man bestimme die Kraft, die die Scheibe im Schnitt längs der Drehachse zu zerstören sucht.

Lösung: $\dfrac{2\,PR\,\omega^2}{3\,\pi\,g}.$

896. Welches Gewicht hat eine runde homogene Scheibe vom Radius 20 cm, die sich nach dem Gesetz $\varphi = 3t^2$ um eine Achse dreht? Die Achse geht durch den Mittelpunkt der Scheibe senkrecht zu ihrer Fläche. Durch die Trägheit der Scheibe wirkt entgegen der Bewegung ein Moment von 4 cmkg.

Lösung: 3,27 kg.

897. Ein dünner gerader homogener Stab von der Länge l und dem Gewicht P dreht sich nach dem Gesetz $\varphi = at^2$ um eine Achse, die senkrecht zum Stab durch ein Stabende geht.

Man finde Größe, Richtung und Angriffspunkt der Resultierenden der Zentrifugal- und Tangentialkräfte. Die Resultierenden F und T setzen sich aus den am Stabelement angreifenden Kräften zusammen.

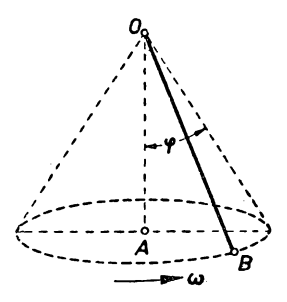
Lösung: Die Resultierende der Tangentialkräfte $T = \frac{Pal}{g}$ ist senkrecht zum Stab gerichtet und greift in der Entfernung $\frac{2}{3}\,l$ von der Drehachse aus an. Die Resultierende der Zentrifugalkräfte ist $F = \frac{2\,Pa^2\,lt^2}{g}$, sie wirkt entlang der Stabachse.

898. Man löse die Aufgabe 884 unter Berücksichtigung der Trommelträgheit der Winde. Der Radius der Trommel beträgt $r = 50$ cm, das Trägheitsmoment in bezug auf die Drehachse ist 0,8 kgmsec².

Lösung: 63,85 kg; 38,15 kg.

899. Ein dünner gerader homogener Stab von der Länge l und dem Gewicht P dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um den festen Punkt O (Kugelgelenk). Er beschreibt dabei eine Kegelfläche mit der Achse OA und dem Scheitel im Punkte O.

Man berechne den Winkel der Stabneigung zur Achse OA und die Größe N des Gelenkdruckes in O.

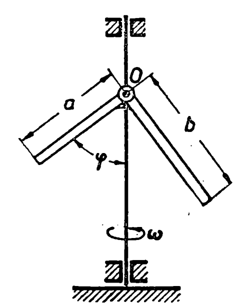


Lösung: $\varphi = \arccos \frac{3\,g}{2\,l\,\omega^2}$;

$$N = \frac{1}{2}\,\frac{P}{g}\,l\,\omega^2 \sqrt{1 + \frac{7\,g^2}{4\,l^2\,\omega^4}}.$$

900. Zwei dünne homogene gerade Stäbe der Länge a und b sind rechtwinklig fest verbunden. Der Scheitel des Winkels trägt ein Gelenk, das an einer vertikalen Welle befestigt ist. Die Welle dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω.

Man finde ω als Funktion des Ausschlagwinkels φ, der zwischen dem Stab der Länge a und der Vertikalen gemessen wird.



Lösung: $\omega^2 = 3\,g\,\frac{b^2 \cos\varphi - a^2 \sin\varphi}{(b^3 - a^3)\sin 2\,\varphi}$.

901. Ein dünner homogener gerader Stab AB ist durch eine Gelenkverbindung mit einer vertikalen Welle im Punkt O verbunden. Die Welle dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω.

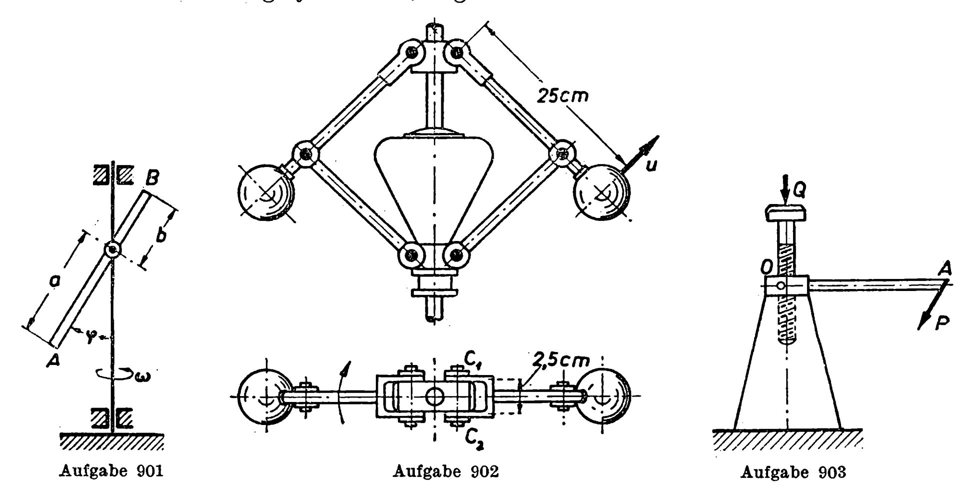
Man bestimme den Winkel φ der Neigung des Stabes zur Vertikalen, wenn $OA = a$ und $OB = b$ ist.

Lösung: $\cos\varphi = \frac{3}{2}\,\frac{g}{\omega^2}\,\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}.$

902. Das Pendel eines Zentrifugalreglers macht 180 U/min. Infolge einer Belastungsschwankung der Maschine werden die Kugeln mit der relativen Geschwindigkeit $u = 0{,}2$ m/sec angehoben (siehe Zeichnung). Das Gewicht jeder Kugel beträgt 10 kg. Das Gewicht der Arme werde vernachlässigt.

Man berechne den zusätzlichen Druck auf die Lager C_1 und C_2 (siehe Zeichnung), der durch die Coriolis-Beschleunigung hervorgerufen wird. Dabei soll der Winkel, den der Arm mit der Achse des Reglers bildet, gleich 45° gesetzt und die Zahl der Umdrehungen als unveränderlich angesehen werden. Die Abmessungen sind aus der Zeichnung zu entnehmen, auf der die Ansicht des Reglers von der Seite und von oben angegeben ist.

Lösung: Der Druck auf die Lager ist nach entgegengesetzten Seiten gerichtet und beträgt jeweils 54,2 kg.



Aufgabe 901 Aufgabe 902 Aufgabe 903

35. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen

903. Die Last Q wird durch eine Wagenwinde gehoben, die durch den Handgriff von $OA = 0{,}6$ m Länge in Gang gesetzt wird. An dem Ende des Handgriffs, senkrecht zu ihm, wirkt die Kraft $P = 16$ kg.

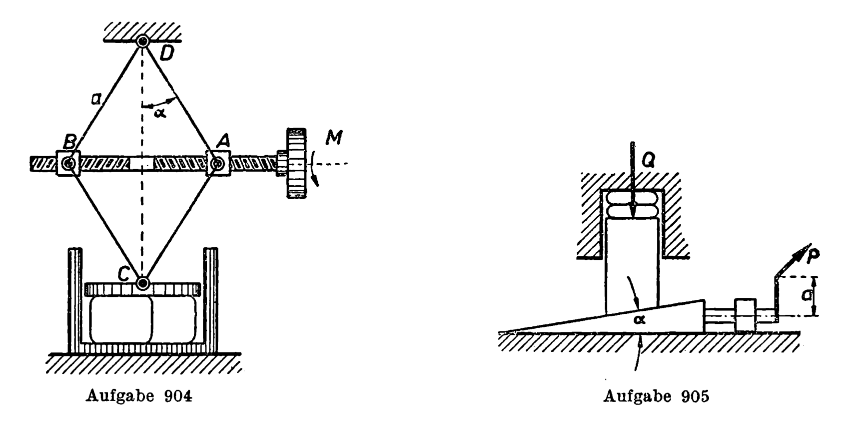
Man bestimme die Größe der Last Q. Die Steigung der Wagenwinde ist $h = 12$ mm.

Lösung: $Q = 5020$ kg.

904. Das Kräftepaar mit dem Moment M wirkt auf das Handrad einer Kniehebelpresse. Die Achse des Handrads hat an den Enden Schraubengewinde der Steigung h in entgegengesetzten Richtungen und geht durch zwei Muttern, die an den Scheiteln eines Stabrhombus mit der Seite a beweglich befestigt sind. Der obere Scheitel des Rhombus ist unbeweglich befestigt, der untere bewegt sich mit der horizontalen Platte der Presse.

Man bestimme die Druckkraft P der Presse auf den zusammenzupressenden Gegenstand. Der Winkel am Scheitel des Rhombus ist 2α.

Lösung: $P = \pi \frac{M}{h} \operatorname{ctg} \alpha$.



Aufgabe 904

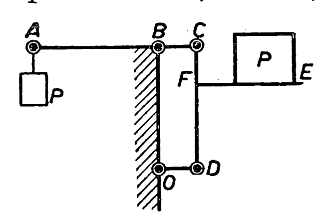
Aufgabe 905

905. Man bestimme die Abhängigkeit zwischen den Kräften P und Q in einer Keilpresse. Die Kraft P wirkt senkrecht zur Achse der Schraube und des Handgriffes. Seine Länge ist a. Die Schraubensteigung ist h und der Winkel am Scheitel des Keils α.

Lösung: $Q = P \frac{2\pi a}{h \operatorname{tg} \alpha}$.

906. An dem ungleicharmigen Hebel ABC mit dem unbeweglichen Punkt B hängt an dem Gelenk C die Hebebühne $CFDE$, die durch das Gelenk D mit dem Stab OD verbunden ist. Dieser kann sich frei um den Festpunkt O bewegen.

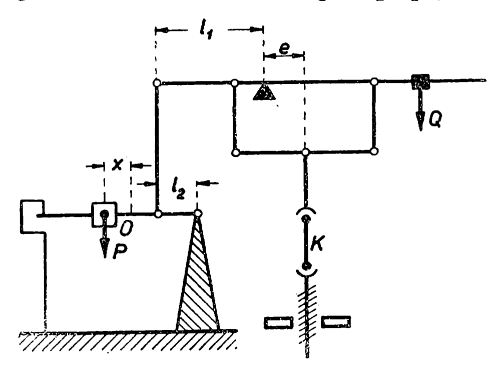
Welches Gewicht p muß im Punkt A angehängt werden, um die auf der Hebebühne liegende Last $P = 100$ kg im Gleichgewicht zu halten? Die Gerade CD ist vertikal, OD ist gerade und parallel zu BC, $BC = 0{,}1\ AB$.



Lösung: $p = 10$ kg.

907. Die Zeichnung stellt das Schema einer Maschine zur Prüfung der Zugfestigkeit von Probestäben K dar.

Man bestimme die Abhängigkeit zwischen der Spannkraft X des Probestabes und dem Abstand x der Last P von ihrer Nullage O. Die Last Q ist so angeordnet, daß bei Nullage der Last P und Fehlen des Probestabes alle Hebel horizontal sind. Gegeben sind die Entfernungen l_1, l_2 und e.



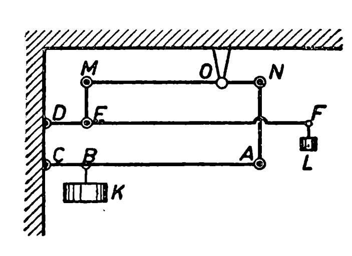
Lösung: $X = P\dfrac{xl_1}{el_2}$.

908. Die Lasten K und L, die durch das auf der Zeichnung abgebildete Hebelsystem verbunden sind, befinden sich im Gleichgewicht.

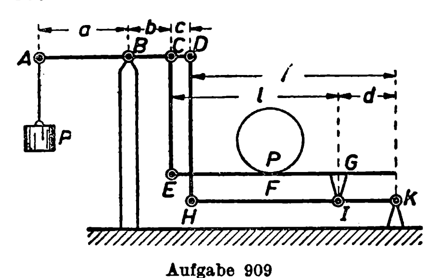
Man bestimme die Abhängigkeit zwischen den Lasten nach folgenden Angaben:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{1}{10}, \qquad \frac{ON}{OM} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{DE}{DF} = \frac{1}{10}.$$

Lösung: $P_L = \dfrac{BC}{AC} \cdot \dfrac{ON}{OM} \cdot \dfrac{DE}{DF} \cdot P_K = \dfrac{1}{300} \cdot P_K$.



Aufgabe 908



Aufgabe 909

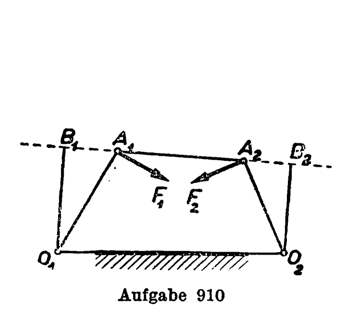
909. Auf einer Waage befindet sich im Punkt F die Last P. Die Längen betragen: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $IK = d$. Die Länge der Waagenplattform ist $EG = l$. Man bestimme das gegenseitige Verhältnis zwischen den Längen b, c, d und l, bei welchem das Gewicht p, das die Last P im Gleichgewicht hält, nicht von ihrer Lage auf der Waage abhängt und finde die Größe des Gewichtes p im gegebenen Fall.

Lösung: $\dfrac{b + c}{b} = \dfrac{l}{d}$; $\quad p = \dfrac{b}{a} \cdot P$.

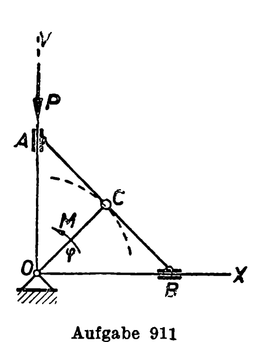
910. An den Gelenken A_1 und A_2 des beweglichen viergliedrigen Mechanismus $O_1A_1A_2O_2$ wirken senkrecht zu den Stäben O_1A_1 bzw. O_2A_2 die Kräfte F_1 bzw. F_2. Der viergliedrige Mechanismus befindet sich im Gleichgewicht.

Man finde die Abhängigkeit zwischen den Momenten der Kräfte F_1 und F_2 und der kürzesten Entfernung von den Drehachsen O_1 und O_2 bis zum Stab A_1A_2.

Lösung: $F_1 \cdot O_1A_1 \cdot O_2B_2 = F_2 \cdot O_2A_2 \cdot O_1B_1$.



Aufgabe 910



Aufgabe 911

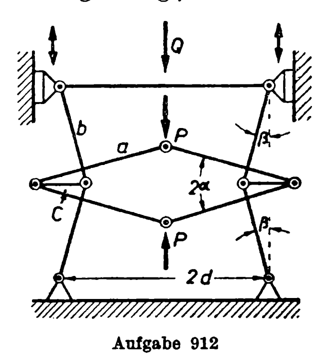
911. Die Kraft P wirkt auf die Muffe A längs ihrer Führung, d. h. in Richtung auf den Drehpunkt O des Ellipsenzirkels.

Welches Drehmoment muß der Kurbel OC erteilt werden, damit der Mechanismus in der Lage, in der die Kurbel OC mit der Achse Ox den Winkel φ bildet, im Gleichgewicht ist? Der Mechanismus liegt in einer horizontalen Ebene. Gegeben sind $OC = AC = CB = l$.

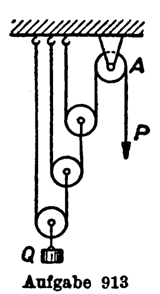
Lösung: $M = 2\,Pl \cos\varphi$.

912. Man finde das gegenseitige Verhältnis zwischen den Kräften P und Q für die auf der Zeichnung ersichtliche Presse.

Lösung: $Q = P \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta$.



Aufgabe 912



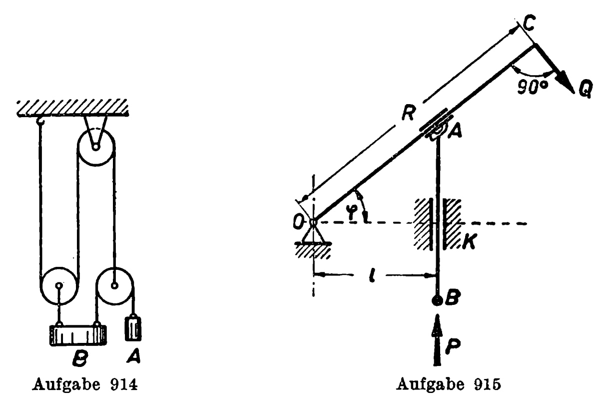
Aufgabe 913

913. Ein Flaschenzug besteht aus der festen Rolle A und n losen Rollen. Man bestimme im Falle des Gleichgewichtes die Beziehung zwischen der zu hebenden Last Q zu der Kraft P, die am Ende des von der festen Rolle A herunterhängenden Seiles angreift.

Lösung: $Q = P \cdot 2^n$.

914. Man finde die Beziehung zwischen den Gewichten A und B, die an dem auf der Zeichnung ersichtlichen Rollensystem aufgehängt sind. Das System befindet sich im Gleichgewicht.

Lösung: $P_B = 5\,P_A$; die Kräfte in den beiden Aufhängeseilen des Gewichtes B verhalten sich wie 4:1.



Aufgabe 914 Aufgabe 915

915. Beim Schwenken der Kurbel OC um die horizontale Achse O eines Kulissenmechanismus setzt die Muffe A bei ihrer Bewegung längs der Kurbel OC den sich in der vertikalen Führung K bewegenden Stab AB in Gang. Gegeben sind die Abmessungen $OC = R$, $OK = l$.

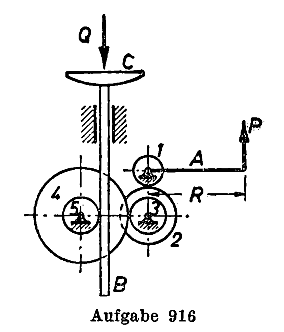
Welche Kraft Q muß senkrecht zu der Kurbel OC im Punkt C wirken, um die längs des Stabes AB nach aufwärts gerichtete Kraft P im Gleichgewicht zu halten?

Lösung: $Q = \frac{Pl}{R\cos^2\varphi}$.

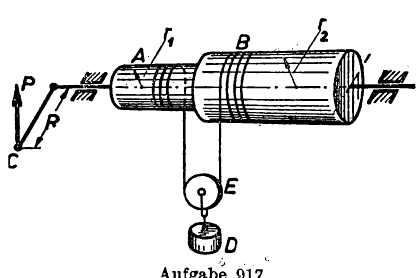
916. Im Mechanismus einer Wagenwinde drehen sich die Zahnräder 1, 2, 3, 4 und 5, die die Zahnstange B der Wagenwinde in Gang setzen, bei der Drehung des Handgriffes A der Länge R.

Welche Kraft muß an dem Ende des Handgriffes senkrecht zu ihm wirken, damit die Platte C bei Gleichgewicht der Wagenwinde einen Druck von 480 kg überträgt? Die Halbmesser der Zahnräder betragen $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 12$ cm, $r_3 = 4$ cm, $r_4 = 16$ cm, $r_5 = 3$ cm, die Länge des Handgriffes ist $R = 18$ cm.

Lösung: $P = Q\frac{r_1\,r_3\,r_5}{r_2\,r_4\,R} = 5$ kg.



Aufgabe 916



Aufgabe 917

917. Eine Differentialwinde besteht aus zwei fest verbundenen Wellen A und B, die durch den Handgriff C von der Länge R gedreht werden. Die zu hebende Last D vom Gewicht Q ist an der beweglichen Rolle E befestigt. Bei einer Drehung des Handgriffs C wickelt sich der linke Zweig des Seils von der Welle A mit dem Halbmesser r_1 ab, während sich der rechte auf die Welle B mit dem Halbmesser r_2 $(r_2 > r_1)$ aufwickelt.

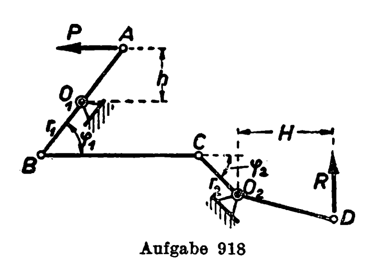
Welche Kraft P muß am Ende des Handgriffes senkrecht zu ihm wirken, um die Last D im Gleichgewicht zu halten, wenn $Q = 720$ kg, $r_1 = 12$ cm, $r_2 = 10$ cm und $R = 60$ cm ist?

Lösung: $P = Q \frac{r_2 - r_1}{2R} = 12$ kg.

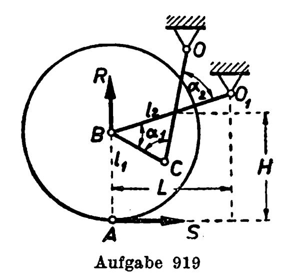
918. Der Mechanismus des Hinterrades eines Pfluges besteht aus zwei Hebeln, dem geraden Hebel AB und dem gebogenen CD, die sich um die feststehenden Gelenke O_1 und O_2 drehen. Die Enden dieser Stäbe B und C sind durch die Koppelstange BC, die mit ihnen in der auf der Zeichnung ersichtlichen Lage die Winkel φ_1 und φ_2 bildet, beweglich verbunden. In dieser Lage des Mechanismus ist die Höhe des Punktes A über O_1 gleich h und der horizontale Abstand zwischen den Punkten D und O_2 gleich H. Die horizontale Kraft P greift im Punkt A, die vertikale Kraft R im Punkt D an, $O_1B = r_1$; $O_2C = r_2$.

Man finde das gegenseitige Verhältnis zwischen den Kräften P und R, bei dem sich der Mechanismus im Gleichgewicht befindet. Die Komponenten der möglichen Verschiebungen der Enden B und C der Koppelstange in ihrer eigenen Richtung sind einander gleich.

Lösung: $P = R \frac{H r_1 \sin \varphi_1}{b r_2 \sin \varphi_2}$.



Aufgabe 918



Aufgabe 919

919. Der Hubmechanismus des Feldrades eines Pfluges besteht aus dem beweglichen viergliedrigen Gestänge $OCBO_1$. Dem Gelenk B dieses Gestänges wird die vertikale Kraft R erteilt. Das Glied BC ist mit der Scheibe, deren Mittelpunkt sich in B befindet, fest verbunden. Im Punkt A wirkt auf die Scheibe tangential die horizontale Kraft S ein. Die Längen der Stäbe sind $BC = l_1$, $BO_1 = l_2$. Die anderen Werte sind auf der Zeichnung angegeben (H, L, α_1, α_2). Das Gewicht der Stäbe und der Scheibe sowie die Reibung in den Gelenken werden vernachlässigt. Man bestimme die gegenseitige Beziehung zwischen den Kräften R und S in der auf der Zeichnung ersichtlichen Gleichgewichtslage.

Lösung: $S = R \frac{L l_1 \sin \alpha_1}{H l_2 \sin \alpha_2}$.

920. Man finde die Lasten P_1 und P_2, die durch die Last P auf zwei zur Horizontalen unter den Winkeln α und β geneigten Ebenen im Gleichgewicht gehalten werden.

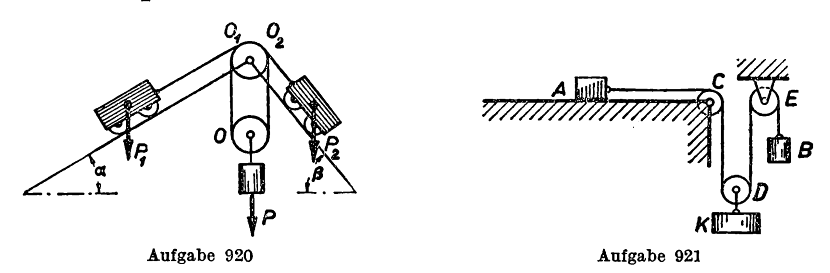
Die Lasten P_1 und P_2 sind an einem Seil befestigt, das von der Last P_1 über die Rolle O_1 zur Rolle O führt, welche die Last P trägt. Dann führt das Seil über die Rolle O_2 (auf der Achse O_1 beweglich angeordnet) zur Last P_2. Die Reibung sowie die Massen der Rollen und des Seiles sind zu vernachlässigen.

Lösung: $P_1 = \frac{P}{2 \sin \alpha}$, $P_2 = \frac{P}{2 \sin \beta}$.

921. An den Enden eines gewichtslosen und dehnungslosen Fadens sind die Lasten A und B von gleichem Gewicht angebunden. Der Faden verläuft von der Last A parallel zur horizontalen Ebene über die Rolle C abwärts zur Rolle D und von hier über die Rolle E. Das andere Ende trägt die Last B. An der beweglichen Rolle D hängt eine Last K mit dem Gewicht Q.

Man bestimme das Gewicht P der Lasten A und B und den Koeffizienten der gleitenden Reibung μ der Last A gegen die horizontale Fläche, wenn sich mit den angegebenen Werten die Anordnung im Gleichgewicht befindet.

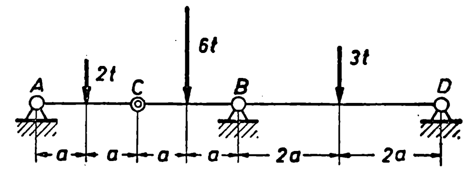
Lösung: $P = \frac{Q}{2}$, $\mu = 1$.



Aufgabe 920 Aufgabe 921

922. Der Gerberträger AD ruht auf drei Stützen und besteht aus zwei im Punkt C gelenkig verbundenen Balken. Drei Kräfte (2 t; 6 t; 3 t) wirken vertikal auf den Balken ein. Die Abmessungen sind auf der Zeichnung angegeben.

Man bestimme die Auflagerreaktionen in A, B und C.



Lösung: $R_A = 1\,t$, $R_B = 10{,}5\,\text{t}$, $R_D = -0{,}5\,\text{t}$.

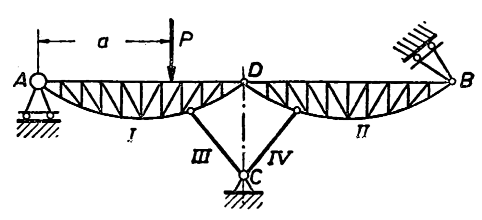
923. Man bestimme das Moment eines Kräftepaares, das auf der Strecke BD dem Balken AD der vorherige Aufgabe erteilt werden muß, damit die Auflagerreaktion in D gleich Null ist.

Lösung: Das Kräftepaar wirkt im Uhrzeigersinn mit $2\,a$ tm.

924. Zwei Tragwerke I und II sind durch das Gelenk D miteinander verbunden und durch die Stäbe III und IV über das Gelenk C am Boden befestigt. In den Punkten A und B sind Rollenlager angebracht. Der Träger I ist mit der vertikalen Kraft P im Abstand a von der Stütze A belastet.

Man finde die Reaktion des Rollenlagers B.

Hinweis: Man bestimme zuvor die Lage der momentanen Drehpole C_1 und C_2 der Träger I und II.



Lösung: $R_B = P \dfrac{a\, DC_2}{b\, DC_1}$,

worin b der Reaktionsarm von R_B in bezug auf den Drehpol C_2 ist. Die Wirkungslinie von R_B ist senkrecht zu der Gleitfläche des Rollenlagers B von links oben nach rechts unten gerichtet.

36. Allgemeine Gleichungen der Dynamik

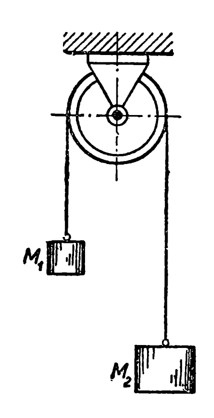
925. Drei gleiche Lasten vom Gewicht P sind durch einen gewichtslosen undehnbaren Faden verbunden, der über die feststehende Rolle A geführt wird. Zwei Lasten liegen auf einer glatten horizontalen Fläche, während die dritte Last vertikal aufgehängt ist.

Man bestimme die Beschleunigung des Systems und die Fadenkraft T im Schnitt a — b.

Lösung: $b = \dfrac{g}{3}$; $T = \dfrac{P}{3}$.

926. Ein biegsames dehnungsloses Seil wird über eine Rolle geführt. An den Enden des Seiles sind folgende Lasten befestigt: M_1 vom Gewicht P_1 und M_2 vom Gewicht P_2, wobei $P_2 > P_1$.

Man finde die Beschleunigung und die Seilkraft. Die Massen der Rolle und des Seiles sind zu vernachlässigen.



Lösung: $b = g \dfrac{P_2 - P_1}{P_1 + P_2}$; $T = \dfrac{2 P_1 P_2}{P_1 + P_2}$.

927. Unter den Voraussetzungen der Aufgabe 926 bestimme man die Beschleunigung b der Lasten und die Seilkräfte T_1 und T_2. Das Gewicht der Rolle ist in Betracht zu ziehen und sei P. Hierbei soll angenommen werden, daß die Masse gleichförmig über dem Umfang verteilt ist.

Lösung: $b = g\dfrac{P_2 - P_1}{P_1 + P_2 + P}$; $T_1 = \dfrac{P_1(2P_2 + P)}{P_1 + P_2 + P}$; $T_2 = \dfrac{P_2(2P_1 + P)}{P_1 + P_2 + P}$.

928. Zwei Lasten M_1 vom Gewicht P_1 und M_2 vom Gewicht P_2 hängen an zwei biegsamen dehnungslosen Seilen. Wie aus der Zeichnung ersichtlich ist, sind diese auf Trommeln aufgerollt, welche die Halbmesser r_1 und r_2 haben und auf einer gemeinsamen Achse montiert sind. Die Lasten bewegen sich unter der Einwirkung der Schwerkraft.

Man bestimme die Winkelbeschleunigung der Trommeln. Die Massen der Trommeln und der Seile sind zu vernachlässigen.

Lösung: $\varepsilon = g\dfrac{P_2 r_2 - P_1 r_1}{P_1 r_1^2 + P_2 r_2^2}$.

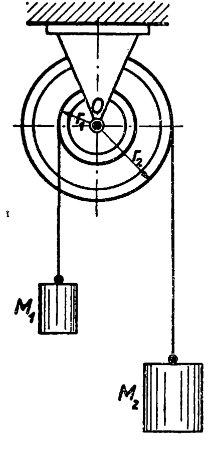
929. Unter den Voraussetzungen der Aufgabe 928 bestimme man die Winkelbeschleunigung ε und die Seilkräfte T_1 und T_2. Folgende Zahlenwerte sind zugrunde zu legen: $P_1 = 20$ kg, $P_2 = 34$ kg, $r_1 = 5$ cm, $r_2 = 10$ cm. Die kleine Trommel wiegt 4 kg, die große 8 kg. Die Massen der Trommeln werden als gleichförmig über ihre äußeren Mantelflächen verteilt angesehen.

Lösung: $\varepsilon = 49\,\text{sec}^{-2}$; $T_1 = 25$ kg; $T_2 = 17$ kg.

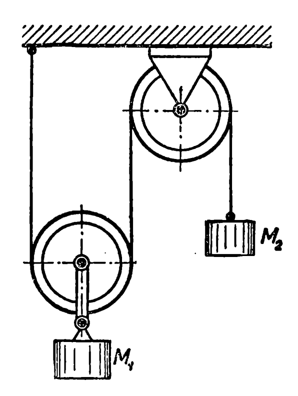
930. An dem Rollensystem, das auf der Zeichnung ersichtlich ist, hängen Lasten M_1 mit dem Gewicht von 10 kg und M_2 mit dem Gewicht von 8 kg.

Man bestimme die Beschleunigung b_2 der Last M_2 und die Seilkraft T. Die Massen der Rollen sollen vernachlässigt werden. Das Verhältnis der Beschleunigungen der Lasten M_1 und M_2 ist $\dfrac{b_1}{b_2} = 0{,}5$.

Lösung: $b_2 = 2{,}8\,\text{m/sec}^2$; $T = 5{,}7$ kg.



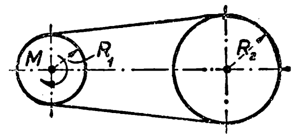
Aufgabe 928



Aufgabe 930

931. Zwei Riemenscheiben mit den Halbmessern R_1 und R_2 und dem Gewicht P_1 und P_2 sind durch einen endlosen Riemen verbunden und drehen sich um parallele feste Achsen.

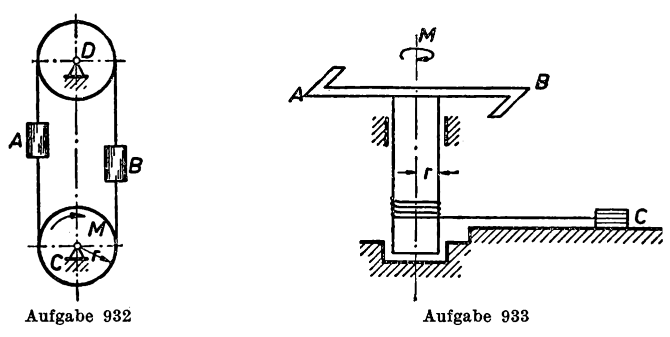
Man finde die Winkelbeschleunigung der ersten Scheibe, wenn ein Drehmoment M auf diese Scheibe einwirkt. Die Massen der Scheiben werden als gleichförmig über ihre Mantelflächen verteilt angenommen. Die Reibung an den Achsen, der Schlupf und die Masse des Riemens sind zu vernachlässigen.



Lösung: $\varepsilon_1 = \dfrac{Mg}{(P_1 + P_2) R_1^2}$.

932. Der unteren Riemenscheibe C eines Aufzugs wird das Drehmoment M erteilt. Man bestimme die Beschleunigung der aufwärtsbewegten Last A vom Gewicht P_1. Das Gewicht der Gegenlast B ist gleich P_2. Die Scheiben C und D stellen homogene Kreiszylinder mit dem Halbmesser r und dem Gewicht Q dar. Man vernachlässige die Masse des Riemens.

Lösung: $b = g \dfrac{M + (P_2 - P_1) r}{(P_1 + P_2 + Q) r}$.



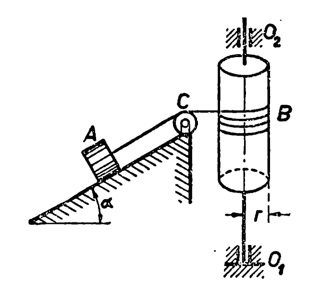
Aufgabe 932 Aufgabe 933

933. Die Welle eines Gangspills mit dem Halbmesser r wird durch das konstante Drehmoment M in Gang gesetzt, das durch den Handgriff AB eingeleitet wird. Man bestimme die Beschleunigung der Last C vom Gewicht P. Der Reibungskoeffizient der Last gegen die horizontale Fläche ist gleich μ.

Lösung: $b = g \dfrac{M - \mu Pr}{Pr}$.

934. Die Last A mit dem Gewicht P, die sich auf einer glatten unter dem Winkel α zur Horizontalen geneigten schiefen Ebene abwärts bewegt, treibt durch ein gewichts- und dehnungsloses Seil die Trommel B vom Gewicht Q und vom Radius r zu einer rotierenden Bewegung an.

Man bestimme die Winkelbeschleunigung der Trommel. Diese wird als homogener Kreiszylinder angesehen. Man vernachlässige die Masse der festen Rolle C.

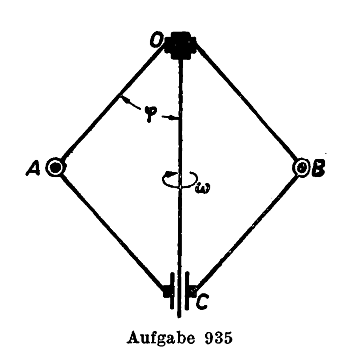


Lösung: $\varepsilon = \dfrac{2P \sin \alpha \cdot g}{r(2P + Q)}$.

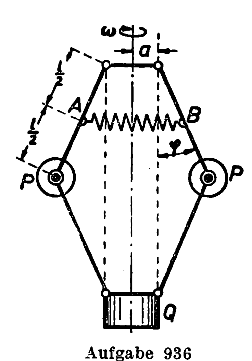
935. Ein Zentrifugalregler dreht sich um eine vertikale Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω.

Man bestimme den Neigungswinkel der Stangen OA und OB gegenüber der Vertikalen. Das Gewicht p jeder Kugel und das Gewicht p_1 der Muffe C ist bekannt. Alle Stäbe haben die gleiche Länge l.

Lösung: $\cos\varphi = \frac{(p + p_1)\,g}{p l \omega^2}$.



Aufgabe 935



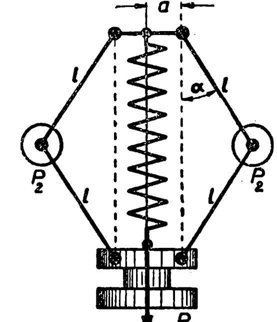
Aufgabe 936

936. Man finde für die Gleichgewichtslage die Beziehung zwischen der Winkelgeschwindigkeit eines Reglers und dem Winkel φ. Die Längen der Reglerarme sind l, das Gewicht jeder Kugel beträgt P kg, das Gewicht der Muffe Q kg und die Federkonstante ist c kg/cm. Bei $\varphi = 0$ ist die Feder spannungslos. Die Feder ist in den Punkten A und B befestigt (vgl. Abb.). Die Aufhängung der Reglerarme befinden sich im Abstand a von der Reglerachse.

$$\textit{Lösung:}\quad \omega^2 = g\,\frac{\left(P + Q + \frac{cl}{2}\cos\varphi\right)\operatorname{tg}\varphi}{P\,(a + l\sin\varphi)}.$$

937. Ein Zentrifugalregler dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω.

Man finde die Beziehung zwischen der Winkelgeschwindigkeit und dem Winkel α der Neigung seiner Stäbe zur Vertikalen. Die Muffe vom Gewicht P_1 kg wird durch eine Feder mit der Federkonstanten c kg/cm nach unten gedrückt. Diese Feder ist bei $\alpha = 0$ spannungslos. Sie ist an dem oberen Ende der Reglerachse befestigt. Das Gewicht der Kugeln beträgt P_2 kg, die Länge der Stäbe l cm. Die Aufhängung der Stäbe befindet sich im Abstand a cm von der Reglerachse. Man vernachlässige die Gewichte der Stäbe und der Feder.

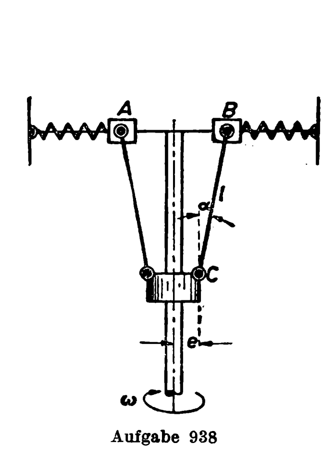


$$\textit{Lösung:}\quad \omega^2 = g\,\frac{P_1 + P_2 + 2lc\,(1 - \cos\alpha)}{P_2\,(a + l\sin\alpha)}\operatorname{tg}\alpha.$$

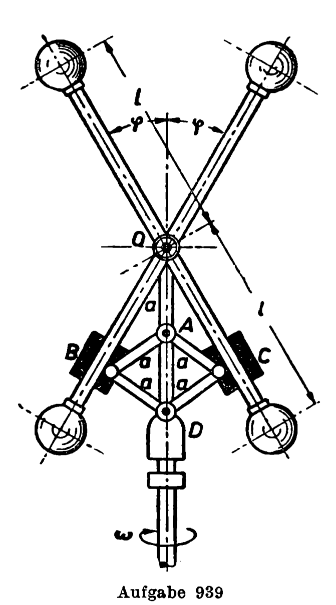
938. Ein Zentrifugal-Federregler besteht aus zwei Massen A und B mit den Gewichten von $P_A = P_B = 15$ kg, die auf einem glatten horizontalen Stab gleiten. Der Stab ist an der Spindel des Reglers befestigt. An der Muffe C mit einem Gewicht von $P_2 = 10$ kg sind zwei $l = 25$ cm lange Stangen gelenkig angeschlossen, die zu den Massen A und B führen. Diese sind mit Federn verbunden, welche die Massen zur Drehachse drücken. Der Abstand der Gelenke C von der Spindelachse beträgt $e = 3$ cm. Die Federkonstante der Federn ist $c = 15$ kg/cm.

Man bestimme die Winkelgeschwindigkeit des Reglers beim Öffnungswinkel $\alpha = 60°$. Bei $\alpha = 30°$ sind die Federn gerade ungespannt. Das Gewicht der Stangen und die Reibung sind zu vernachlässigen.

Lösung: $n = 188$ U/min.



Aufgabe 938



Aufgabe 939

939. Vier Massen vom gleichen Gewicht befinden sich an den Enden zweier gleicharmiger Hebel der Länge $2\,l$ in einem Regler. Die Hebel können sich in der Ebene des Reglers um das Ende der Spindel O drehen und bilden mit der Spindelachse den veränderlichen Winkel φ. Im Punkt A, der sich im Abstand $OA = a$ vom Ende der Spindel O befindet, sind mit der Spindel die Hebel AB und AC der Länge a beweglich befestigt. Diese Hebel sind ihrerseits in den Punkten B und C mit den Stäben BD und CD von der Länge a, die die Muffe D tragen, gelenkig verbunden. In den Punkten B und C befinden sich Gleitstücke, die längs der Hebel gleiten können. Das Gewicht der Muffe beträgt Q. Der Regler dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω.

Man finde die Beziehung zwischen dem Winkel φ und der Winkelgeschwindigkeit ω in der Gleichgewichtslage des Reglers.

Lösung: Die Gleichgewichtslage des Reglers ist nur bei $\omega = \sqrt{\frac{2\,gQa}{Pl^2}}$ möglich. Eine Abhängigkeit vom Winkel besteht nicht.

940. Der Stab DE mit dem Gewicht Q liegt auf drei Rollen A, B, C jede vom Gewicht P. Längs der Horizontalen wird dem Stab nach rechts die Kraft F erteilt, die den Stab und die Rollen in Gang setzt. Es tritt weder zwischen dem Stab und den Rollen, noch zwischen den Rollen und der horizontalen Ebene Schlupf auf.

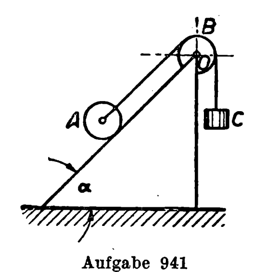
Man finde die Beschleunigung des Stabes DE. Die Rollen werden als homogene runde Zylinder angesehen.

Lösung: $b = \frac{8\,gF}{8\,Q + 9\,P}$.

941. Die Walze A vom Gewicht Q bewegt sich auf einer schiefen Ebene ohne Schlupf abwärts und hebt dabei durch ein gewichts- und dehnungsloses, über die Rolle B geführtes Seil die Last C vom Gewicht P. Dabei dreht sich die Rolle B um die unbewegliche Achse O. Die Walze A und die Rolle B sind homogene runde Scheiben von gleichem Gewicht und gleichem Radius. Die schiefe Ebene bildet den Winkel α mit der Horizontalen.

Man bestimme die Beschleunigung der Walzenachse.

Lösung: $b = g\,\frac{Q \sin \alpha - P}{2\,Q + P}$.



Aufgabe 941

Aufgabe 942

942. Die Last A vom Gewicht P bewegt sich abwärts und veranlaßt mit Hilfe eines gewichts- und dehnungslosen Seiles, das über die feste Rolle D gelegt und auf der Trommel B aufgewickelt ist, das Fortrollen der Welle C ohne Schlupf auf der horizontalen Ebene. Die Trommel B vom Halbmesser R ist mit der Welle C vom Halbmesser r starr verbunden. Ihr gemeinsames Gewicht beträgt Q. Der Trägheitshalbmesser in bezug auf die Achse O, die senkrecht zur Zeichenebene liegt, ist gleich ϱ.

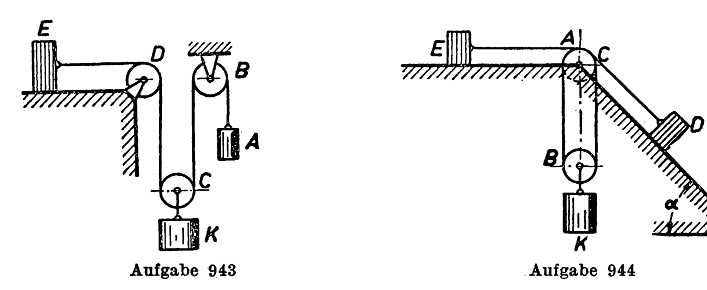
Man finde die Beschleunigung der Last A.

Lösung: $b = g\,\frac{P\,(R - r)^2}{P\,(R - r)^2 + Q\,(\varrho^2 + r^2)}$.

943. Ein homogenes Seil, an dessen Ende die Last A vom Gewicht P befestigt ist, umschlingt die feste Rolle B und die bewegliche Rolle C. Das Seil läuft aufwärts um die feste Rolle D, dann längs einer horizontalen Ebene und ist am anderen Ende an der Last E vom Gewicht P befestigt. Die Last K vom Gewicht Q hängt an der Achse der Rolle C. Der Koeffizient der gleitenden Reibung der Last E gegen die horizontale Ebene ist μ.

Bei welcher Voraussetzung wird sich die Last K abwärts bewegen, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten sämtlicher Lasten gleich Null sind? Man finde die Beschleunigung der Last K. Die Massen der Rollen und des Seiles sind zu vernachlässigen.

Lösung: $Q > P\,(1+\mu)$; $b = g\,\dfrac{Q - P\,(1+\mu)}{Q + 2\,P}$.



Aufgabe 943 Aufgabe 944

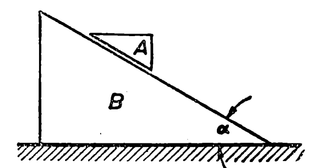
944. Zwei Lasten D und E, jede mit dem Gewicht P, sind an den Enden eines gewichts- und dehnungslosen Seiles angehängt. Das Seil läuft von der Last E über eine feste Rolle A, erfaßt dann die bewegliche Rolle B, kehrt sodann zur Rolle C zurück, die mit Rolle A auf einer gemeinsamen Achse sitzt, und läuft längs einer schiefen Ebene weiter, auf der dann am Ende des Fadens die Last D liegt. Die schiefe Ebene bildet den Winkel α mit der Horizontalen. An der Rolle B ist die Last K mit dem Gewicht Q befestigt. Der Reibungskoeffizient der Last E bei ihrem Gleiten auf der horizontalen Ebene ist μ.

Man vernachlässige die Massen der Rollen und stelle die Bedingungen auf, bei denen die Last K sinkt. Man bestimme die Beschleunigung der Last. Im Anfangsaugenblick waren die Geschwindigkeiten aller Lasten Null.

Lösung: $Q > P\,(\sin\alpha + \mu)$; $b = g\,\dfrac{Q - P\,(\sin\alpha + \mu)}{Q + 2\,P}$.

945. Ein Prisma A mit dem Gewicht P gleitet auf der glatten Seitenfläche eines anderen Prismas B vom Gewicht Q, das den Winkel α mit der Horizontalen bildet.

Man bestimme die Beschleunigung des Prismas B. Das System befindet sich im Anfangsaugenblick in Ruhe. Man vernachlässige die Reibung zwischen dem Prisma B und der horizontalen Ebene.



Lösung: $b = g\,\dfrac{P\sin 2\,\alpha}{2\,(Q + P\sin^2\alpha)}$.

946. Über die festen Rollen A und B ist ein Seil gelegt, das eine lose Rolle C trägt. Die Seilteile, die nicht auf den Rollen liegen, laufen vertikal. Rolle C ist mit dem Gewicht $P = 4$ kg belastet. An den Enden des Seiles sind Lasten mit den Gewichten $P_1 = 2$ kg und $p_2 = 3$ kg befestigt.

Man bestimme die Beschleunigung aller Lasten. Die Massen der Rollen und des Seiles sowie die Reibung an den Achsen werden vernachlässigt.

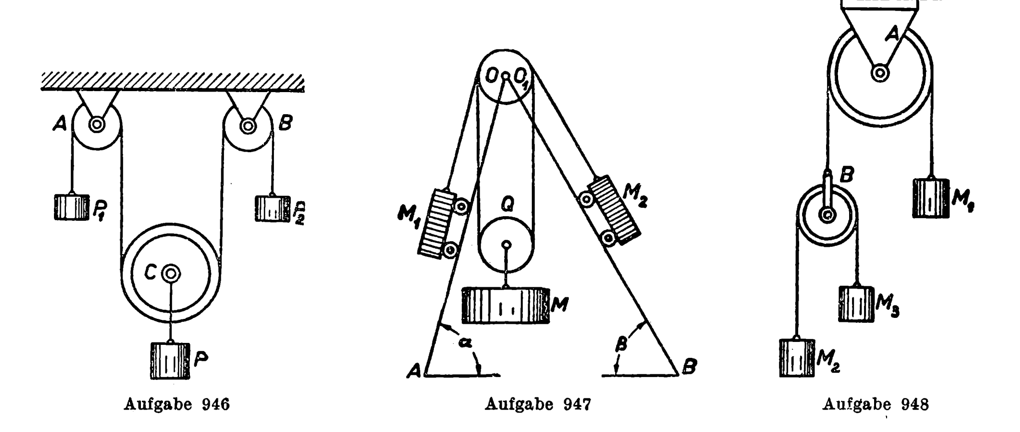
Lösung: $b = \frac{g}{11}$ (nach oben), $b_1 = \frac{g}{11}$ (nach oben), $b_2 = \frac{3g}{11}$ (nach unten).

947. Die Lasten M_1 und M_2 von gleichem Gewicht p bewegen sich auf zwei Führungsleisten OA und OB, die in der vertikalen Ebene unter den Winkeln α und β zur Horizontalen geneigt sind. Das Seil, das diese Lasten verbindet, führt von der Last M_1 über die Rolle O, die sich um die Horizontalachse dreht. Es erfaßt dann die Trommel Q, die die Last M mit dem Gewicht P trägt, und führt weiter über die Rolle O_1, die mit Rolle O auf derselben Achse sitzt, zur Last M_2.

Man bestimme die Beschleunigung b der Last M_1. Die Reibung, die Massen der Rollen, der Trommel und des Seiles werden vernachlässigt.

Lösung: Wenn man die Beschleunigung b nach unten positiv annimmt, bzw. nach oben negativ, so findet man

$$b = g\,\frac{P - p\,(\sin\alpha + \sin\beta)}{P + 2\,p}.$$



Aufgabe 946 Aufgabe 947 Aufgabe 948

948. Gegeben ist ein Rollensystem, bestehend aus der festen Rolle A, der losen Rolle B und den drei Lasten M_1, M_2 und M_3, die an undehnbaren Fäden in der gezeichneten Lage hängen. Die Massen der Lasten sind m_1, m_2 und m_3. Es bestehen dabei die Ungleichungen $m_1 < m_2 + m_3$ sowie $m_2 \gtrless m_3$.

Welcher Bedingung muß die Masse m_1 genügen, um ohne Anfangsgeschwindigkeit zu sinken? Die Rollenmassen sind zu vernachlässigen.

Lösung: $m_1 > \frac{4\,m_2\,m_3}{m_2 + m_3}$.

949. Unter Beibehaltung der Bedingungen der Aufgabe 948 bestimme man die Seilkraft des Fadens, der die Last M_1 trägt.

Lösung: $T = \dfrac{8\, m_1\, m_2\, m_3}{m_1\, (m_2 + m_3) + 4\, m_2\, m_3}\, g.$

37. Schwerpunktsatz

950. Man bestimme die Bewegungsbahn des Schwerpunktes eines Ellipsenzirkels, der aus den kleinen Muffen A und B mit je dem Gewicht Q, der Kurbel OC mit dem Gewicht P und dem Lineal AB mit dem Gewicht $2\,P$ besteht. Es sind gegeben: $OC = AC = CB = l$. Es wird angenommen, daß das Lineal und die Kurbelwelle homogene Stäbe darstellen, die Muffen werden als materielle Punkte betrachtet.

Lösung: Kreis mit dem Mittelpunkt im Punkt O und dem Radius
$\dfrac{5\,P + 4\,Q}{3\,P + 2\,Q}\,\dfrac{l}{2}.$

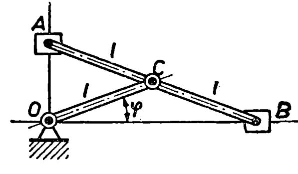
951. In der Mitte eines Bootes sitzen zwei Männer, deren Gewichte $P_1 = 50$ kg und $P_2 = 70$ kg betragen. Der eine (P_1) geht an die rechte Seite des rechteckigen Bootskörpers und setzt sich dort ganz vorn hin. Wohin muß sich der zweite Mann (P_2) setzen, damit das Boot in Ruhe bleibt? Die Länge des Bootes beträgt 4 m. Man vernachlässige den Widerstand des Wassers bei der Bewegung des Bootes.

Lösung: Nach links, ans Heck des Bootes, im Abstand von 1,43 m von der Mitte des Bootes aus.

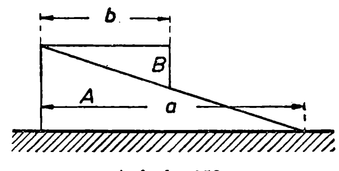
952. Auf dem homogenen Prisma A, das auf einer horizontalen Fläche ruht, liegt ein anderes homogenes Prisma B. Die Querschnitte der Prismen sind rechtwinklige Dreiecke. Das Gewicht des Prismas A ist dreimal so groß wie das Gewicht des Prismas B.

Unter der Annahme, daß die Prismen sowie die horizontale Fläche ideal glatt sind, bestimme man die Länge l, um die sich das Prisma A verschiebt, wenn das Prisma B beim Herabgleiten die horizontale Fläche erreicht.

Lösung: $l = \dfrac{a - b}{4}.$



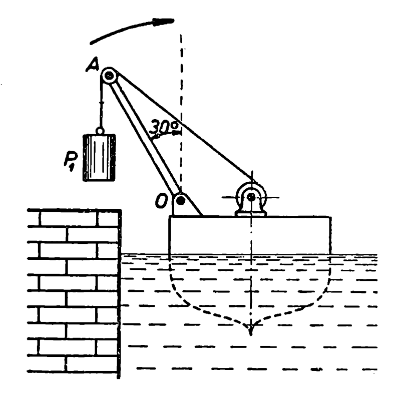
Aufgabe 950



Aufgabe 952

953. Man bestimme die Veränderung der Lage eines Schwimmkranes, der die Last $P_1 = 2$ t hebt, wenn sich der Ausleger des Kranes aus der gezeichneten Stellung um 30° bis zur Vertikallage dreht. Das Gewicht des Kranes beträgt $P_2 = 20$ t. Die Länge des Auslegers beträgt $OA = 8$ m. Man vernachlässige den Wasserwiderstand und das Gewicht des Auslegers.

Lösung: Der Kran bewegt sich um 0,36 m nach links.



954. Die Lasten P_1 und P_2 sind durch einen undehnbaren Faden verbunden, der über die Rolle A läuft. Die Lasten gleiten an den glatten Seiten eines rechtwinkligen Keiles, der auf einer horizontalen Fläche liegt.

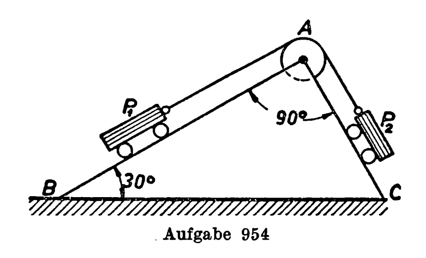
Man finde die Lageveränderung des Keiles auf der Horizontalfläche beim Herablassen der Last P_1 um die Höhe $h = 10$ cm. Das Gewicht des Keiles P beträgt $P = 4\,P_1 = 16\,P_2$. Die Massen des Fadens und der Rolle werden vernachlässigt.

Lösung: Der Keil verschiebt sich um 3,77 cm nach rechts.

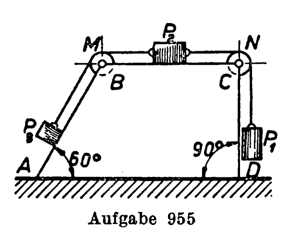
955. Drei Lasten $P_1 = 20$ kg, $P_2 = 15$ kg und $P_3 = 10$ kg sind miteinander durch einen gewichtslosen dehnungsfreien Faden verbunden, der über die festen Rollen M und N läuft. Beim Herablassen der Last P_1 bewegt sich die Last P_2 auf dem oberen Teil des Pyramidenstumpfes $ABCD$, der ein Gewicht von $P = 100$ kg besitzt, nach rechts. Die Last P_3 verschiebt sich an der Seitenkante AB nach oben.

Unter Vernachlässigung der Reibung bestimme man die Lageveränderung des Pyramidenstumpfes, wenn die Last P_1 sich um 1 m nach unten senkt.

Lösung: 13,8 cm nach links.



Aufgabe 954



Aufgabe 955

956. Bei einer liegenden Kolbenmaschine beträgt das Gewicht des Rahmens $P_1 = 14$ t, das Gewicht der hin- und hergehenden Teile $P_2 = 1$ t. Der Kurbelradius beträgt $r = 45$ cm, die Kurbelwelle macht 240 U/min.

Man bestimme die Bewegung des Rahmens auf dem Fundament. Es wird angenommen, daß die Kolbenbewegung dem Gesetz einer harmonischen Schwingung folgt. Reibung und Bolzenbefestigung am Fundament sind zu vernachlässigen.

Lösung: $s = 3 \sin 8\,\pi\,t$ cm.

957. Der Gesamtschwerpunkt eines 200 t schweren Schiffes bewegt sich mit einer mittleren Geschwindigkeit von 10 m/sec. Der Kolben der liegenden Maschine wiegt 100 kg, sein Hub beträgt 1 m, die Kurbelwelle macht 120 U/min. Unter der Annahme, daß die Kolbenbewegung eine harmonische Schwingung darstellt, ist die Geschwindigkeit v des Schiffsrumpfes zu bestimmen. Die Schaufelräder üben eine Kraft aus, die dem Wasserwiderstand entspricht.

Lösung: $v = (10 - 0{,}00314 \cos 4\pi t)$ m/sec.

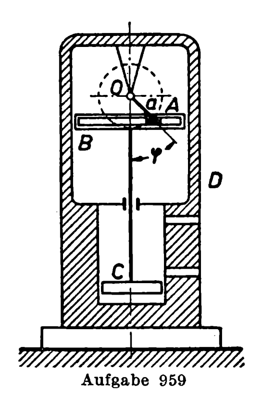
958. Ein Straßenbahnwagen führt senkrechte harmonische Federschwingungen mit einer Amplitude von 2,5 cm und einer Periode $T = 0{,}5$ sec aus. Der Oberbau einschließlich Belastung wiegt 10 t, das Gewicht des Chassis und der Räder beträgt 1 t.

Es ist der Wagendruck auf die Schienen zu ermitteln.

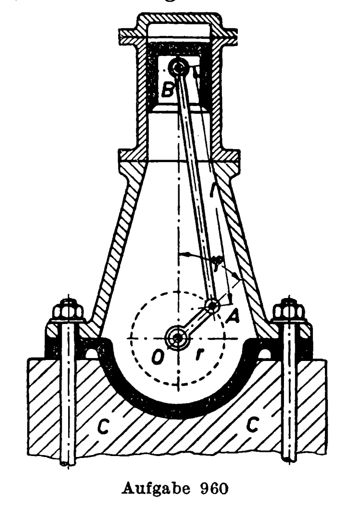
Lösung: Der Druck schwankt zwischen 7 t und 15 t.

959. Es ist der Bodendruck der gezeichneten Wasserpumpe für Leerlauf zu ermitteln. Das Gewicht der unbeweglichen Teile des Gehäuses D und des Fundamentes E beträgt P_1, P_2 ist das Gewicht der Kurbel $OA = a$, das Gewicht der Kulisse B und des Kolbens C beträgt P_3. Die Kurbel OA, die sich gleichförmig mit einer Winkelgeschwindigkeit ω dreht, ist als Stange anzusehen.

Lösung: $N = P_1 + P_2 + P_3 + \frac{a\omega^2}{2g}(P_2 + 2P_3)\cos\omega t.$



Aufgabe 959



Aufgabe 960

960. In einem stehendem Gasmotor wiegen der Zylinder, der Rahmen und die Lager 10 t. Der Kolben wiegt 981 kg, sein Schwerpunkt befindet sich im Kolbenbolzen B. Der Hub beträgt 60 cm, die Kurbelwelle verrichtet 300 U/min. Das Verhältnis der Kurbellänge r zur Schubstangenlänge l beträgt 1/6. Die Masse der Kurbel und der Schubstange soll vernachlässigt werden. Der Motor ist an dem Fundament C durch Bolzen befestigt, deren Spannung beim Stillstand der Maschine Null beträgt.

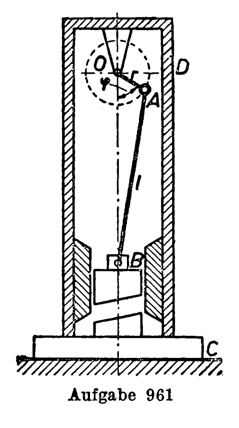
Es sind der größte Druck N des Motors auf das Fundament und die größte Kraft T, die von allen Bolzen aufgenommen werden muß, zu ermitteln.

Lösung: $N = 35{,}6$ t; $T = 23{,}6$ t.

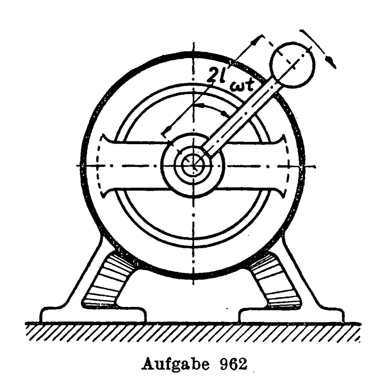
961. Eine Blechschere besteht aus einem Kurbelmechanismus OAB, an dessen Gleitstück B das bewegliche Messer befestigt ist. Das unbewegliche Messer ist am Fundament C verankert.

Es ist der Druck des Fundamentes auf den Boden zu ermitteln, wenn die Kurbellänge r, das Kurbelgewicht P_1, die Schubstangenlänge l, das Gewicht des Gleitstückes B mit dem beweglichen Messer P_2 und das Gewicht des Fundamentes C und des Gehäuses D P_3 beträgt. Die Schubstangenmasse ist zu vernachlässigen. Die Kurbel OA, die sich gleichmäßig mit einer Winkelgeschwindigkeit ω dreht, ist als Stange zu betrachten. (Siehe Anmerkung zur Aufgabe 883.)

Lösung: $N = P_1 + P_2 + P_3 + \frac{r\,\omega^2}{2\,g}\left[(P_1 + 2\,P_2)\cos\omega\,t + 2\,P_2\frac{r}{l}\cos 2\,\omega\,t\right].$



Aufgabe 961



Aufgabe 962

962. Ein Elektromotor vom Gewicht P steht ohne Befestigung auf einem glatten horizontalen Fundament. An der Motorwelle ist unter rechtem Winkel eine Stange von $2\,l$ Länge und dem Gewicht p befestigt. Am Ende der Stange befindet sich eine Last Q. Die Winkelgeschwindigkeit der Welle beträgt ω. Es sind zu bestimmen:

1) die horizontale Motorbewegung,
2) die größte horizontale Kraft R, die auf die Bolzen einwirkt, mit denen der Motor am Fundament verankert wird.

Lösung: 1) Harmonische Schwingungen mit der Amplitude $\frac{l\,(p + 2\,Q)}{p + P + Q}$ und der Periode $\frac{2\,\pi}{\omega}$;

2) $R = \frac{p + 2\,Q}{g}\,l\,\omega^2.$

963. Für die vorhergehende Aufgabe ist die Winkelgeschwindigkeit ω der Elektromotorenwelle zu ermitteln, bei der der Motor auf dem Fundament springt, wenn er dort nicht befestigt ist.

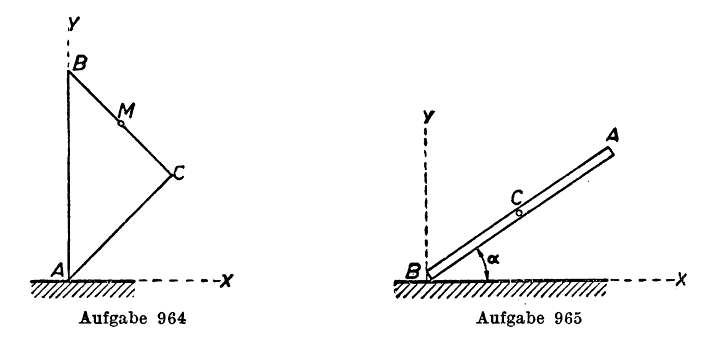
Lösung: $\omega > \sqrt{\frac{(p + P + Q)\,g}{(p + 2\,Q)\,l}}.$

964. Eine Platte ABC von der Form eines rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse AB 12 cm beträgt, steht mit der Spitze so auf einer glatten horizontalen Fläche, daß die Hypotenuse eine Vertikale bildet. Sich selbst überlassen, fällt die Platte unter dem Einfluß der Schwerkraft.

Es ist zu ermitteln, welche Kurve dabei der Punkt M, die Schenkelmitte von BC, beschreibt.

Während der ganzen Bewegungsdauer bleibt die Spitze A auf der horizontalen Ebene.

Lösung: Ellipsenbogen $9(x-2)^2 + y^2 = 90$.



Aufgabe 964 Aufgabe 965

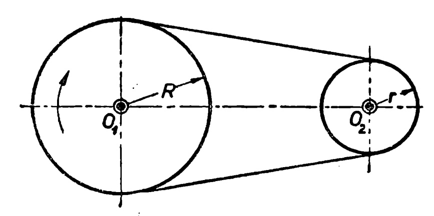
965. Eine Stange AB von der Länge $2\,l$ stützt sich mit dem Ende B unter dem Winkel α auf eine glatte horizontale Ebene.

Es ist die Gleichung der Bewegungsbahn des Punktes A beim Fallen der Stange auf die Ebene zu ermitteln.

Lösung: Ellipse: $(x - l\cos\alpha)^2 + \frac{y^2}{4} = l^2$.

38. Impulssatz

966. Es ist der Impuls der auf der Zeichnung abgebildeten Riemenübersetzung zu berechnen, wobei die Scheibenmassen und der Riemen zu berücksichtigen sind. Die Schwerpunkte jeder Scheibe liegen auf den Drehachsen.



Lösung: Der Impuls ist gleich Null.

967. Ein Rad mit einem Gewicht von $P = 100$ kg und dem Radius $R = 50$ cm rollt ohne zu gleiten mit 60 U/min auf einer Schiene.

Es ist der Impuls des Rades zu errechnen.

Lösung: $10{,}2\,\pi$ kgsec.

968. Es sind Größe und Richtung des Vektors der Bewegungsgröße eines Ellipsenzirkels zu ermitteln. Das Kurbelgewicht beträgt P_1, das Gewicht des Lineals AB ist $2\,P_1$, das Gewicht jeder der Kupplungen A und B beträgt P_2. Die Abmessungen $OC = AC = CB = l$ sind gegeben. Die Schwerpunkte von Kurbel und Lineal liegen in ihrer Mitte. Die Kurbel dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω.

Lösung: Vektorbetrag: $B = \frac{\omega\, l}{2\, g}\,(5\,P_1 + 4\,P_2)$; die Vektorrichtung ist senkrecht zur Kurbel.

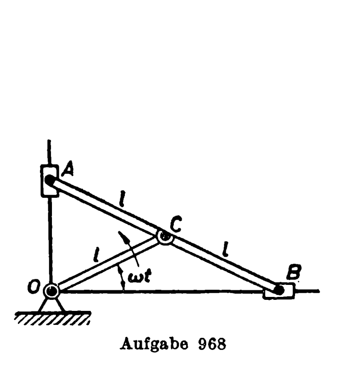
969. In dem gezeichneten Mechanismus wiegt das bewegliche Rad vom Radius r, dessen Schwerpunkt in O_1 liegt, p kg. Die Stange AB wiegt k mal soviel wie das bewegliche Rad. Ihr Schwerpunkt liegt in ihrer Mitte. Die Kurbel OO_1 dreht sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse O.

Es ist die Bewegungsgröße des Systems zu errechnen, wobei die Kurbelmasse vernachlässigt werden soll.

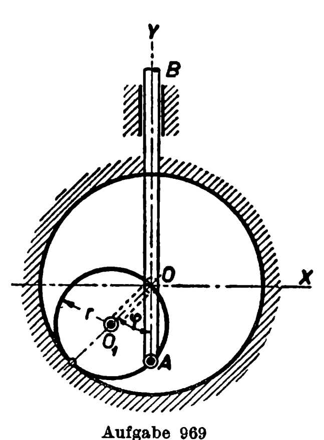
Lösung: Die Projektionen der Bewegungsgröße auf die Koordinatenachsen sind:

1) auf die x-Achse: $-\frac{p}{g}\, r\, \omega \cos \omega\, t$;

2) auf die y-Achse: $\frac{p}{g}\, r\, \omega\, (1 + 2\,k) \sin \omega\, t$.



Aufgabe 968



Aufgabe 969

970. Der waagerecht liegende Lauf eines Geschützes wiegt 11 000 kg und das Geschoß 54 kg. Die Geschoßgeschwindigkeit am Laufende beträgt $v_0 = 900$ m/sec. Es ist die Rohr-Rücklaufgeschwindigkeit für den Moment, in dem das Geschoß den Lauf verläßt, zu ermitteln.

Lösung: Die Rücklaufgeschwindigkeit beträgt 4,42 m/sec. Sie ist entgegen der Flugrichtung des Geschosses gerichtet.

971. Die Aufgabe 970 ist unter der Annahme, daß der Geschützlauf mit der Horizontalen einen Winkel $\alpha = 30°$ bildet, durchzurechnen.

Lösung: Die waagerechte Komponente der Rohr-Rücklaufgeschwindigkeit beträgt 3,82 m/sec.

972. Eine 12 kg schwere Granate fliegt mit einer Geschwindigkeit von 15 m/sec. In der Luft zerspringt sie in zwei Teile. Die Geschwindigkeit des Splitters mit einem Gewicht von 8 kg nimmt dabei in Bewegungsrichtung bis auf 25 m/sec zu. Es ist die Geschwindigkeit des zweiten Splitters zu ermitteln.

Lösung: 5 m/sec in entgegengesetzter Richtung zur Bewegung des ersten Splitters.

973. Nachdem ein Schleppdampfer mit einem Gewicht von 600 t eine Geschwindigkeit von 1,5 m/sec erreicht hatte, spannte sich das Schleppseil, und der Schleppkahn mit einem Gewicht von 400 t wurde in Bewegung gesetzt.

Es ist die gemeinsame Geschwindigkeit von Dampfer und Schleppkahn zu ermitteln. Die Bewegungskraft des Dampfers ist gleich der Widerstandskraft des Wassers.

Lösung: 0,9 m/sec.

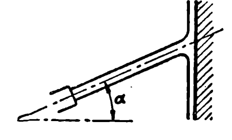
974. Ein 50 kg schwerer Mann springt während der Fahrt auf das Trittbrett eines Wagens, der 240 kg wiegt und sich mit einer Geschwindigkeit von 3,6 km/h bewegt.

Es ist die Wagengeschwindigkeit nach dem Aufspringen des Mannes zu ermitteln.

Lösung: 2,98 km/h.

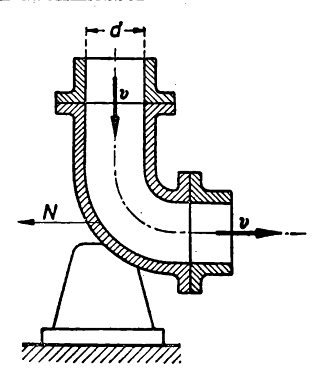
975. Aus dem Mundstück eines Feuerwehrschlauches von 16 cm² Querschnitt schießt ein Wasserstrahl unter einem Winkel von $\alpha = 30°$ mit einer Geschwindigkeit von 8 m/sec.

Es ist der Druck des Wasserstrahles auf eine vertikale Wand zu ermitteln, wobei die Wirkung der Schwerkraft des Wasserstrahles außer acht gelassen werden soll. Weiterhin soll angenommen werden, daß es sich um eine reibungsfreie Strömung handelt und daß das Wasser von der Wand nicht zurückspritzt.



Lösung: 9,05 kg.

976. Es ist die Horizontalkomponente des zusätzlichen Druckes auf die Stütze des Rohrknies, in dem das Wasser mit einer Geschwindigkeit von $v = 2$ m/sec fließt, zu ermitteln. Der Durchmesser des Rohres beträgt $d = 300$ mm.

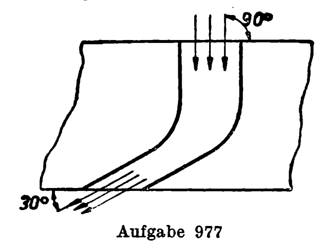


Lösung: $N = 28,9$ kg.

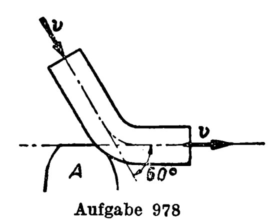
977. Das Wasser tritt in einen unbeweglichen Kanal mit veränderlichem Querschnitt in vertikaler Richtung ($\alpha_0 = 90°$) mit einer Geschwindigkeit von $v = 2$ m/sec ein. Beim Eintritt beträgt der Kanalquerschnitt 0,02 m². Die Wassergeschwindigkeit am Kanalende beträgt $v = 4$ m/sec und bildet mit der Horizontalen einen Winkel von $\alpha_1 = 30°$.

Es ist die Horizontalkomponente der Reaktion, die das Wasser auf die Kanalwand ausübt, zu ermitteln.

Lösung: 14,1 kg.



Aufgabe 977



Aufgabe 978

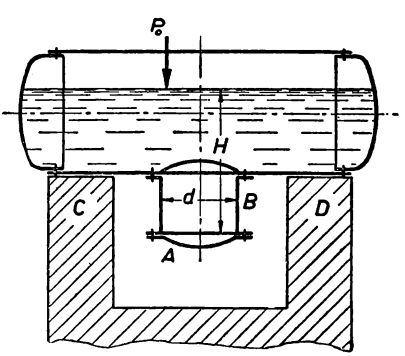
978. Es ist der zusätzliche Druck auf die Stütze A des Rohrknies mit einem Durchmesser von 20 cm zu ermitteln. Die Rohrachse liegt in horizontaler Ebene. Im Rohr fließt das Wasser mit einer Geschwindigkeit von 4 m/sec. Die Wassergeschwindigkeit beim Eintritt in das Rohr bildet einen Winkel von 60° mit der Wassergeschwindigkeit beim Rohraustritt.

Lösung: 51,2 kg.

979. Es ist die Horizontalkomponente vom Druck des Wasserstrahls auf die unbewegliche Turbinenradschaufel zu ermitteln, wenn die Durchsatzmenge Q, das spezifische Gewicht γ, die Geschwindigkeit des Wassereintritts in die Schaufel v_1 horizontal und die Geschwindigkeit des Wasseraustritts v_2 unter einem Winkel α zur Horizontalen beträgt.

Lösung: $N = \frac{\gamma}{g} Q (v_1 + v_2 \cos \alpha)$.

980. Ein Dampfkessel, der 10,35 t wiegt, ist mit 15 t Wasser unter einem Manometerdruck von $p_0 = 10$ at gefüllt. Nach einer gewissen Zeit reißen die Bolzen, mit denen der Deckel A mit dem Stutzen B durch Flansch verbunden war. Dadurch läuft das heiße Wasser aus. $H = 1$ m, $d = 0{,}4$ m; das spezifische Gewicht des heißen Wassers beträgt $\gamma = 0{,}9$.



Unter Vernachlässigung der hydraulischen Widerstände, der Wasserteilchen-Geschwindigkeiten innerhalb des Kessels und der Dampfbildung beim Austritt aus dem Stutzen B, ist der Auflagerdruck auf die Stützen im Moment des Abreißens des Deckels A zu errechnen.

Dabei soll die mittlere Geschwindigkeit, mit der das Wasser aus dem Kessel fließt, nach der Formel

$$v = \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0}{\gamma}\right)}$$

berechnet werden.

Lösung: Der Stützendruck ist Null.

39. Drehimpulssatz — Physikalisches Pendel — Elementare Kreiseltheorie

981. Eine runde Scheibe mit einem Gewicht von $P = 50$ kg und dem Radius $R = 30$ cm rollt ohne zu gleiten mit 60 U/min auf einer horizontalen Ebene. Es ist der Drall in bezug auf folgende Achsen zu bestimmen:

1) Die Achse geht senkrecht zur Bewegungsebene durch die Scheibenmitte.
2) Die Achse ist gleich der Momentanachse.

Lösung: 1) 1,44 kgmsec; 2) 4,32 kgmsec.

982. Über eine Scheibe, deren Masse unbeachtet bleibt, läuft ein Seil. Im Punkt A des Seiles hält sich ein Mann mit dem Gewicht P fest; im Punkt B hängt eine Last von gleichem Gewicht. Was geschieht mit der Last, wenn der Mann mit einer Geschwindigkeit v_A das Seil hinaufklettert?

Lösung: Die Last wird mit einer Geschwindigkeit $\frac{v_A}{2}$ hochgezogen.

983. Die Aufgabe 982 ist unter der Annahme, daß das Gewicht der Scheibe $\frac{1}{4}$ von dem Gewicht des Mannes beträgt, zu lösen. Für die Ermittlung des Trägheitsmomentes der Scheibe soll angenommen werden, daß ihre Masse gleichmäßig auf dem Scheibenumfang verteilt ist.

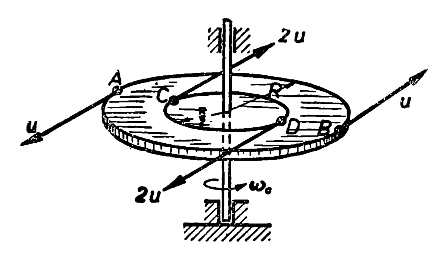
Lösung: Die Last steigt mit einer Geschwindigkeit $\frac{4}{9} v_A$.

984. Eine runde horizontale Scheibe kann sich reibungslos um eine durch ihren Mittelpunkt O laufende vertikale Achse Oz, drehen. Auf der Scheibe läuft im konstanten Abstand r von der Achse Oz ein Mann mit der gleichförmigen relativen Geschwindigkeit u. Sein Gewicht ist p.

Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ω der Scheibe, wenn ihr Gewicht P als gleichmäßig auf der Kreisfläche vom Radius R verteilt anzunehmen ist? Bei Beginn der Bewegung ist die Geschwindigkeit von Scheibe und Mann gleich Null.

Lösung: $\omega = \frac{2pr}{PR^2 + 2pr^2} u$.

985. Eine runde horizontale Scheibe dreht sich mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_0 reibungslos um die vertikale Achse, die durch ihren Schwerpunkt geht. Auf der Scheibe stehen vier Mann von gleichem Gewicht. Zwei davon stehen am Rande der Scheibe und zwei im Abstand des halben Scheibenradius von der Drehachse. Wie ändert sich die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe, wenn die am Rande stehenden Männer sich entlang des Kreises in Drehrichtung mit einer relativen Geschwindigkeit u und die beiden anderen Männer in entgegengesetzter Richtung mit einer relativen Geschwindigkeit $2\,u$ bewegen? Die Männer sind als Punktmasse zu betrachten.



Lösung: Die Scheibe dreht sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit weiter.

986. Die gleiche Aufgabe ist unter der Annahme zu lösen, daß sich alle vier Männer in der Drehrichtung der Scheibe bewegen. Der Radius der Scheibe beträgt R, ihre Masse ist 4 mal so groß wie die Masse jedes einzelnen Mannes und gleichmäßig auf der Scheibenfläche verteilt.

Es ist zu ermitteln, wie groß die relative Geschwindigkeit u werden muß, damit die Scheibe zum Stillstand kommt.

Lösung: $\omega_1 = \omega_0 - \frac{8}{9}\frac{u}{R}$; $\quad u = \frac{9}{8}\,R\,\omega_0$.

987. Ein Mann sitzt auf einem Drehschemel mit nach beiden Seiten gestreckten Armen und erhält eine Anfangsgeschwindigkeit von 15 U/min. Das Trägheitsmoment des Mannes und des Drehschemels gegenüber der Drehachse beträgt 0,8 kgmsec².

Mit welcher Winkelgeschwindigkeit wird sich der Mann drehen, wenn er die Arme an den Körper anlegt und somit das Trägheitsmoment des Systems auf 0,12 kgmsec² verringert?

Lösung: 100 U/min.

988. Zwei feste Körper drehen sich unabhängig voneinander mit den gleichmäßigen Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 um eine unbewegliche Achse. Die Trägheitsmomente dieser Körper zur Achse sind Θ_1 und Θ_2.

Mit welcher Winkelgeschwindigkeit werden sich die beiden Körper drehen, wenn man sie während der Drehung koppelt?

Lösung: $\omega = \frac{\Theta_1\,\omega_1 + \Theta_2\,\omega_2}{\Theta_1 + \Theta_2}$.

989. Eine $2\,L = 180$ cm lange Stange AB mit einem Gewicht von $Q = 2$ kg ist horizontal gelagert. Entlang der Stange können zwei Kugeln M_1 und M_2 verschoben werden. Jede Kugel wiegt $P = 5$ kg und ist an einer Feder befestigt. Sie liegen symmetrisch zur Drehachse und sind miteinander im Abstand $2\,l_1 = 72$ cm durch einen Faden verbunden. Die Stange dreht sich um die vertikale Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit, der eine Drehzahl $n_1 = 64$ U/min entspricht. Beim Durchschneiden des Fadens vollführen die Kugeln eine gewisse Anzahl von Schwingungen und bleiben dann unter dem Einfluß der Federn und der Reibungskraft in einer beständigen Gleichgewichtslage im Abstand $2\,l_2 = 108$ cm stehen.

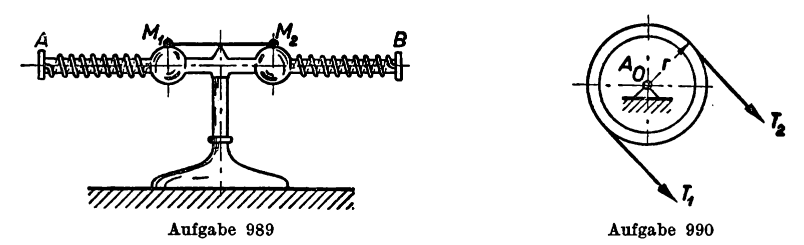
Unter der Annahme, daß die Kugeln Punktmassen sind, und bei Vernachlässigung der Federmasse ist die neue Drehzahl n_2 der Stange pro Minute zu ermitteln.

Lösung: $n_2 = \frac{6\,Pl_1^2 + QL^2}{6\,Pl_2^2 + QL^2}\,n_1 = 34$ U/min.

990. Die Riemenkräfte im Last- und Leertrum eines Riementriebes, mit dem die Scheibe A vom Radius $r = 20$ cm und vom Gewicht $P = 3{,}27$ kg angetrieben wird, betragen: $T_1 = 20$ kg und $T_2 = 10$ kg.

Wie groß muß das Moment des Widerstandes sein, wenn sich die Scheibe mit einer Winkelbeschleunigung $\varepsilon = 1{,}5\ \sec^{-2}$ dreht? Die Scheibe ist mit konstanter Dicke anzunehmen.

Lösung: 1 kgm.



Aufgabe 989 Aufgabe 990

991. Um das Reibungsmoment eines Zapfens zu ermitteln, wird auf die Welle ein Schwungrad mit dem Gewicht von 0,5 t aufgesetzt. Der Trägheitsradius des Schwungrades beträgt $i = 1{,}5$ m. Das Schwungrad erhält eine Winkelgeschwindigkeit, der $n = 240$ U/min entspricht. Sich selbst überlassen, bleibt das Schwungrad nach 10 Minuten stehen.

Es ist das Reibungsmoment zu ermitteln, wenn dasselbe als konstant angenommen werden kann.

Lösung: 4,8 kgm.

992. Eine runde Scheibe mit einem Durchmesser von 10 cm und mit 1 kg Gewicht läuft mit 100 U/min. Die ständige Reibungskraft, die am Umfang der Scheibe angreift, bringt dieselbe nach einer Minute zum Stehen.

Es ist der Wert der Reibungskraft zu ermitteln.

Lösung: 0,44 g.

993. Um große Schwungräder schnell zu bremsen, wird eine Wirbelstrombremse verwendet. Das Bremsmoment M_1 ist proportional zur Geschwindigkeit v des Radumfanges $M_1 = kv$, wobei k ein Koeffizient ist, der vom Magnetfluß und den Schwungradabmessungen abhängt. Das Reibungsmoment M_2 in den Lagern kann als konstant angesehen werden. Der Durchmesser des Schwungrads ist D, sein Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse Θ.

Es ist zu ermitteln, nach welcher Zeit das Schwungrad, das sich mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_0 dreht, zum Stillstand kommt.

Lösung: $T = \frac{2\,\Theta}{kD} \ln\left(1 + \frac{kD\,\omega_0}{2\,M_2}\right)$ sec.

994. Ein fester Körper, der sich in Ruhe befindet, wird durch ein konstantes Moment M (kgcm) um eine feste Achse zum Drehen gebracht. Hierbei bildet der Drehwiderstand ein Moment M_1, welches proportional dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ist: $M_1 = \alpha \cdot \omega^2$ kgcm.

Nach welcher Funktion verändert sich die Winkelgeschwindigkeit, wenn das Trägheitsmoment des festen Körpers zur Drehachse Θ kgcmsec² beträgt?

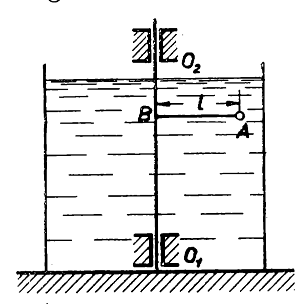
Lösung: $\omega = \sqrt{\frac{M}{\alpha}}\,\frac{e^{\beta t} - 1}{e^{\beta t} + 1}$ sec^{-1}, bei $\beta = \frac{2}{\Theta}\sqrt{\alpha M}$.

995. Die Aufgabe 994 ist unter der Annahme zu lösen, daß der Drehwiderstand ein Moment $M_1 = \alpha\omega$ kgcm bildet, welches proportional der Winkelgeschwindigkeit ist.

Lösung: $\omega = \frac{M}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha t}{\Theta}}\right)$ sec^{-1}.

996. Eine Kugel A befindet sich in einem Gefäß mit Flüssigkeit und ist am Ende einer Stange AB der Länge l befestigt. Die Kugel bewegt sich um die vertikale Achse O_1O_2 mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_0. Die Widerstandskraft der Flüssigkeit ist proportional der Winkelgeschwindigkeit $R = \alpha m\omega$, wobei m die Kugelmasse und α einen Verhältniskoeffizienten darstellen.

Es ist zu ermitteln, wann die Winkelgeschwindigkeit ω die Hälfte der Anfangsgeschwindigkeit ω_0 beträgt und wieviel Umdrehungen die Stange mit der Kugel in dieser Zeit ausführt. Die Kugelmasse ist als Punktmasse anzusehen. Die Stangenmasse soll vernachlässigt werden.



Lösung: $T = \frac{l}{\alpha} \ln 2$ sec; $n = \frac{l\omega_0}{4\pi\alpha}$ Umdrehungen.

997. Eine Welle vom Radius r wird durch das Gewicht der Masse m, das an einem Seil hängt, in Drehbewegung um die horizontale Achse AB gebracht. Damit sich nach einer bestimmten Zeit eine nahezu konstante Winkelgeschwindigkeit der Welle einstellt, werden auf die Welle n gleiche Platten S gesetzt. Der Luftwiderstand, den die Platten überwinden müssen, ist proportional dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit, wobei k ein Proportionalitätsfaktor ist. Der Luftwiderstand greift am Radius R an. Das Trägheitsmoment aller drehenden Teile, bezogen auf die Drehachse, beträgt Θ. Die Seilmasse wird vernachlässigt.

Es ist die Winkelgeschwindigkeit ω der Welle zu ermitteln, wobei angenommen wird, daß sie bei Beginn der Bewegung Null ist. Die Reibung in den Lagern bleibe unbeachtet.

Lösung: $\omega = \sqrt{\frac{mgr}{knR}}\,\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1}$, bei $\alpha = \frac{2}{\Theta + mr^2}\sqrt{mgnkrR}$;

bei genügender Größe von t ist die Winkelgeschwindigkeit ω nahezu ein konstanter Wert: $\omega = \sqrt{\frac{mgr}{knR}}$.

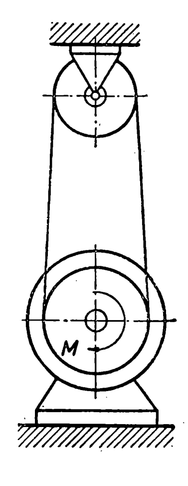
998. Es ist das Drehgesetz der Welle aus der vorstehenden Aufgabe nach Abschneiden des Gewichtes zu ermitteln. Es wird angenommen, daß die Welle ohne Gewicht eine Anfangsgeschwindigkeit ω_0 besitzt; der Anfangswinkel ist $\varphi_0 = 0$.

Lösung: $\varphi = \frac{\Theta}{nkR}\ln\left(1 + \frac{nkR\,\omega_0}{\Theta}\,t\right)$.

999. Es ist das Drehgesetz der Welle aus Aufgabe 997 zu ermitteln, wenn der Luftwiderstand proportional der Winkelgeschwindigkeit der Welle angenommen wird. Der Anfangsdrehwinkel ist $\varphi_0 = 0$.

Lösung: $\varphi = \sigma\left[t + \frac{1}{\gamma}\left(e^{-\gamma t} - 1\right)\right]$, wobei $\sigma = \frac{mgr}{nkR}$; $\gamma = \frac{nkR}{\Theta + mr^2}$.

1000. Eine Transmissionswelle wird durch einen Motor in Bewegung gesetzt. Motor- und Transmissionswelle sind durch einen endlosen Riemen verbunden, der über die beiden Riemenscheiben läuft. An der Motorwelle wirkt ein Drehmoment M. Die Trägheitsmomente der Motor- und Transmissionswelle einschließlich ihrer Riemenscheiben haben die Werte Θ_1 und Θ_2. Der Radius der Motorscheibe ist r_1, das Übersetzungsverhältnis vom Motor zur Transmission ist k, das Gewicht des endlosen Riemens p.



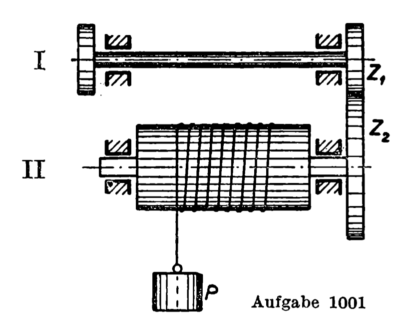
Bei Vernachlässigung der Lagerreibung ist die Winkelbeschleunigung der Motorwelle zu ermitteln.

Lösung: $\varepsilon_1 = \frac{Mg}{(\Theta_1 + k^2\,\Theta_2)\,g + p r_1^2}$.

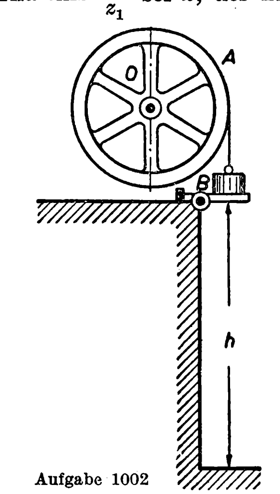
1001. Eine Last vom Gewicht P wird durch eine elektrische Winde, die auf die Welle I ein konstantes Drehmoment M überträgt, hochgezogen.

Es ist die Lastbeschleunigung zu ermitteln, wenn die Trägheitsmomente von Welle I und Welle II einschließlich der aufgesetzten Zahnräder und anderen Einzelheiten Θ_1 und Θ_2 sind. Das Übersetzungsverhältnis $\frac{z_2}{z_1}$ sei k, der Trommelradius mit dem aufgewickelten Hubseil betrage R. Die Lagerreibung und die Seilmasse werden vernachlässigt.

Lösung: $b = g\frac{(Mk - PR)R}{PR^2 + (\Theta_1 k^2 + \Theta_2)g}$.



Aufgabe 1001



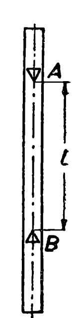
Aufgabe 1002

1002. Um das Trägheitsmoment Θ des Schwungrades A vom Radius $R = 50$ cm bezüglich der Schwerpunktsachse zu ermitteln, wird das Rad mit einem dünnen Draht umwickelt. An dem Draht wird ein Gewicht B der Größe $p_1 = 8$ kg befestigt und die Absinkdauer $T = 16$ sec des Gewichtes aus einer Höhe von $h = 2$ m gestoppt Um die Reibung berücksichtigen zu können, wird mit dem Gewicht $p_2 = 4$ kg ein zweiter Versuch unternommen, der eine Absinkdauer $T_2 = 25$ sec bei gleicher Höhe ergibt.

Unter der Annahme, daß das Reibungsmoment konstant ist und nicht vom Gewicht der Last abhängt, ist das Trägheitsmoment Θ zu ermitteln.

$$\textit{Lösung:}\ \Theta = R^2\frac{\frac{1}{2h}(p_1 - p_2) - \frac{1}{g}\left(\frac{p_1}{T_1^2} - \frac{p_2}{T_2^2}\right)}{\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2}} = 1061 \text{ kgmsec}^2.$$

1003. Um die Schwerebeschleunigung zu ermitteln, benutzt man ein Reversionspendel, das aus einer Stange mit zwei aufgesetzten Schneiden A und B besteht. Eine davon ist fest, die andere kann entlang der Stange verschoben werden. Wenn man die Stange auf die eine oder andere Schneide aufsetzt und den Abstand AB verändert, kann man gleiche Schwingungszeiten des Pendels um jede Schneide erreichen.



Falls A und B verschiedenen Abstand vom Schwerpunkt haben, ist $AB = l$ die Länge eines mathematischen Pendels gleicher Schwingungsdauer T.

Es ist die Eckbeschleunigung aus den Werten l und T zu ermitteln.

Lösung: $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$.

1004. Zwei feste Körper können um die gleiche horizontale Achse einzeln oder gemeinsam pendeln.

Es ist die reduzierte Pendellänge des zusammengesetzten Pendels zu ermitteln, wenn das Gewicht der festen Körper p_1 und p_2, der Abstand ihrer Schwerpunkte von der gemeinsamen Drehachse a_1 und a_2 sind. Die reduzierten Pendellängen bei gesonderten Schwingungen jedes Pendels sind l_1 und l_2.

Lösung: $l_z = \dfrac{p_1 a_1 l_1 + p_2 a_2 l_2}{p_1 a_1 + p_2 a_2}$.

1005. Um eine Uhr einzuregulieren, wird am Pendel ein zusätzliches Gewicht angebracht. Das Pendelgewicht ist P, seine reduzierte Pendellänge l. Der Abstand vom Schwerpunkt bis zum Aufhängepunkt ist a. Das Zusatzgewicht p soll im Abstand x vom Aufhängepunkt angebracht werden. Die zusätzliche Last sei ein Massenpunkt.

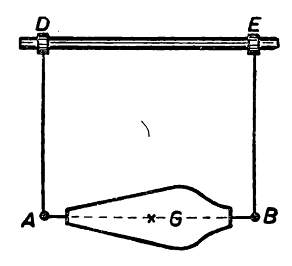
Es soll die Änderung Δl der reduzierten Pendellänge bei gegebenen Werten von p und x ermittelt werden. Weiterhin ist der Abstand $x = x_1$ so zu ermitteln, daß die gefundene reduzierte Pendellänge mit der kleinstmöglichen Zusatzmasse erreicht wird.

Lösung: Die reduzierte Pendellänge verlängert sich um

$$\Delta l = \frac{px(x-l)}{Pa + px}; \quad x_1 = \frac{1}{2}(l + \Delta l).$$

1006. Um das Trägheitsmoment Θ eines vorliegenden Körpers bezüglich der Achse AB durch den Schwerpunkt G zu ermitteln, wird der Körper starr an den Stangen AD und BE aufgehängt. Die Stangen sind an einer festen, zu AB parallelen Achse DE angebracht. Der Körper wird in Bewegung gesetzt und die Zeit T einer halben Schwingung festgestellt.

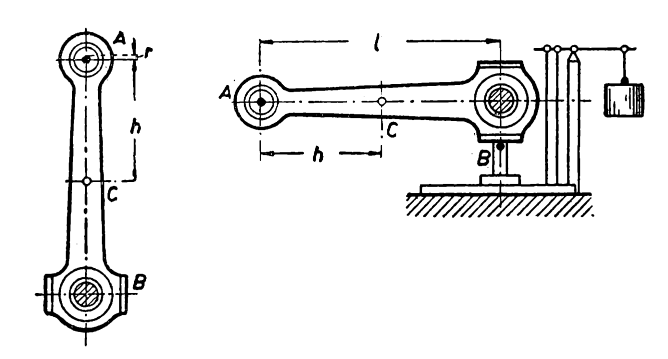
Wie groß ist das Trägheitsmoment bei einem Körpergewicht p und bei einem Abstand h zwischen den Achsen AB und DE? Die Stangenmassen bleiben unbeachtet.



Lösung: $\Theta = hp\left(\dfrac{T^2}{\pi^2} - \dfrac{h}{g}\right)$.

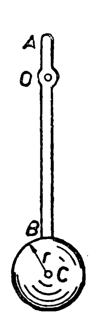
1007. Um das Trägheitsmoment einer Kurbelstange zu ermitteln, läßt man sie um die horizontale Achse schwingen. Hundert Schwingungen dauern $100\,T = 100$ sec, wobei T die Zeit für eine halbe Periode darstellt. Um den Abstand des Schwerpunktes von der Achse A $AC = h$ festzustellen, wird die Kurbelstange horizontal gelegt und am Punkt A angehängt. Am Punkt B liegt die Kurbelstange auf einer Dezimalwaage. Die gemessene Last beträgt $P = 50$ kg.

Es ist das polare Trägheitsmoment Θ der Kurbelstange um den Schwerpunkt festzustellen, wobei folgende Angaben gegeben sind: Kurbelstangengewicht $Q = 80$ kg, Lagerabstand $AB = l = 1$ m (siehe Zeichnung), der Zapfenradius des Kreuzkopfes beträgt $r = 4$ cm.



Lösung: $\Theta = \frac{Pl + Qr}{g}\left(\frac{g}{\pi^2}T^2 - \frac{P}{Q}\,l - r\right) = 1{,}77$ kgmsec².

1008. Ein Pendel besteht aus einem Stab AB mit daran befestigter Kugel von der Masse m und dem Radius r. Ihr Mittelpunkt C liegt in der Stabverlängerung. Es ist festzustellen, an welchem Punkt O der Stab aufgehängt werden kann, damit die halbe Schwingungszeit für Schwingungen mit kleinen Ausschlägen den Wert T behält.



Das Trägheitsmoment der Kugel mit der Masse m und dem Radius r, bezogen auf eine Achse durch den Mittelpunkt, ist $\Theta_k = \frac{2}{5}mr^2$. Der Stab ist als masselos zu betrachten.

Lösung: $OC = \frac{1}{2\pi^2}(g\,T^2 + \sqrt{g^2\,T^4 - 1{,}6\,\pi^4 r^2}$.

Da $OC \geqq r$ ist, ist die Lösung dann möglich, wenn $T^2 \geqq 1{,}4\frac{\pi^2}{g}r$; eine Lösung mit negativen Radikanten ist unmöglich.

1009. In welchem Abstand vom Schwerpunkt muß ein physikalisches Pendel aufgehängt werden, damit man die kleinste Schwingungszeit erreicht?

Lösung: In dem Abstand, der dem Trägheitsradius des Pendels entspricht.

1010. Zwei Massen m_1 und m_2 sind mit dem Abstand l voneinander an dem Stab eines Pendels befestigt.

Es ist zu ermitteln, in welchem Abstand x von der unteren Masse m_2 der Aufhängepunkt angebracht werden kann, damit das Pendel mit der kleinsten Schwingungsdauer schwingt. Die Stabmasse bleibt unbeachtet.

Lösung: $x = l\sqrt{m_1}\,\dfrac{\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2}}{m_1+m_2}.$

1011. In welchem Abstand vom Aufhängepunkt eines physikalischen Pendels kann eine zusätzliche Last angebracht werden, ohne daß sich die Schwingungsdauer des Pendels ändert?

Lösung: Im Abstand der reduzierten Länge des physikalischen Pendels.

1012. Ein runder Zylinder mit der Masse M, der Länge $2\,l$ und dem Radius $r = \dfrac{l}{6}$ schwingt um die Achse O, die senkrecht zur Zeichenfläche steht. Wie wird sich die Schwingungszeit des Zylinders verändern, wenn man an demselben eine Punktmasse m im Abstand $OK = \dfrac{85}{72}\,l$ befestigen würde?

Lösung: Die Schwingungszeit wird sich nicht verändern, da die Punktmasse im Zentrum der Zylinderschwingungen angebracht wird.

1013. Im Seismograph (Erdbebenmesser) wird ein physikalisches Pendel angewendet, dessen Achse mit der Vertikalen einen Winkel α bildet. Der Abstand vom Aufhängepunkt bis zum Schwerpunkt des Pendels ist a. Das Trägheitsmoment des Pendels, bezogen auf die Schwerpunktachse, ist Θ_0. Das Pendelgewicht ist P. Es ist die Schwingungszeit des Pendels zu ermitteln.

Lösung: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{g\,\Theta_0 + Pa^2}{Pg\,a\sin\alpha}}.$

1014. Ein elastischer Draht, an dem eine homogene Kugel mit dem Radius r und der Masse m hängt, wird um den Winkel φ_0 aufgewickelt. Danach kann er sich frei abwickeln. Das Drehmoment, das erforderlich ist, um den Draht eine Winkeleinheit zu verdrillen, ist c.

Es ist die Bewegung der Kugel zu ermitteln, wobei der Luftwiderstand unbeachtet bleibt. Das Rückstellmoment des aufgewickelten Drahtes ist proportional dem Drillwinkel.

Lösung: $\varphi = \varphi_0\cos\sqrt{\dfrac{5\,c}{2\,m r^2}}\,t.$

1015. Zur Regulierung mancher Uhren werden Unruhen verwendet. Die Unruhe A kann sich um die durch den Schwerpunkt O laufende Achse drehen. Sie hat ein Massenträgheitsmoment Θ und wird durch eine Spiralfeder in Bewegung gesetzt. Ein Ende derselben ist an der Unruhe befestigt, das andere Ende ist mit dem unbeweglichen Uhrgehäuse verbunden. Beim Drehen der Unruhe entsteht ein Federmoment, das proportional dem Drehwinkel ist. Das zum Aufziehen der Feder um eine Winkeleinheit notwendige Moment ist c.

Es ist das Bewegungsgesetz der Unruhe zu ermitteln, wenn im Anfangsaugenblick das Federmoment Null ist und die Unruhe eine Anfangsgeschwindigkeit ω_0 hat.

Lösung: $\varphi = \omega_0 \sqrt{\frac{\Theta}{c}} \sin \sqrt{\frac{c}{\Theta}}\, t.$

Aufgabe 1015

Aufgabe 1016

1016. Um das Trägheitsmoment Θ_z eines Körpers um die vertikale Achse Oz zu ermitteln, wird er an einem vertikalen Stab OO_1 befestigt. Der Stab wird gedrillt, indem man den Körper A um die Achse Oz um einen geringen Winkel φ_0 verdreht. Danach wird der Körper seinen Schwingungen überlassen. Die Dauer von 100 Schwingungen ist $100\,T_1 = 2$ min, wobei T_1 die Zeit für eine halbe Periode ist. Die Schwingungen sind harmonisch, weil das Torsionsmoment proportional φ ist. Um den Koeffizienten c zu ermitteln, wird ein zweiter Versuch in folgender Weise durchgeführt. Auf dem Stab wird im Punkt O eine Scheibe vom Radius $r = 15$ cm und einem Gewicht $P = 1{,}6$ kg aufgesetzt. Dabei ergibt sich eine Schwingungszeit $T_2 = 1{,}5$ sec.

Es ist mit diesen Angaben das Trägheitsmoment Θ_z des Körpers zu ermitteln.

Lösung: $\Theta_z = \frac{Pr^2}{2g} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = 0{,}117$ kgcmsec^2.

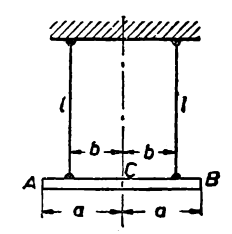
1017. Die Aufgabe 1016 ist in der Annahme zu lösen, daß zur Ermittlung des Koeffizienten c der zweite Versuch folgendermaßen durchgeführt werden soll. Die Scheibe vom Gewicht P und dem Radius r wird an dem Körper befestigt, dessen Trägheitsmoment ermittelt werden soll.

Es ist das Trägheitsmoment des Körpers Θ_z festzustellen, wenn seine Schwingungszeit T_1 und die Schwingungszeit des Körpers mit der befestigten Scheibe T_2 sind.

Lösung: $\Theta_z = \frac{Pr^2}{2g} \frac{T_1^2}{T_2^2 - T_1^2}.$

1018. Ein Stab $AB = 2a$ hängt bifilar an Schnüren der Länge l. Der Abstand zwischen den Schnüren ist $2b$. Es ist die Schwingungszeit des Stabes für Drehschwingungen zu ermitteln.

Es wird angenommen, daß der Stab während der Bewegung in horizontaler Lage bleibt und die Belastung jeder Schnüre die Hälfte des Stabgewichtes beträgt. Bei Ermittlung der Rückstellkraft jeder einzelnen Schnur ist der Ausschlagswinkel der Schnur durch den Ausschlagswinkel des Stabes zu ersetzen.



Lösung: $T = \frac{2\pi a}{b} \sqrt{\frac{l}{3g}}.$

1019. Eine an einem elastischen Draht aufgehängte Scheibe vollführt in einer Flüssigkeit Drehschwingungen. Das Trägheitsmoment der Scheibe, auf die Drehachse bezogen, ist Θ. Das Torsionsmoment bei Drillung des Drahtes um eine Winkeleinheit ist c. Das Reibungsmoment der Flüssigkeit ist $\alpha S\omega$, wobei α die Viskosität der Flüssigkeit, S die gesamte benetzte Scheibenfläche, ω die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe darstellen.

Es ist die Schwingungszeit der Scheibe in der Flüssigkeit zu bestimmen.

Lösung: $T = \frac{4\pi\Theta}{\sqrt{4c\Theta - \alpha^2 S^2}}.$

1020. Es ist das Gesetz für die Amplitudenabnahme der Scheibenschwingung der Aufgabe 1019 zu ermitteln.

Lösung: Die Schwingungsamplituden der Scheibe schwinden in geometrischer Reihe mit dem Quotienten

$$e^{-\frac{\alpha\pi S}{\sqrt{4c\Theta - \alpha^2 S^2}}}.$$

1021. Um den Zähigkeitskoeffizienten einer Flüssigkeit zu bestimmen, beobachtet man die Schwingungen einer Scheibe, die an einem Draht in der Flüssigkeit hängt. An der Scheibe greift das äußere Moment $M_0 \sin pt$ ($M_0 = \text{konst.}$) an. Hierbei werden Resonanzerscheinungen beobachtet. Das Reibungsmoment der Scheibe in der Flüssigkeit ist $\alpha S\omega$, wobei α den Zähigkeitskoeffizient der Flüssigkeit, S die gesamte benetzte Scheibenfläche und ω die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe darstellen.

Es soll der Zähigkeitskoeffizient α der Flüssigkeit festgestellt werden, wenn φ_0 die Amplitude der erzwungenen Scheibenschwingungen bei Resonanz ist.

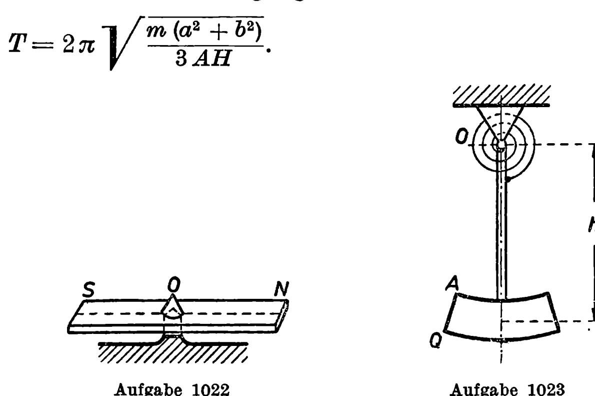
Lösung: $\alpha = \frac{M_0}{\varphi_0 S p}.$

1022. Ein prismenförmiger Magnet mit der Masse m, der Länge $2\,a$ und der Breite $2\,b$ kann sich um die vertikale Achse drehen. Diese läuft durch den Schwerpunkt des Magneten. Bei der Auslenkung des Magneten um einen geringen Winkel aus seiner Gleichgewichtslage (NS-Richtung) wird er sich selbst überlassen.

Es ist die Bewegung des Magneten zu ermitteln. Das Erdmagnetfeld wirkt auf die Magneteinheit mit einer Kraft H dyn ein. Das Dipolmoment des Magneten, d. h. die Summe der Magnetmenge, die auf eine Länge $2\,a$ zwischen den Polen verteilt ist, sind A Einheiten im CGS-System.

Lösung: Harmonische Schwingungen mit

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\,(a^2+b^2)}{3\,AH}}.$$



Aufgabe 1022 Aufgabe 1023

1023. Im Vibrographen, der zur Registrierung horizontaler Schwingungen von Maschinenfundamenten dient, befindet sich ein Pendel OA, das aus einem Hebel mit am Ende angebrachter Last besteht. Dieses Pendel kann um die horizontale Achse O schwingen, wobei die vertikale Lage die Gleichgewichtslage ist.

Es ist die Schwingungszeit des Pendels bei geringen Winkelabweichungen zu ermitteln. Das maximale statische Moment des Pendelgewichtes gegenüber der Drehachse beträgt $Qh = 4{,}5$ kgcm, das Trägheitsmoment bezüglich derselben Achse $\Theta = 0{,}03$ kgcmsec^2, die Federkonstante $c = 0{,}1$ cmkg. (Das Federmoment ist proportional dem Ausschlagswinkel.) In der Gleichgewichtslage des Pendels ist die Feder entspannt. Widerstände bleiben unbeachtet.

Lösung: $T = 0{,}5$ sec.

1024. Ein Vibrograph (siehe vorstehende Aufgabe) ist an einem Fundament befestigt, das horizontale harmonische Schwingungen nach $x = a \sin 60\,t$ cm ausführt.

Es ist die Schwingungsamplitude a des Fundamentes zu ermitteln. Die Amplitude der erzwungenen Schwingung des Vibrographenpendels beträgt 6°.

Lösung: $a = 6{,}5$ mm.

1025. Zwischen den Polen N und S eines Magneten hängt an der Schnur AB der Rahmen eines Galvanometers BC. Am Rahmen außerhalb des Magnetfeldes sind zwei Löffel D und E befestigt. Der Abstand ihrer Mittelpunkte ist $2\,a$. Die Rahmenwicklung ist durch einen äußeren Widerstand geschlossen. Wenn in jedem Löffel eine Kugel mit dem Radius r und dem Gewicht P liegt, schwingt der Rahmen mit einer Schwingungszeit T_1 für eine halbe Periode und hat ein logarithmisches Dekrement δ_1. Liegen in den Löffeln keine Kugeln, so ist die Schwingungszeit des Rahmens für eine halbe Periode T_2 und das logarithmische Dekrement δ_2. Das Rückstellmoment der Schnur ist $c\varphi$, wobei φ der Ausschlagswinkel des Rahmens ist. Das Kräftemoment des Luftwiderstandes und der elektrischenBremsung ist im ersten Fall $\alpha_1\omega$ und im zweiten $\alpha_2\omega$, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit des Rahmens ist.

1) Es sind das Trägheitsmoment Θ des Rahmens, bezogen auf die Drehachse, und die Koeffizienten c, α_1 und α_2 zu ermitteln.

2) Die Werte sind zu berechnen, wobei angenommen wird, daß $T_1 = 11$ sec, $\delta_1 = 0{,}13$, $T_2 = 4{,}5$ sec, $\delta_2 = 0{,}3$, $a = \sqrt{3{,}55}$ cm, $r = 0{,}5$ cm, $p = 4 \cdot 10^{-3}$ kg betragen.

Als logarithmisches Dekrement gedämpfter Schwingungen wird der natürliche Logarithmus des Verhältnisses zweier aufeinanderfolgender Amplituden in einer halben Periode bezeichnet.

Lösung: 1) $$\Theta = \Theta_0 \frac{(\pi^2 + \delta_1^2)\, T_2^2}{(\pi^2 + \delta_2^2)\, T_1^2 - (\pi^2 + \delta_1^2)\, T_2^2}$$

$$\Theta_0 = 2\frac{p}{g}\left(a^2 + \frac{2}{5}r^2\right).$$

2) $$\Theta = 5{,}93 \cdot 10^{-6} \text{ kgcmsec}^2$$

$$c = \Theta \frac{\pi^2 + \delta_2^2}{T_2^2}; \quad c = 2{,}92 \cdot 10^{-6} \text{ kgcm}$$

$$\alpha_1 = 2\,(\Theta + \Theta_0)\,\frac{\delta_1}{T_1}; \quad \alpha_1 = 0{,}85 \cdot 10^{-6} \text{ kgcmsec}$$

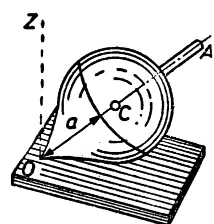
$$\alpha_2 = 2\,\Theta\,\frac{\delta_2}{T_2}; \quad \alpha_2 = 0{,}79 \cdot 10^{-6} \text{ kgcmsec}.$$

1026. Beim Flug eines Geschosses verringert sich der Drall durch den Einfluß des Reibungsmomentes $k\omega$ vom Luftwiderstand, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit des Geschosses und k ein konstanter Proportionalitätsfaktor ist.

Es ist die Gleichung für die Abnahme der Winkelgeschwindigkeit zu ermitteln, wenn die Anfangswinkelgeschwindigkeit ω_0 und das Trägheitsmoment des Geschosses zur Symmetrieachse Θ ist.

Lösung: $\omega = \omega_0\, e^{-\frac{k}{\Theta} t}$.

1027. Ein Kreisel dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = 600 \sec^{-1}$ im Uhrzeigersinn um seine Achse OA. Die Achse OA steht schräg zur Vertikalen. Das untere Ende der Achse bleibt fest. Der Schwerpunkt des Kreisels liegt im Abstand $OC = 30$ cm vom Punkt O auf der Achse OA. Der Trägheitsradius des Kreisels beträgt 10 cm.



Es ist die Bewegung der Achse OA des Kreisels zu ermitteln, wobei angenommen wird, daß bei sehr hoher Winkelgeschwindigkeit ω die Drallachse des Kreisels entlang der Achse OA gerichtet und der Drall $\Theta\omega$ ist.

Lösung: Die Achse OA dreht sich um die Vertikale Oz im Uhrzeigersinn, wobei sie mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = 0{,}49 \sec^{-1}$ einen Kreiskegel beschreibt.

1028. Ein Kreisel, der die Form einer Scheibe vom Durchmesser 30 cm hat, dreht sich mit einer Winkelgeschwindigkeit von $80 \sec^{-1}$ um seine Symmetrieachse. Die Scheibe ist auf eine Achse mit der Länge von 20 cm aufgesetzt, die entlang der Symmetrieachse des Kreisels verläuft.

Es ist die Winkelgeschwindigkeit bei der regulären Präzession des Kreisels zu ermitteln, wobei angenommen wird, daß die Drallachse entlang der Symmetrieachse gerichtet und der Drall $\Theta\omega$ beträgt.

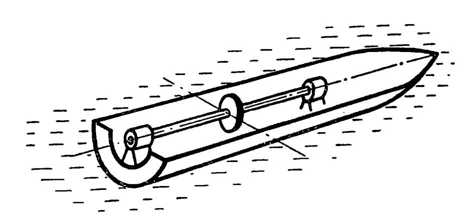
Lösung: $2{,}18 \sec^{-1}$.

1029. Eine Turbine, deren Welle parallel der Längsachse des Schiffes verläuft, hat die Drehzahl 1500 U/min. Die Drehteile wiegen 6 t. Der Trägheitsradius beträgt $\varrho = 0{,}7$ m.

Es ist der durch die Kreiselwirkung erzeugte Druck auf die Lager zu ermitteln, wenn das Schiff um die vertikale Achse schwingt und sich dabei um 10° pro Sekunde dreht. Der Lagerabstand beträgt $l = 2{,}7$ m.

Lösung: 3090 kg.

1030. Es ist der maximale, durch die Kreiselwirkung erzeugte Druck auf die Lager einer schnellaufenden Schiffsturbine zu ermitteln. Das Schiff schaukelt mit einer Amplitude von 9° und der Periode $T = 15$ sec um eine Achse, die senkrecht zur Läuferachse steht. Der Turbinenläufer mit einem Gewicht von 3500 kg und dem Trägheitsradius 0,6 besitzt die Drehzahl $n = 3000$ U/min. Der Lagerabstand beträgt 2 m.



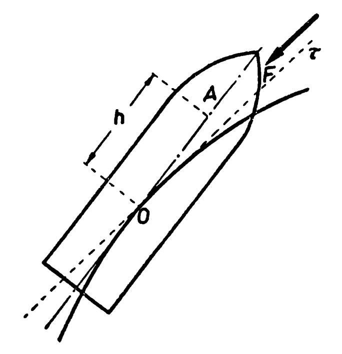
Lösung: 1320 kg.

1031. Das Trägheitsmoment eines Propellers und der Drehteile eines Flugzeugmotors, auf die Kurbelwelle bezogen, beträgt $\Theta = 0{,}8$ kgmsec². Die Drehzahl beträgt $n = 1200$ U/min.

Es ist die Wirkung des Kreiselmomentes dieser Teile auf das Flugzeug zu ermitteln, wenn dieses mit einer Geschwindigkeit $v = 40$ m/sec eine Kurve ($R = 25$ m) durchfliegt.

Lösung: $M = 160$ kgm. In Abhängigkeit von der Richtung der Kurve wird das Flugzeug gedrückt oder gehoben.

1032. Es ist die Zeit T einer vollen Umdrehung der Symmetrieachse eines Artilleriegeschosses um die Tangente der Bewegungsbahn des Geschoßschwerpunktes zu ermitteln. Diese Bewegung erfolgt durch die Einwirkung des Luftwiderstandes $F = 2140$ kg, der parallel zur Tangente gerichtet ist und an der Geschoßachse im Abstand $h = 0{,}2$ m vom Schwerpunkt des Geschosses angreift. Der Drall des Geschosses um die Symmetrieachse beträgt 590 kgmsec.



Lösung: 8,66 sec.

1033. Eine Dampflokomotive wird durch eine Turbine mit $n = 1500$ U/min angetrieben. Die Turbinenachse liegt parallel zur Radachse und hat den gleichen Drehsinn wie die Räder. Das Trägheitsmoment der Drehteile der Turbine, auf die Drehachse bezogen, beträgt $\Theta_z = 20$ kgmsec².

Wie groß ist der zusätzliche Druck auf die Schienen, wenn die Lokomotive in einer Kurve mit dem Radius 250 m und mit einer Geschwindigkeit von 15 m/sec fährt? Die Spurweite beträgt 1,5 m.

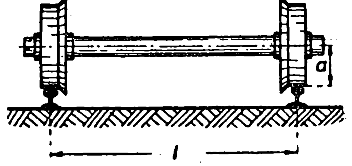
Lösung: Auf der einen Schiene 126 kg nach unten und auf der anderen 126 kg nach oben.

1034. In einem Kollergang wiegt jeder Mahlstein $P = 1200$ kg. Der Trägheitsradius beträgt $\varrho = 0{,}4$ m und der Radius $R = 0{,}5$ m. Die momentane Drehachse des Mahlsteines verläuft durch die Mitte der Berührungslinie des Steines mit dem Gefäßboden.

Es ist der Druck des Mahlsteines auf den horizontalen Gefäßboden zu ermitteln, wenn die Drehzahl der Mahlsteinachse um die vertikale Achse $n = 60$ U/min beträgt.

Lösung: $N = 2740$ kg.

1035. Ein Radsatz mit einem Gewicht $P = 1400$ kg, dem Radius $a = 75$ cm und dem Trägheitsradius $\varrho = \sqrt{0{,}55}\,a$ bewegt sich gleichförmig in einer Kurve mit dem Radius $R = 200$ m. Die Geschwindigkeit beträgt $v = 20$ m/sec.



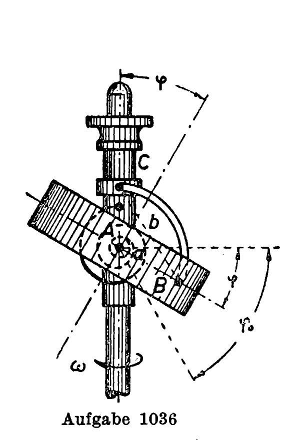
Es ist der Druck des Radsatzes auf die Schienen zu ermitteln. Der Schienenabstand ist $l = 1{,}5$ m.

Lösung: $N = (700 \pm 221)$ kg.

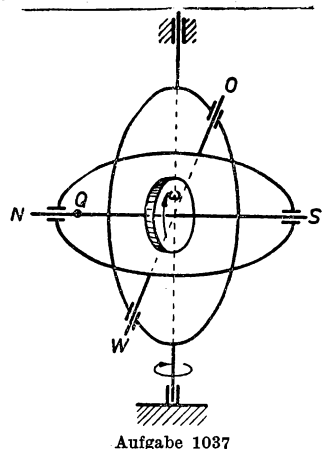
1036. Der Ring AB eines Flugzeugtachometers kann sich um die Achse A, die sich mit einem seiner Durchmesser deckt und die an der Drehachse des Tachometers befestigt ist, drehen. Eine Stange bewegt über eine Kupplung den Zeiger des Gerätes. Bei ungespannter Spiralfeder ist $\varphi = \varphi_0$ (vgl. Zeichnung).

Es ist das Verhältnis zwischen der Winkelgeschwindigkeit des Tachometers und dem Ausschlagswinkel φ der Ringachse bei gegebener Betriebslage zu ermitteln. Die äquatorialen und polaren Trägheitsmomente A und C des Ringes, das Kupplungsgewicht Q, der Abstand $AB = a$, die Länge $BC = b$ und die Federkonstante c kgcm, deren Widerstand proportional dem Wicklungswinkel wächst, werden als gegeben betrachtet. Das Gewicht der Stange BC und die Reibung bleiben unbeachtet. Die Rechnung erfaßt nur die linearen Glieder von a/b.

Lösung: $$\omega^2 = \frac{c\,(\varphi_0 - \varphi) + Q\,a\left(1 - \frac{a}{b}\sin\varphi\right)\cos\varphi}{(C - A)\sin\varphi\cos\varphi}.$$



Aufgabe 1036



Aufgabe 1037

1037. Ein vorher kräftefreier Kreisel in cardanischer Aufhängung ist auf der Breite φ der nördlichen Erdhalbkugel aufgestellt. Die Läuferachse des Kreisels liegt in der Meridianebene entlang der Horizontalen dieser Gegend.

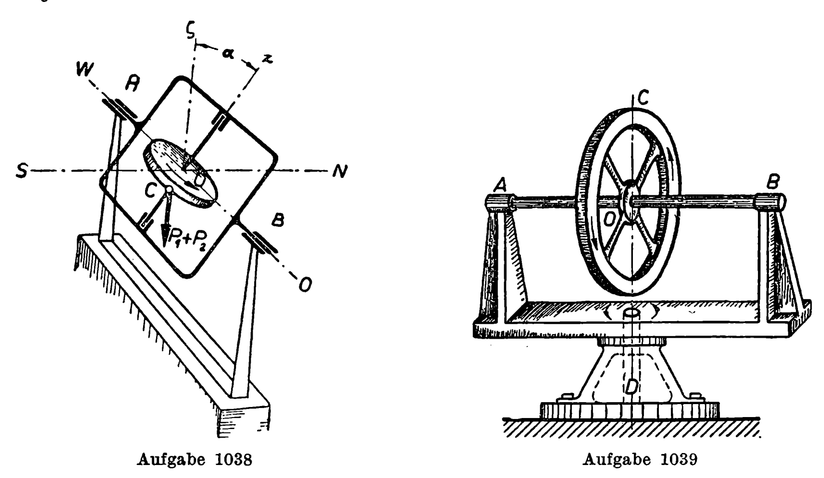
Es ist das Gewicht Q zu ermitteln, das im inneren Ring der Aufhängung so angebracht ist, daß die Läuferachse in der Meridianebene verbleibt, während sie sich mit der Erde dreht. Die Winkelgeschwindigkeit des Läufers um die Achse ist ω, das Trägheitsmoment des Läufers Θ, der Radius vom inneren Aufhängungsring a, die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung ω_1. Die Reibung und die Ringmassen bleiben unbeachtet.

Lösung: $$Q = \frac{\Theta\,\omega\,\omega_1 \sin\varphi}{a}.$$

1038. Die Achse AB eines Kreiselrahmens ist auf einer Breite $\varphi = 30°$ parallel zur OW-Linie aufgestellt. Der Kreisel mit einem Gewicht von $p_1 = 2$ kg, Radius $r = 4$ cm, dreht sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega = 3000$ sec^{-1}. Der gemeinsame Schwerpunkt C des Läufers und des Rahmens liegt auf der Achse Oz des Läufers im Abstand $OC = h$ von der Achse AB. Das statische Moment des Kreisels $H = (p_1 + p_2)\,h = 1{,}3$ gcm.

Es ist die Gleichgewichtslage des Rahmens, d. h. der Ausschlagswinkel α der Läuferachse Oz vom Zenit O zu ermitteln. Der Läufer ist als Scheibe zu betrachten.

Lösung: $\alpha = 45°$.



Aufgabe 1038 Aufgabe 1039

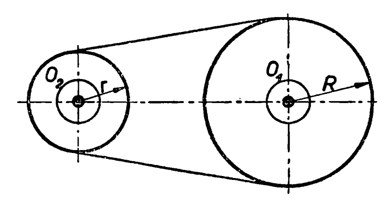
1039. Ein Rad mit dem Radius a und dem Gewicht $2\,p$ dreht sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_1 um die horizontale Achse AB. Die Achse AB dreht sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_2 um die vertikale Achse CD, die durch das Radzentrum läuft. Die Drehrichtungen sind mit Pfeilen gekennzeichnet. Es soll der Druck N_A und N_B auf die Lager A und B ermittelt werden ($AO = OB = h$). Die Rädermasse soll gleichmäßig auf dem Umfang verteilt sein.

Lösung: $N_A = p\left(1 + \frac{a^2\,\omega_1\,\omega_2}{g\,h}\right)$; $N_B = p\left(1 - \frac{a^2\,\omega_1\,\omega_2}{gh}\right)$.

40. Kinetische Energie des Massensystems

1040. Die große Scheibe einer Kettenübersetzung dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Der Scheibenradius ist R, und das auf die Drehachse bezogene Trägheitsmoment ist Θ_1. Die kleine Scheibe hat den Radius r und das Trägheitsmoment Θ_2. Die auf die Scheiben aufgelegte Kette wiegt Q.

Es soll die kinetische Energie des ganzen Systems errechnet werden.



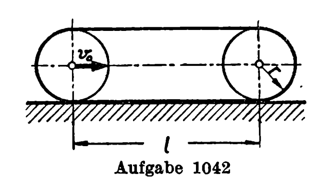
Lösung: $T = \frac{\omega^2}{2}\left[\Theta_1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 \Theta_2 + \frac{Q}{g} R^2\right]$.

1041. Ein Geschoß wiegt 920 kg und hat an der Laufmündung eine Geschwindigkeit von $v_0 = 900$ m/sec und eine Winkelgeschwindigkeit, der 45 U/sec entsprechen. Das Trägheitsmoment des Geschosses, auf seine Längsachse bezogen, beträgt 2 kgmsec². Es soll das Verhältnis zwischen der kinetischen Energie der Drehbewegung und der kinetischen Energie der Translationsbewegung des Geschosses in Prozenten angegeben werden.

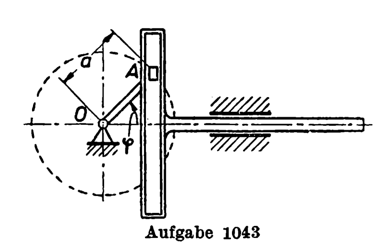
Lösung: 0,2 %.

1042. Es soll die kinetische Energie einer Traktorraupe, die sich mit einer Geschwindigkeit v_0 bewegt, ermittelt werden. Der Abstand zwischen den Radachsen beträgt l, die Raddurchmesser sind $2\,r$, das Gewicht eines Meters der Raupenkette beträgt γ.

Lösung: $T = 2\,\frac{\gamma}{g}\,(l + \pi r)\,v_0^2.$



Aufgabe 1042



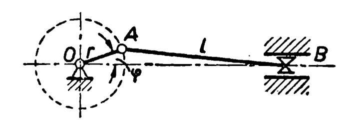
Aufgabe 1043

1043. Es soll die kinetische Energie einer Kulisse errechnet werden. Das Trägheitsmoment der Kurbel OA, auf die Drehachse durch O bezogen, ist Θ_0. Die Kurbellänge ist a, die Kulissenmasse m. Die Masse des Gleitsteines bleibt unbeachtet. Bei welchen Lagen des Mechanismus wird die kinetische Energie die höchsten und die niedrigsten Werte erreichen?

Lösung: $T = \frac{1}{2}\,(\Theta_0 + m\,a^2 \sin^2\varphi)\,\omega^2.$

Die geringste kinetische Energie wird bei $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$, die höchste bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ erreicht.

1044. Es soll die kinetische Energie eines Kurbelgetriebes (siehe Zeichnung) errechnet werden, wenn die Kurbelmasse m_1, die Kurbellänge r, die Masse des Gleitstückes m_2 und die Kurbelstangenlänge l ist. Die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel ist ω.

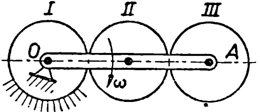


Lösung: $T = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}m_1 + m_2\left[\sin\varphi + \frac{r}{2\,l}\,\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\varphi}}\right]^2\right\} r^2\,\omega^2.$

1045. Die Aufgabe 1044 soll unter Berücksichtigung der Masse m_3 der Kurbelstange gelöst werden, wenn die Kurbel OA senkrecht zur Gleitführung steht.

Lösung: $T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_1 + m_2 + m_3\right) r^2\,\omega^2.$

1046. Ein Planetenradgetriebe, das sich in einer horizontalen Ebene befindet, wird durch eine Kurbel OA angetrieben, die die Achsen dreier gleicher Räder I, II und III verbindet. Das Rad I ist fest. Die Kurbel dreht sich mit einer Winkelgeschwindigkeit ω. Das Gewicht jedes Rades ist P. Der Radius jedes Rades ist r, das Kurbelgewicht Q.

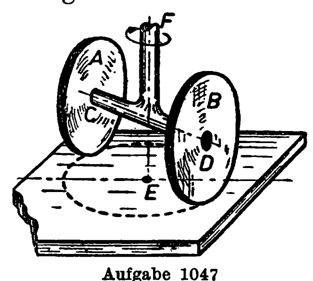


Es ist die kinetische Energie des Mechanismus zu errechnen, wobei angenommen wird, daß die Räder Scheiben und die Kurbel ein Stab sind. Wie groß ist die Arbeit, die an Rad III wirkt?

Lösung: $T = \frac{r^2 \omega^2}{3g} (33P + 8Q)$; die Arbeit ist Null.

1047. Zwei Mahlsteine A und B sind an der horizontalen Achse CD, die sich um die vertikale Achse EF dreht, befestigt. Jeder Stein wiegt 200 kg. Die Durchmesser der Steine sind $2R = 1$ m. Der Abstand CD ist 1 m. Es ist die kinetische Energie der Mahlsteine bei 20 U/min der Achse CD zu ermitteln, wobei angenommen wird, daß bei Errechnung von Trägheitsmomenten die Mahlsteine als dünne Scheiben anzusehen sind.

Lösung: 39 kgm.



Aufgabe 1047

Aufgabe 1048

1048. Beim Schwingen der Kurbel OC um die Achse O, die senkrecht zur Zeichenfläche steht, wird der Stab AB durch das Gleitstück A bewegt. Die Kurbel OC mit einer Länge R ist als Stab mit der Masse m_C und das Gleitstück als Masse m_A anzusehen. Die Stabmasse AB ist m_B, der Abstand $OK = l$.

Es soll die kinetische Energie des Mechanismus als Funktion der Winkelgeschwindigkeit und des Drehwinkels der Kurbel OC errechnet werden. Das Gleitstück ist als punktförmige Masse anzusehen.

Lösung: $T = \frac{\omega^2}{6 \cos^4 \varphi} [m_C R^2 \cos^4 \varphi + 3 l^2 (m_A + m_B)]$.

1049. Ein Flugzeug mit einem Gewicht von 3000 kg stützt sich auf drei Punkte, wobei auf das Heckrad 10% des Gesamtgewichtes entfallen. Wenn die Luftschraube die Drehzahl $n = 1432$ U/min erreicht hat, zeigen die Waagen, auf denen die Vorderräder stehen, $N_1 = 1100$ kg und $N_2 = 1600$ kg an.

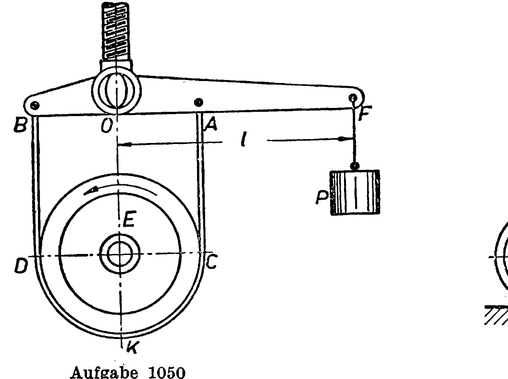
Es ist die Leistung des Flugzeugmotors zu ermitteln, wenn der Wirkungsgrad der Übertragung zur Schraube $\eta = 0{,}8$ und die Spurweite des Flugzeuges $l = 2$ m betragen.

Lösung: 1250 PS.

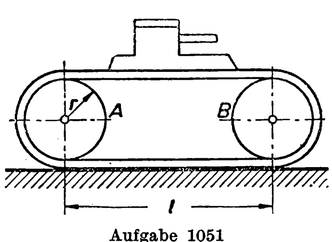
1050. Bei einem Pronyschen Zaum, der zur Leistungsmessung von Elektromotoren dient, umfaßt ein Band die untere Hälfte der Scheibe E des zu prüfenden Motors. Die Enden B und A sind an dem Hebel BF befestigt. Der Hebel stützt sich im Punkt O auf einer Schneide ab. Durch Heben oder Senken des Hebels kann man die Spannungen im Seil ändern und somit auch die Reibungskraft zwischen dem Band und der Scheibe regulieren. Die horizontale Gleichgewichtslage des Hebels BF wird durch Anhängen eines Gewichtes P erreicht.

Es ist die Motorleistung für den Augenblick zu ermitteln, in dem er 240 U/min macht und das Gewicht $P = 3$ kg bei $l = 50$ cm beträgt.

Lösung: 0,5 PS = 0,37 kW.



Aufgabe 1050



Aufgabe 1051

1051. Ein Panzerwagen wird durch einen Motor, der vier Räder (zwei an jeder Seite) vom Radius $r = 50$ cm antreibt, in Bewegung gesetzt. Die Räder greifen mit ihren Zähnen in die Raupen ein. Der Abstand l zwischen den Radachsen A und B beträgt 2 m. Nach 18 Fahrsekunden erreicht der Panzer eine Geschwindigkeit von 36 km/h.

Es ist die mittlere Motorleistung des Panzers festzustellen, wenn derselbe ohne Räder und ohne Raupe $P_1 = 5$ t wiegt. Jedes Rad wiegt $P_2 = 200$ kg. Jede Raupe wiegt $P_3 = 500$ kg. Die Räder sind als Scheiben zu betrachten.

Lösung: 69,4 PS.

1052. Auf einer 60 mm starken Welle sitzt ein Schwungrad mit einem Durchmesser von 50 cm. Das Schwungrad läuft mit 180 U/min.

Es ist der Reibungskoeffizient μ zwischen der Welle und den Lagern zu ermitteln, wenn nach Abschaltung des Antriebes das Schwungrad bis zum Stillstand noch $U = 90$ Umdrehungen macht. Die Masse des Schwungrades ist als gleichmäßig auf dem Umfang verteilt anzunehmen.

Lösung: $\mu = 0,067$.

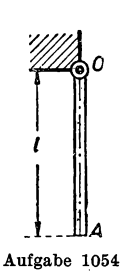
1053. Auf einer 10 cm starken Welle von 0,5 t Gewicht sitzt ein Schwungrad mit einem Durchmesser von 2 m und einem Gewicht von 3 t. Im gegebenen Augenblick dreht sich das Rad mit einer Drehzahl von 60 U/min.

Wieviel Umdrehungen wird das freidrehende Rad bis zum Stillstand vollbringen, wenn der Reibungskoeffizient in den Lagern 0,05 beträgt? Die Schwungradmasse ist als gleichmäßig auf den Umfang verteilt anzunehmen.

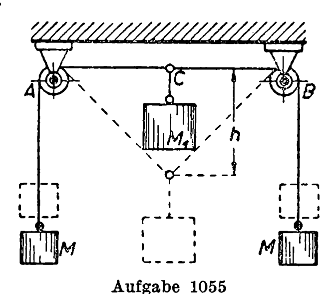
Lösung: 109,8 Umdrehungen.

1054. Ein schwerer Stab OA von der Länge $l = 32{,}7$ m ist mit dem Ende O auf eine Achse aufgesetzt, um die er sich in vertikaler Ebene drehen kann. Welche Geschwindigkeit muß das Stabende A erhalten, damit der Stab eine Viertelumdrehung macht?

Lösung: $v = \sqrt{3\,gl} = 9{,}81$ m/sec.



Aufgabe 1054



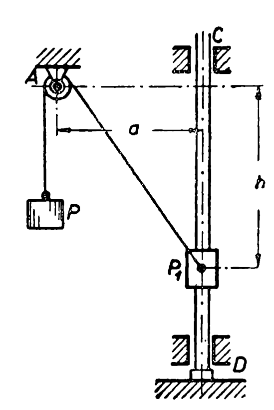
Aufgabe 1055

1055. Über zwei kleine Rollen A und B, die sich auf einer Horizontalen im Abstand $AB = 2\,l$ voneinander befinden, läuft eine Schnur, an deren Enden zwei Massen M von je p Gramm Gewicht hängen. An der Mitte C der Schnur zwischen den beiden Rollen hängt eine Masse M_1 von p_1 Gramm Gewicht. Diese Masse läßt man ohne Anfangsgeschwindigkeit fallen.

Es ist der größte Abstand h zu ermitteln, der von der Last M_1 beim Fallen erreicht wird. Dabei ist anzunehmen, daß die Schnurlänge genügend groß und $p_1 < 2\,p$ ist.

Lösung: $h = \dfrac{4\,pp_1\,l}{4\,p^2 - p_1^{\,2}}$.

1056. An den Enden einer undehnbaren Schnur, die über eine kleine Scheibe A läuft, hängen die Lasten P und P_1. Die Last P_1 kann entlang eines glatten vertikalen Stabes CD gleiten. Der Stab befindet sich im Abstand a von der Scheibenachse. Der Schwerpunkt der Last P_1 befindet sich im Anfangsmoment auf einer Horizontalen mit der Scheibenachse. Unter Einwirkung der Schwerkraft beginnt die Last P_1 ohne Anfangsgeschwindigkeit zu sinken.



Es soll die Sinkgeschwindigkeit der Last P_1 als Funktion der Höhe h bestimmt werden.

Lösung: $v^2 = 2\,g\,(a^2 + h^2)\,\dfrac{P_1\,h - P\,(\sqrt{a^2 + h^2} - a)}{P_1\,(a^2 + h^2) + Ph^2}$.

1057. Eine Last P, auf der eine zweite Last P_1 liegt, wird durch eine Schnur, die über eine Rolle läuft, an einem Körper A mit dem Gewicht Q befestigt, um diesen aus seiner Ruhestellung in Bewegung zu setzen. Der Körper A befindet sich auf einer rauhen horizontalen Fläche BC. Nachdem die beiden Lasten einen Abstand s_1 herabgesunken sind, wird die aufgelegte Last P_1 durch den Ring D abgehoben. Darauf kommt die Last P, nachdem sie noch die Strecke s_2 herabgesunken ist, zum Stillstand.

Es ist der Koeffizient der gleitenden Reibung μ zwischen dem Körper A und der Fläche zu ermitteln. Die Schnurmasse, die Scheibenmasse und die Scheibenreibung sollen vernachlässigt werden. Gegeben sind: $Q = 0{,}8$ kg, $P = 0{,}1$ kg, $P_1 = 0{,}1$ kg, $s_1 = 50$ cm, $s_2 = 30$ cm.

Lösung: $\mu = \dfrac{s_1 (P_1 + P)\ (P + Q) + s_2 P\ (P + P_1 + Q)}{Q\ [s_1\ (P + Q) + s_2 (P + P_1 + Q)]} = 0{,}2.$

1058. Eine Schnur der Länge L, deren einer Teil auf einem glatten horizontalen Tisch liegt, bewegt sich unter dem Einfluß des vom Tisch herunterhängenden Schnurteils.

Es ist die Zeit T zu bestimmen, in der die Schnur vom Tisch gleitet. Gegeben ist, daß im Anfangsmoment die herabhängende Länge l ist und die Anfangsgeschwindigkeit Null beträgt.

Lösung: $T = \sqrt{\dfrac{L}{g}} \ln \left(\dfrac{L + \sqrt{L^2 - l^2}}{l}\right).$

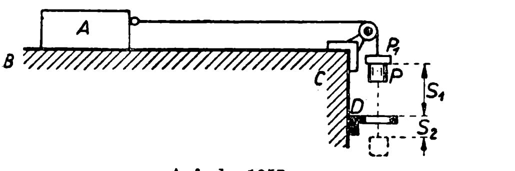
1059. Eine massebehaftete Schnur von der Länge $2\,a$, die über einem glatten Stift in Ruhestellung hängt, beginnt sich mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 zu bewegen. Es ist die Schnurgeschwindigkeit für den Moment zu ermitteln, in dem die Schnur den Stift verläßt.

Lösung: $v = \sqrt{ag + v_0^2}.$

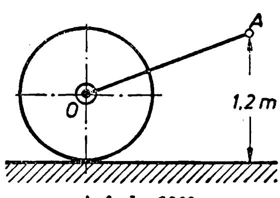
1060. Die zylindrische Walze mit dem Durchmesser 60 cm und dem Gewicht 392 kg wird durch einen Mann in Bewegung gesetzt, der mit konstanter Kraft P in Richtung AO auf den Handgriff A drückt. Die Länge von AO beträgt 1,5 m. Die Höhe des Punktes A über der Horizontalen beträgt 1,2 m.

Man bestimme die Kraft P, mit welcher der Mann der Walzenachse nach einem 2 m langen Weg die Geschwindigkeit von 80 cm/sec (g=980 cm/sec²) erteilt. Die Reibung soll vernachlässigt werden.

Lösung: $P = 12$ kg.



Aufgabe 1057



Aufgabe 1060

1061. Man bestimme in Aufgabe 1060 die Größe der konstanten Kraft P bei Berücksichtigung des Rollwiderstandes, dessen Hebelarm $f = 0{,}5$ cm beträgt. Um wieviel Kilogramm muß die Kraft P kleiner werden, damit bei der weiteren Bewegung der Walze ihre Geschwindigkeit konstant bleibt. Das Moment, welches der Bewegung entgegenwirkt, ist gleich dem Produkt aus Normaldruck und Hebelarm der rollenden Reibung.

Lösung: 1) $P = 20{,}4$ kg; 2) um 12,13 kg.

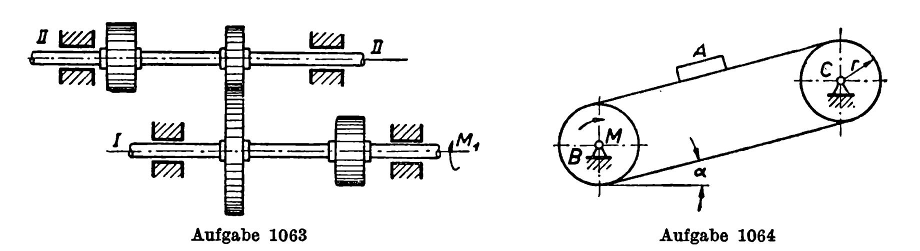
1062. Welche Anfangsgeschwindigkeit muß man der Achse eines Rades vom Radius r erteilen, damit sich das Rad aufwärts bewegt. Das Rad rollt ohne zu gleiten bis zur Höhe h einer schiefen Ebene, die mit der Horizontalen den Winkel α bildet. Der Hebelarm der rollenden Reibung beträgt f. Das Rad wird als homogene Scheibe betrachtet. Die Anfangsgeschwindigkeit wirkt in Richtung der Ebene.

Lösung: $v = \frac{2}{3}\sqrt{3gh\left(1 + \frac{f}{r}\operatorname{ctg}\alpha\right)}$.

1063. Die Wellen I und II haben einschließlich der darauf befindlichen Scheiben und Zahnräder folgende Trägheitsmomente:
$\Theta_1 = 500$ kgcmsec^2, $\Theta_2 = 400$ kgcmsec^2. Das Übersetzungsverhältnis des Zahnradgetriebes beträgt $k_{12} = \frac{3}{2}$.

Nach wieviel Umdrehungen wird die Welle II $n_2 = 120$ U/min ausführen, wenn das System aus dem Stillstand durch das Moment $M_1 = 50$ kgm in Bewegung gesetzt wird? Das Moment M_1 greift an der Welle I an. Von der Lagerreibung ist abzusehen.

Lösung: Nach 2,34 Umdrehungen.



Aufgabe 1063 Aufgabe 1064

1064. Ein Förderband, das über die Scheiben B und C läuft und unter einem Winkel α zur Horizontalen geneigt ist, wird von einem konstanten Drehmoment M an der Scheibe B aus dem Stillstand in Bewegung gesetzt.

Man bestimme die Geschwindigkeit v des Förderbandes als Funktion des Förderweges s (entlang des Förderbandes), wenn das Gewicht der zu hebenden Last A gleich P ist und jede der beiden Scheiben B und C, deren Halbmesser r und deren Gewicht Q ist, homogene runde Zylinder darstellen.

Die Masse des Förderbandes ist zu vernachlässigen. Ein Schlupf des Bandes tritt nicht auf.

Lösung: $v = \sqrt{\frac{2g(M - Pr\sin\alpha)}{r(P+Q)}\,s}$.

1065. Eine Last P hängt an einem Seil, das auf einer zylindrischen Trommel mit horizontaler Drehachse aufgewickelt ist.

Man bestimme die Geschwindigkeit beim Sinken der Last um die Höhe h. Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt Null, das Gewicht der Trommel Q. Die Lagerreibung und die Massen von Seil und Welle sind zu vernachlässigen. Man betrachte die Trommel als homogenen runden Zylinder.

Lösung: $v = 2\sqrt{gh\frac{P}{2P+Q}}$.

1066. Ein epizyklisches Getriebe in einer horizontalen Ebene wird durch das konstante Drehmoment M, das an der Kurbel OA angreift, aus dem Stillstand in Bewegung gesetzt.

Man bestimme die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel als Funktion des Drehwinkels. Das feststehende Rad I hat den Radius r_1, das bewegliche Rad II den Radius r_2 und das Gewicht P, die Kurbel OA hat das Gewicht Q. Die Räder werden als homogene Scheiben, die Kurbel als homogene Stange betrachtet.

Lösung: $\omega = \frac{2}{r_1+r_2}\cdot\sqrt{\frac{3gM}{9P+2Q}\varphi}$.

Aufgabe 1066

Aufgabe 1067

1067. In einem Nockengetriebe, das in einer horizontalen Ebene läuft, wird durch Antrieb des Exzenters A die Rolle B mit der Stange D in hin- und hergehende Bewegung versetzt. Die Feder E, die mit der Stange verbunden ist, sorgt für das ständige Anliegen der Rolle an dem Exzenter. Das Gewicht des Exzenters beträgt p, die Exzentrizität e ist gleich der Hälfte des Radius. Die Federkonstante beträgt c. In der äußersten linken Lage des Punktes B ist die Feder ungespannt.

Welche Winkelgeschwindigkeit muß dem Exzenter erteilt werden, damit er die Stange D ohne weiteren Antrieb aus der äußersten linken Lage in die äußerste rechte Lage versetzen kann? Die Massen von Rolle, Feder und Stange dürfen vernachlässigt werden.

Lösung: $\omega = 2\sqrt{\frac{cg}{3p}}$.

1068. Welche Strecke legt ein Radfahrer ohne zu treten bis zum Stillstand zurück, wenn er eine Anfangsgeschwindigkeit von 9 km/h hat? Das Gesamtgewicht von Fahrradrahmen und Radfahrer beträgt 80 kg, das Gewicht jedes Rades beträgt 5 kg. Die Masse jedes Rades vom Radius 50 cm ist als gleichmäßig auf dem Umfang verteilt anzusehen. Der Hebelarm der rollenden Reibung gegen den Fahrboden beträgt 0,5 cm.

Lösung: 35,6 m

1069. Ein Flugzeug landete mit 10 m/sec Geschwindigkeit auf dem Flugplatz. Man bestimme die Strecke, die das Flugzeug bis zum Stillstand ausrollt, wenn der Luftwiderstand 60 kg, das Gewicht beider Räder 100 kg, der Halbmesser der Räder 0,5 m, das Gewicht des Flugzeuges ohne Räder 1100 kg und der Hebelarm der rollenden Reibung gegenüber dem Fahrboden 1 cm betragen.

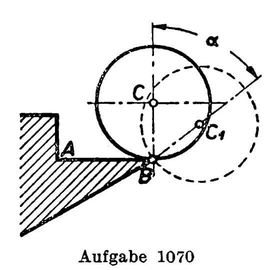
Lösung: 73 m.

1070. Ein schwerer homogener Zylinder bewegt sich ohne bemerkenswerte Anfangsgeschwindigkeit und ohne zu gleiten auf der horizontalen Bühne AB, deren Rand B zugespitzt ist und parallel zur Zylinderseite läuft. Der Radius des Zylinders ist r. Im Augenblick der Loslösung des Zylinders von der Bühne hat die Fläche, die durch die Zylinderachse und den Rand B hindurchgeht, einen Winkel $CBC_1 = \alpha$ zur Vertikalen.

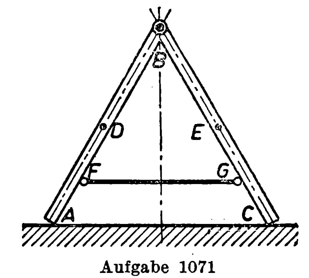
Es soll die Winkelgeschwindigkeit des Zylinders im Augenblick des Loslösens sowie der Winkel α bestimmt werden. Man vernachlässige Reibung und Luftwiderstand.

Im Moment des Loslösens des Zylinders von der Bühne ist die statische Auflagerkomponente in Richtung der Geraden C_1B gleich dem Wert der Zentrifugalkraft des Zylinders $\frac{Q}{g} r\,\omega^2$, wobei Q das Gewicht des Zylinders ist.

Lösung: $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{7r}}$; $\alpha = \arccos\frac{4}{7} = 55{,}1^\circ$.



Aufgabe 1070



Aufgabe 1071

1071. Die Malerleiter ABC mit dem Gelenk B steht auf glattem horizontalem Fußboden. Die Länge beträgt $AB = BC = 2\,l$. Die Schwerpunkte befinden sich in der Mitte D und E der Stäbe. Der Trägheitsradius jeder Leiterhälfte in bezug auf die Achse, die durch den entsprechenden Schwerpunkt geht, ist gleich k, die Entfernung des Gelenkes B vom Fußboden ist h. Durch den Bruch der Verbindungsstange FG beginnt die Malerleiter zu fallen. Man vernachlässige die Reibung des Gelenkes und bestimme:

1) die Geschwindigkeit v des Punktes B im Moment, in dem dieser den Boden berührt,

2) die Geschwindigkeit v des Punktes B in dem Moment, in dem sein Abstand vom Boden $\frac{h}{2}$ beträgt.

Lösung: 1) $v = 2\,l\sqrt{\frac{gh}{l^2 + k^2}}$; 2) $v = \frac{1}{2}\sqrt{gh\frac{16\,l^2 - h^2}{2\,(l^2 + k^2)}}$.

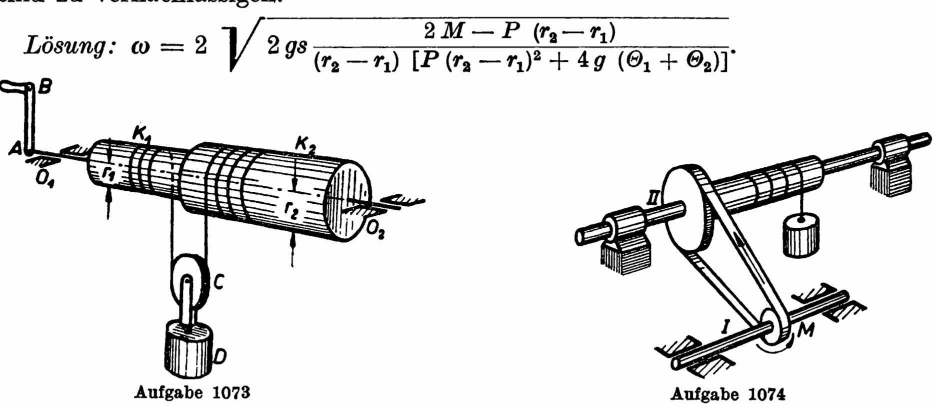
1072. Der $2a$ lange Stab AB fällt aus der vertikalen Ruhelage, wobei sein Ende A auf dem glatten horizontalen Fußboden gleitet. Man bestimme die Geschwindigkeit des Stangenschwerpunktes als Funktion seiner Höhe h über dem Boden.

Lösung: $v = (a - h) \cdot \sqrt{\dfrac{6\,g\,(a+h)}{4\,a^2 - 3\,h^2}}$.

1073. In einer Differentialwinde werden zwei fest verbundene Trommeln K_1 und K_2 mit den Radien r_1 und r_2 und den Trägheitsmomenten Θ_1 und Θ_2 in bezug auf die Achse O_1O_2 durch den Handgriff AB in drehende Bewegung gebracht. Die lose Rolle C hängt an einem gewichtslosen, undehnbaren Faden, dessen linkes Ende um die Welle K_1 und dessen rechtes Ende um die Welle K_2 gewickelt ist. Beim Drehen der Welle spult sich der linke Zweig des Fadens von der Trommel K_1 ab, der rechte Zweig wickelt sich auf der Trommel K_2 auf. Der Handgriff AB überträgt das konstante Drehmoment M. Die Last D vom Gewicht P hängt an der losen Rolle C.

Man finde die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der Handgriff in dem Augenblick gedreht wird, in dem sich die Last D auf der Höhe s befindet. Die Höhe s rechnet von der Ruhelage aus. Die Massen von Handgriff, Rolle und Welle sind zu vernachlässigen.

Lösung: $\omega = 2\sqrt{2\,gs\,\dfrac{2\,M - P\,(r_2 - r_1)}{(r_2 - r_1)\,[P\,(r_2 - r_1)^2 + 4\,g\,(\Theta_1 + \Theta_2)]}}$.



Aufgabe 1073 Aufgabe 1074

1074. Eine Winde wird durch einen Riementrieb angetrieben, der die auf der Welle der Winde angebrachte Scheibe II mit der auf der Welle des Motors angebrachten Scheibe I verbindet. Das Drehmoment M greift an der Scheibe I an, die das Gewicht P_1 und den Radius r besitzt. Das Gewicht der Scheibe II beträgt P_2, ihr Radius ist R, das Gewicht der zu hebenden Last ist P_4, das Gewicht der Windentrommel P_3, ihr Halbmesser r. Die Winde wird aus dem Ruhezustand in Gang gesetzt.

Man finde die Geschwindigkeit der Last P_4 in dem Moment, in dem sie die Höhe h erreicht hat. Die Massen von Riemen und Seil sowie die Reibung sind zu vernachlässigen. Die Scheiben und die Trommel sind als homogene runde Zylinder anzusehen.

Lösung: $v = 2\sqrt{\dfrac{gh\left(M\dfrac{R}{r^2} - P_4\right)}{P_1\left(\dfrac{R}{r}\right)^2 + P_2\left(\dfrac{R}{r}\right)^2 + P_3 + 2\,P_4}}$.

1075. Man löse die Aufgabe 1074 unter Berücksichtigung der Seilmasse. Die Länge des Seiles ist l, das Gewicht pro Längeneinheit beträgt p. Im Anfangsaugenblick hängt das Gewicht an einem $2\,h$ langen Seilende.

Lösung: $$v = 2\sqrt{\frac{gh\left(M\frac{R}{r^2} - P_4 - \frac{3}{2}\,ph\right)}{P_1\left(\frac{R}{r}\right)^2 + P_2\left(\frac{R}{r}\right)^2 + P_3 + 2\,P_4 + 2\,pl}}.$$

1076. Ein konstantes Drehmoment M greift an der Trommel einer Winde vom Halbmesser r und dem Gewicht P_1 an. Am Ende A des auf der Trommel aufgewickelten Seiles ist die Last P_2 angebunden, die sich auf einer schiefen Ebene aufwärts bewegt. Letztere bildet mit der Horizontalen den Winkel α.

Welche Winkelgeschwindigkeit bekommt die Trommel der Winde, nachdem sie sich um $\Delta\,\varphi$ gedreht hat? Der Reibungskoeffizient der Last gegen die schiefe Ebene ist μ. Man vernachlässige die Masse des Seiles. Die Trommel ist als homogener runder Zylinder anzusehen. Im Anfangsaugenblick war das System im Ruhezustand.

Lösung: $$\omega = \frac{2}{r}\sqrt{g\,\frac{M - P_2 r\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{P_1 + 2\,P_2}\,\Delta\,\varphi}.$$

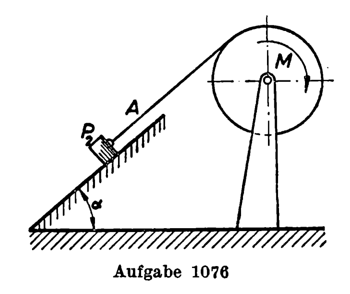
1077. Man löse die vorstehende Aufgabe unter Berücksichtigung der Masse des Seiles, an welchem die Last P_2 befestigt ist. Die Länge des Seiles ist l, das Gewicht einer Längeneinheit des Seiles beträgt p. Im Anfangsaugenblick hing ein Teil des Seiles um die Länge a von der Winde der Trommel herab.

Lösung: $$\omega = \frac{1}{r}\sqrt{2\,g\,\frac{2\,M - 2\,P_2 r\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) - p\,r\,(2\,a - r\,\Delta\,\varphi)\sin\alpha}{P_1 + 2\,P_2 + 2\,pl}\,\Delta\,\varphi}.$$

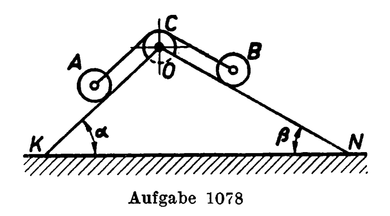
1078. Zwei Räder A und B sind durch ein Seil verbunden. Das Rad A rollt auf der schiefen Ebene OK abwärts und das Rad B auf der schiefen Ebene ON aufwärts. Das Seil ist über die feste Rolle C gelegt, die sich um die feststehende horizontale Achse O dreht.

Man finde die Geschwindigkeit der Radachse A. Im Anfangsaugenblick ist das System in Ruhe. Alle Rollen werden als homogene Scheiben mit demselben Gewicht und Halbmesser angesehen. Man vernachlässige das Gewicht des Seiles. Die Neigungswinkel der schiefen Ebenen sind α und β (vgl. Zeichnung).

Lösung: $$v = 2\sqrt{\frac{1}{7}\,gs\,(\sin\alpha - \sin\beta)}.$$



Aufgabe 1076



Aufgabe 1078

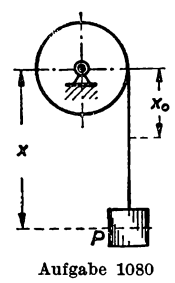
1079. Man löse die Aufgabe 1078 unter Berücksichtigung der rollenden Reibung der Räder auf den schiefen Ebenen. Der Reibungskoeffizient für rollende Reibung ist f, die Halbmesser der Räder sind r.

Lösung: $v = 2\sqrt{\frac{1}{7}\, gs\left[\sin\alpha - \sin\beta - \frac{f}{r}\,(\cos\alpha + \cos\beta)\right]}$.

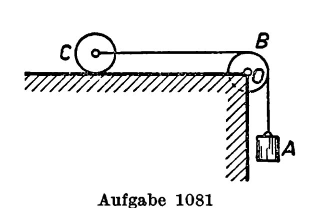
1080. Eine Last P hängt an einem unelastischen homogenen Seil der Länge l, das auf einer zylindrischen Trommel mit horizontaler Drehachse aufgewickelt ist. Das Trägheitsmoment der Trommel, auf die Drehachse bezogen, ist Θ, der Halbmesser der Trommel und das Gewicht einer Längeneinheit des Seiles p.

Man bestimme die Geschwindigkeit der Last und den Zeitpunkt, in dem die Länge des herabhängenden Teiles des Seiles x ist. Im Anfangsaugenblick ist die Geschwindigkeit der Last $v_0 = 0$ und die Länge des herunterhängenden Teiles des Seiles x_0. Die Reibung der Trommelachse und die Stärke des Seiles sind zu vernachlässigen.

Lösung: $v = R\sqrt{\frac{g\,[2P + p\,(x + x_0)]\,(x - x_0)}{\Theta g + (P + pl)\,R^2}}$.



Aufgabe 1080



Aufgabe 1081

1081. Die Last A mit dem Gewicht P_1 hängt an einem homogenen unelastischen Seil mit einer Länge L und einem Gewicht Q. Das Seil läuft über die feste Rolle B, diese dreht sich um die Achse O, die senkrecht zu der Zeichenfläche liegt. Das andere Ende des Seiles ist an der Achse der Walze C befestigt, die ohne Schlupf über eine horizontale Fläche rollt. Die Rolle B und die Walze C sind homogene Scheiben, die je den Halbmesser r und das Gewicht P_2 besitzen. Der Reibungskoeffizient der rollenden Reibung der Walze C auf der horizontalen Fläche ist f. Im Anfangsaugenblick, in dem sich das System in Ruhe befindet, hängt das Seil um die Länge l von B herab.

Man bestimme die Geschwindigkeit der Last A als Funktion der zurückgelegten Wegstrecke h.

Lösung: $v = \sqrt{\frac{2gh\left[P_1 + \frac{Q}{2L}\,(2l + h) - P_2\,\frac{f}{r}\right]}{P_1 + 2P + Q}}$.

41. Ebene parallele Bewegung des starren Körpers

1082. Ein starrer Körper besteht aus dem Stab AB mit einer Länge von 80 cm und einem Gewicht von 1 kg sowie der daran befestigten Scheibe vom Halbmesser 20 cm und dem Gewicht von 2 kg. Im Anfangsaugenblick (vertikale Lage des Stabes) wird dem Körper eine solche Beschleunigung erteilt, daß die Geschwindigkeit des Schwerpunktes M_1 des Stabes Null ist und die Geschwindigkeit des Schwerpunktes M_2 der Scheibe 360 cm/sec beträgt. Er bewegt sich auf der Horizontalen nach rechts.

Man finde die nachfolgende Bewegung des Körpers und berücksichtige dabei nur die Bewegung des Schwerpunktes.

Lösung: Der Körper dreht sich gleichmäßig mit der Winkelgeschwindigkeit 6 $\sec^{-1}$ um seinen Schwerpunkt, der die Parabel $y^2 = 117{,}5\,x$ beschreibt (der Anfang der Koordinate ist im Punkt B, die Achse Oy ist auf der Horizontalen nach rechts, die Achse Ox nach unten gerichtet).

1083. Zwei Massen M_1 und M_2, deren Gewichte $p_1 = 2$ kg und $p_2 = 1$ kg betragen, sind durch einen Stab der Länge $l = 60$ cm verbunden. Im Anfangsaugenblick $t = 0$ liegt der Stab M_1M_2 horizontal. Die Masse M_2 ist in Ruhe, und die Geschwindigkeit der Masse M_1 beträgt $v_1 = 60\,\pi$ cm/sec. Sie ist vertikal nach oben gerichtet. Man sehe vom Luftwiderstand, vom Gewicht des Verbindungsstabes und vom Ausmaß der Massen ab und bestimme:

1) die Bewegung der Massen unter Einwirkung der Schwerkraft;
2) die Abstände h_1 und h_2 der Massen von der Horizontalen im Moment $t = 2$ sec; (die Massen befinden sich auf der Horizontalen im Moment $t = 0$);
3) die Kraft T im Stab.

Lösung: 1) Der Schwerpunkt C des Systems bewegt sich auf der Vertikalen nach $y_C = -\frac{2}{3} v_1 t + \frac{1}{2} g t^2$;
der Stab dreht sich um den Schwerpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit π $\sec^{-1}$;

2) $h_1 = h_2 = 1711$ cm;

3) $T = \frac{1}{g} \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2} l\omega^2 = 0{,}4$ kg.

1084. Ein Rad mit dem Halbmesser r und dem Gewicht P bewegt sich horizontal und geradlinig. Ein Drehmoment M greift am Rad an. Der Trägheitshalbmesser des Rades ist ϱ. Der Reibungskoeffizient der Räder gegen die Erde ist μ.

Wie groß darf das Drehmoment sein, damit das Rad ohne Schlupf rollt?

Lösung: $M \leqq \mu P \frac{r^2 + \varrho^2}{r}$.

1085. Die Achse eines Rades bewegt sich horizontal und geradlinig. Eine horizontale Kraft P greift an der Radachse an. Der Trägheitshalbmesser des Rades ist ϱ. Der Reibungskoeffizient des Rades gegen die Erde ist μ. Der Halbmesser des Rades ist r und das Gewicht des Rades Q.

Wie groß darf die Kraft P werden, damit das Rad ohne Schlupf rollt?

Lösung: $P \leqq \mu \cdot Q \frac{r^2 + \varrho^2}{\varrho^2}$.

1086. Man bestimme, welchen Winkel α mit der Horizontalen eine schiefe Ebene bilden muß, damit die daraufliegende schwere homogene Kugel ohne Schlupf herabrollt. Es ist bekannt, daß der Reibungskoeffizient μ ist.

Lösung: $\alpha \leqq \operatorname{arctg} \left(\frac{7}{2}\mu\right)$.

1087. Ein homogener Zylinder mit horizontaler Achse rollt unter der Wirkung des eigenen Gewichtes auf einer rauhen schiefen Ebene mit dem Reibungskoeffizienten μ abwärts.

Man bestimme den Neigungswinkel der Ebene gegen die Horizontale und die Beschleunigung der Zylinderachse unter der Voraussetzung, daß die Bewegung ohne Schlupf vor sich geht. Vom Rollwiderstand ist abzusehen.

Lösung: $\alpha \leqq \operatorname{arctg} 3\mu; \quad b = \frac{2}{3} g \sin \alpha$.

1088. Ein homogener Zylinder mit horizontaler Achse bewegt sich mit Schlupf auf einer schiefen Ebene. Der Reibungskoeffizient ist μ.

Man bestimme den Neigungswinkel α der Ebene gegen die Horizontale und die Beschleunigung der Zylinderachse.

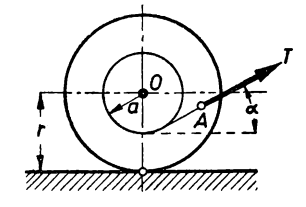
Lösung: $\alpha > \operatorname{arctg} 3\mu; \quad b = g\,(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$.

1089. Ein homogenes Rad mit dem Halbmesser r rollt ohne Schlupf auf einer schiefen Ebene, die den Winkel α mit der Horizontalen bildet.

Bei welchem Wert f des Reibungskoeffizienten der rollenden Reibung wird sich der Schwerpunkt des Rades gleichförmig bewegen und sich das Rad gleichförmig um die Schwerpunktachse drehen?

Lösung: $f = r \operatorname{tg} \alpha$.

1090. Die Kraft T zieht unter dem Winkel α zur Horizontalen an einem Faden, der auf die Trommel einer homogenen Walze mit dem Gewicht P und dem Halbmesser r aufgewickelt ist. Der Halbmesser der Trommel ist a, der Trägheitshalbmesser der Walze ϱ. Man bestimme das Gesetz der Bewegung der Walzenachse O.

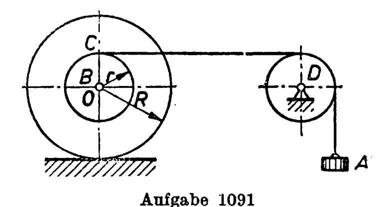


Lösung: $x = \frac{T}{P} \frac{(r \cos \alpha - a)t^2}{2(\varrho^2 + r^2)}$, worin die Achse Ox nach rechts zeigt.

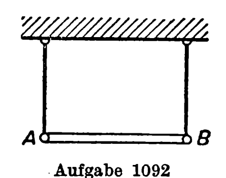
1091. Die Last A mit dem Gewicht P bewegt sich an einem masselosen unelastischen Faden, der über die feste Rolle D gelegt und auf der Trommel B aufgewickelt ist, abwärts. Das Gewicht A läßt das Rad C ohne Schlupf auf der horizontalen Ebene rollen. Die Trommel B mit dem Halbmesser r ist mit dem Rad C vom Halbmesser R fest verbunden. Ihr gemeinsames Gewicht ist Q, ihr Trägheitshalbmesser bezüglich der horizontalen Achse O ist ϱ.

Man finde die Beschleunigung der Last A.

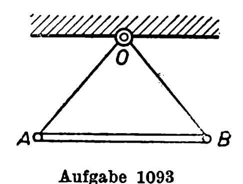
Lösung: $b = g \dfrac{P(R+r)^2}{Q(\varrho^2 + R^2) + P(R+r)^2}$.



Aufgabe 1091



Aufgabe 1092



Aufgabe 1093

1092. Ein homogener Stab AB mit dem Gewicht P hängt an zwei vertikalen Fäden horizontal an der Decke. Die Fäden sind an den Enden des Stabes befestigt.

Man finde die Fadenkraft eines Fadens in dem Augenblick, in dem der andere Faden reißt.

Hinweis: Wir bilden die Differentialgleichung der Bewegung des Stabes für den Zeitraum, der dem Augenblick des Risses des Fadens folgt. Man vernachlässige dabei die Veränderung der Richtung des Stabes und die Veränderung der Entfernung des Schwerpunktes des Stabes vom anderen Faden.

Lösung: $T = \dfrac{P}{4}$.

1093. Ein homogener Stab AB mit einem Gewicht P hängt mit zwei Fäden, welche die Länge des Stabes besitzen, an dem Punkt O.

Man bestimme die Fadenkraft des einen Fadens in dem Augenblick, in dem der andere Faden reißt. (Hinweis zu Aufgabe 1092.)

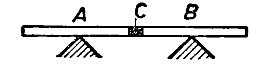
Lösung: $R = 0{,}266\ P$.

1094. Ein homogener dünner Stab mit der Länge $2\,l$ und dem Gewicht P liegt auf den beiden Stützen A und B. Der Schwerpunkt C des Stabes ist gleich weit von den beiden Stützen entfernt, wobei $CA = CB = a$. Der Druck auf jede Stütze ist $A = B = \dfrac{1}{2} P$.

Wie verändert sich der Druck auf die Stütze A in dem Augenblick, in dem die Stütze B plötzlich entfernt wird?

Lösung: Der Druck auf die Stütze A verstärkt sich

$$\frac{l^2 - 3\,a^2}{2\,(l^2 + 3\,a^2)}\,P.$$



1095. Ein schwerer Kreiszylinder A mit der Masse m ist in der Mitte mit einem dünnen Faden umwickelt, dessen Ende B an der Decke befestigt ist. Der Zylinder fällt ohne Anfangsgeschwindigkeit und wickelt dabei den Faden ab.

Man bestimme die Geschwindigkeit v der Zylinderachse, nachdem sie sich um den Weg h gesenkt hat, und finde die Fadenkraft T.

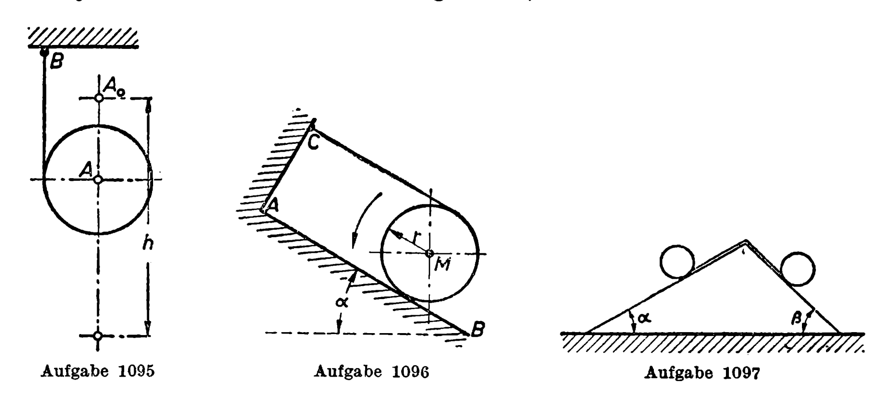
Lösung: $v = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3gh}$; $T = \frac{1}{3} mg$.

1096. Zwei Fäden sind um den homogenen Kreiszylinder M mit dem Gewicht P und dem Halbmesser r gewickelt (vgl. Zeichnung). Der Zylinder liegt auf der schiefen Ebene AB. Die Enden der Fäden C sind im Abstand $2r$ von der Fläche AB befestigt. Der Zylinder beginnt sich ohne Anfangsgeschwindigkeit unter Einwirkung der Schwerkraft zu bewegen und überwindet dabei die Reibung auf der schiefen Ebene. Der Reibungskoeffizient ist μ.

Man bestimme den Weg s, den der Schwerpunkt des Zylinders in der Zeit t zurücklegt, und die Fadenkraft, wenn angenommen wird, daß sich im Verlauf dieses Zeitraumes keiner von den beiden Fäden bis zum Ende abgewickelt hat.

Lösung: $s = \frac{1}{3} g (\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha) t^2$; $T = \frac{1}{6} P (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$.

Der Zylinder bleibt in Ruhe, wenn $\operatorname{tg}\alpha < 2\mu$.



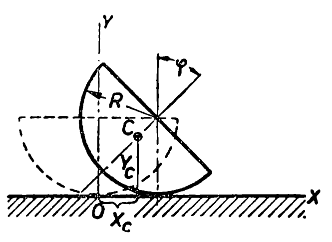
Aufgabe 1095 Aufgabe 1096 Aufgabe 1097

1097. Zwei Zylinder mit den Gewichten P_1 und P_2 bewegen sich auf zwei schiefen Ebenen abwärts, die jeweils die Winkel α und β mit der Horizontalen bilden. Die Zylinder sind durch einen undehnbaren Faden verbunden, dessen Enden auf den Zylindern aufgewickelt und an ihnen befestigt sind.

Man bestimme die Fadenkraft und die Beschleunigung des Fadens bei der Bewegung auf den schiefen Ebenen. Die Zylinder sind als homogen anzusehen. Man vernachlässige das Gewicht des Fadens.

Lösung: $b_F = g \frac{P_1 \sin\alpha - P_2 \sin\beta}{P_1 + P_2}$; $T = \frac{P_1 P_2 (\sin\alpha + \sin\beta)}{3(P_1 + P_2)}$.

1098. Man bestimme die Schwingungszeit einer homogenen halbrunden Scheibe vom Halbmesser R, die auf einer rauhen horizontalen Fläche schwingt.



Lösung: $T = \frac{\pi}{2g}\sqrt{2g\,(9\pi - 16)\,R}.$

42. Zusätzliche Kräfte auf die Drehachse rotierender Körper

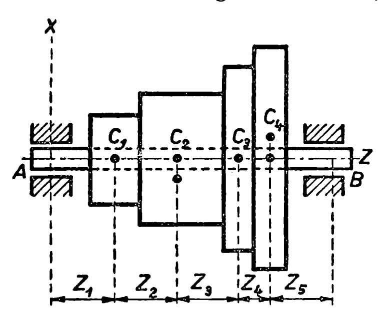
1099. Der Schwerpunkt eines Schwungrades, dessen Gewicht 3000 kg beträgt, liegt 1 mm exzentrisch. Die Abstände der Lager vom Rad sind gleich groß.

Man finde die Auflagerreaktionen, wenn die Welle 1200 U/min ausführt. Das Schwungrad hat eine Symmetriefläche, die senkrecht zu der Drehachse liegt.

Lösung: Beide Auflagerreaktionen sind die Summe zweier Kräfte, von denen die eine 1500 kg und die andere 2400 kg beträgt.

1100. Der Trommelrotor einer Turbine ist aus vier zylindrischen Trommeln mit den Gewichten $P_1 = 0{,}9$ t, $P_2 = 1{,}3$ t, $P_3 = 0{,}5$ t und $P_4 = 1{,}0$ t zusammengestellt. Zwei Trommeln stehen so, daß ihre Schwerpunkte in einer Entfernung $a_2 = 0{,}1$ cm und $a_4 = 0{,}1$ cm exzentrisch liegen. Die Entfernungen a_2 und a_4 liegen in senkrecht aufeinanderstehenden Ebenen.

Man bestimme die Auflagerreaktionen, wenn die Drehzahl $n = 3000$ U/min beträgt. Die Abmessungen sind $z_3 = 110$ cm, $z_4 = 75$ cm und $z_5 = 125$ cm. Das Gewicht der Welle des Rotors beträgt $P = 1{,}3$ t (vgl. Zeichnung).

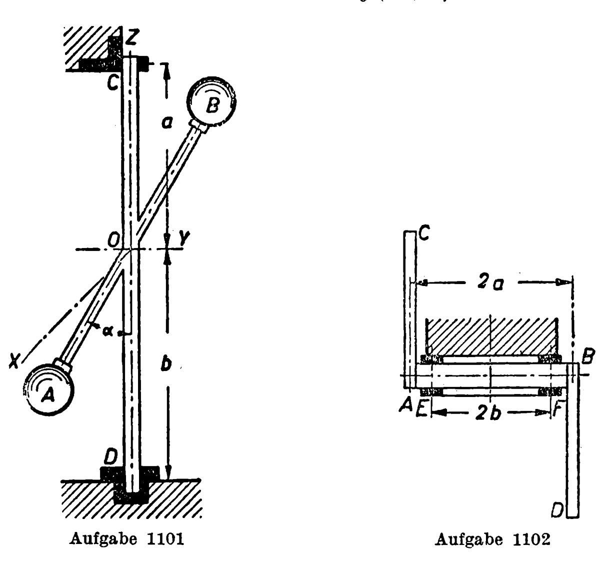


Lösung: Der statische Auflagerdruck ist $X_A = 2{,}78$ t, $X_B = 2{,}22$ t. Der dynamische Auflagerdruck besteht aus zwei senkrecht aufeinanderstehenden Komponenten: $X_A = 8{,}84$ t, $Y_A = 2{,}73$ t, $X_B = 4{,}26$ t, $Y_B = 7{,}33$ t (die Achsen Ax und Ay bilden mit der Welle ein Koordinatensystem).

1101. Der Stab AB der Länge $2\,l$, an dessen Enden sich Lasten von gleichem Gewicht P befinden, dreht sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale Achse Oz, die die Stangenachse darstellt. Der Abstand des Punktes O vom Lager C ist a, vom Zapfenlager D b. Der Winkel zwischen dem Stab AB und der Achse Oz behält die konstante Größe α.

Man vernachlässige das Gewicht des Stabes und die Ausmaße der Lasten und bestimme die Auflagerreaktionen im Lager C und Zapfenlager D in dem Moment, in dem sich der Stab in der yz-Ebene befindet.

Lösung: $X_C = X_D = 0$; $Y_C = -Y_D = \dfrac{Pl^2\,\omega^2 \sin 2\,\alpha}{g\,(a+b)}$; $Z_D = 2\,P$.



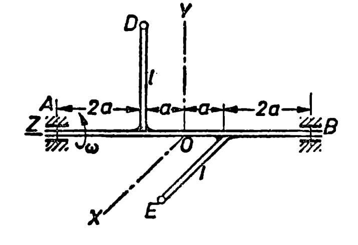
Aufgabe 1101 Aufgabe 1102

1102. Auf die Enden einer Achse AB sind zwei gleiche Kurbeln aufgesetzt (AC und BD). Jede hat die Länge l und das Gewicht Q. Sie sind um 180° versetzt. Die Achse AB mit einer Länge $2a$ und dem Gewicht P dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in den Lagern E und F, die symmetrisch im Abstand $2b$ voneinander angeordnet sind.

Man bestimme die Drücke N_E und N_F, die auf die Lager in dem Moment ausgeübt werden, in dem die Kurbel AC vertikal nach oben gerichtet ist. Die Masse jeder Kurbel kann entlang ihrer Achse als homogen verteilt angesehen werden.

Lösung: Der Druck $N_E = \dfrac{1}{2}\,P + Q - \dfrac{al\,\omega^2}{2\,bg}\,Q$, bei $N_E > 0$ ist er vertikal nach unten, bei $N_E < 0$ nach oben gerichtet.

Der Druck $N_F = \dfrac{1}{2}\,P + Q + \dfrac{al\,\omega^2}{2\,bg}\,Q$ ist vertikal nach unten gerichtet.

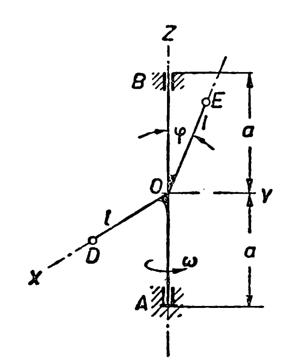


1103. Zwei gleiche Stangen der Länge l, die auf zueinander senkrechten Ebenen liegen, sind an die horizontale Welle AB, die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω dreht, befestigt. An den Enden der Stangen sind die Kugeln D und E, jede mit der Masse m angebracht.

Man bestimme die dynamischen Auflagerreaktionen in A und B. Die Anordnung der Stangen ist aus der Zeichnung ersichtlich. Die Kugeln werden als Massenpunkte angesehen. Die Massen der Stangen werden vernachlässigt.

Lösung: $N_A = -N_B = \frac{\sqrt{5}}{3}\, ml\,\omega^2.$

1104. Zwei Stangen sind an die vertikale Welle AB, die sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω dreht, starr befestigt. Die Stange OE bildet mit der Welle den Winkel φ. Die Stange OD steht senkrecht zu der Ebene, in der sich die Welle AB und die Stange OE befinden. Gegeben sind die Maße $OE = OD = l$; $AB = 2a$. An den Enden der Stangen sind zwei Kugeln E und D, jede mit der Masse m befestigt.

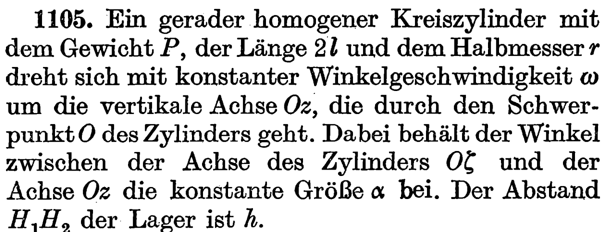


Man bestimme die dynamischen Auflagerreaktionen in den Stützen A und B. Die Kugeln D und E sind als Massenpunkte und die Stangen als masselos anzusehen.

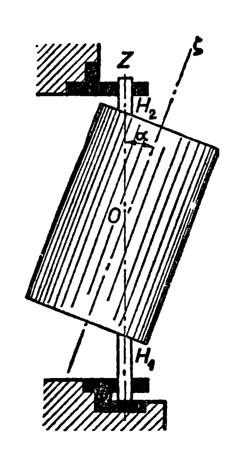
Lösung: $N_{Ax} = N_{Bx} = \frac{m}{2}\, l\,\omega^2;$

$$N_{Ay} = \frac{m\,l\,\omega^2\,(a - l\cos\varphi)\sin\varphi}{2a};$$

$$N_{By} = \frac{m\,l\,\omega^2\,(a + l\cos\varphi)\sin\varphi}{2a}.$$



1105. Ein gerader homogener Kreiszylinder mit dem Gewicht P, der Länge $2l$ und dem Halbmesser r dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale Achse Oz, die durch den Schwerpunkt O des Zylinders geht. Dabei behält der Winkel zwischen der Achse des Zylinders $O\zeta$ und der Achse Oz die konstante Größe α bei. Der Abstand H_1H_2 der Lager ist h.



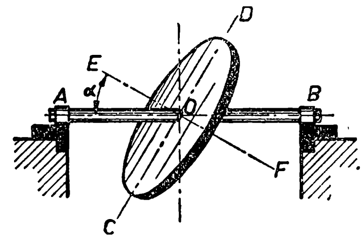
Man bestimme die dynamischen Auflagerreaktionen N_1 und N_2 der Lager.

Lösung: Die Drücke N_1 und N_2 haben denselben Wert

$$P\,\frac{\omega^2 \sin 2\alpha}{2gh}\left(\frac{1}{3}\,l^2 - \frac{1}{4}\,r^2\right)$$

und sind entgegengesetzt gerichtet.

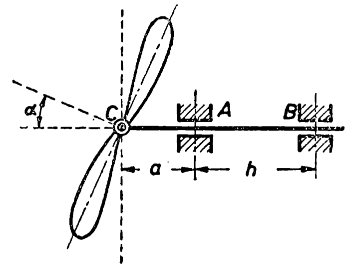
1106. Man berechne die Auflagerreaktionen A und B einer um die Achse AB rotierenden Scheibe CD.



Es wird angenommen, daß die Achse AB durch den Mittelpunkt O der Scheibe geht, jedoch infolge schiefer Bohrung der Nabe den Winkel $AOE = \alpha = 0{,}02$ mit der Scheibenachse bildet. Gegeben ist: Gewicht der Scheibe 3,27 kg, ihr Halbmesser 20 cm, die Drehzahl 30 000 U/min, die Abstände $AO = 50$ cm, $OB = 30$ cm. Die Achse AB wird als vollkommen biegesteif angesehen.

Lösung: Vom Gewicht der Scheibe belasten 1,23 kg das Lager A, 2,04 kg das Lager B. Durch die Rotation der Scheibe belasten jeweils 822 kg die Lager in entgegengesetzten Richtungen.

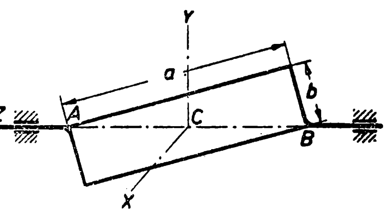
1107. Die Masse eines Propellers mit zwei Blättern sei auf seiner Längsachse gleichförmig verteilt.



Man bestimme den Druck des Propellers auf die Lager seiner Drehachse, wenn infolge schiefer Bohrung seiner Nabe die Propellerachse nicht mit der Drehachse zusammenfällt, sondern einen Winkel $\alpha = 0{,}015$ einschließt. Der Schwerpunkt liegt auf der Drehachse. Das Gewicht des Propellers beträgt $P = 15$ kg, das polare Trägheitsmoment $\Theta = 0{,}5$ kgmsec². Die Winkelgeschwindigkeit ist konstant und entspricht $n = 3000$ U/min, der Abstand zwischen den Lagern der Drehachse beträgt $h = 25$ cm und die Entfernung des Schwerpunktes des Propellers bis zum nächsten Lager $a = 15$ cm.

Lösung: 1) Der statische Auflagerdruck ist vertikal
$A' = 24$ kg nach unten gerichtet;
$B' = 9$ kg nach oben gerichtet.
2) Der dynamische Auflagerdruck von 2960 kg steht senkrecht zur Drehachse, er liegt in der Ebene der Drehachse und der Längenachse des Propellers und ist in den Lagern entgegengesetzt gerichtet.

1108. Eine homogene rechteckige Platte mit dem Gewicht P dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω gleichförmig um ihre Diagonale AB.



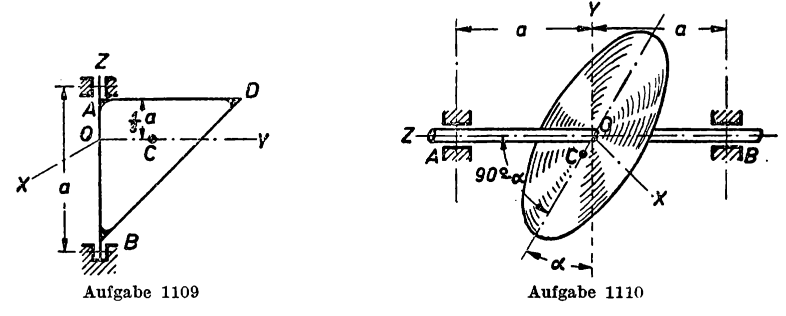
Man bestimme die dynamischen Auflagerreaktionen in A und B der Platte, wenn die Längen der Seiten a und b sind.

Lösung: $N_{Ax} = 0; \quad N_{Ay} = + \dfrac{Pab\,\omega^2\,(a^2 - b^2)}{12\,g\,(a^2 + b^2)^{3/2}};$

$$N_{Bx} = 0; \quad N_{By} = - \frac{Pab\,\omega^2\,(a^2 - b^2)}{12\,g\,(a^2 + b^2)^{3/2}}.$$

1109. Mit welcher Winkelgeschwindigkeit muß sich eine homogene Platte von der Form eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks ABD um die Kathete $AB = a$ drehen, damit die horizontale Auflagerkraft $B = 0$ ist? Der Abstand zwischen den Lagern sei die Länge der Kathete AB.

Lösung: $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{a}}$.



Aufgabe 1109 Aufgabe 1110

1110. Eine homogene dünne Scheibe mit der Exzentrizität $OC = e$ ist in der Mitte der horizontalen Welle unter dem Winkel $90° - \alpha$ angebracht. Das Gewicht der Scheibe beträgt P und ihr Halbmesser r.

Man bestimme die statischen und die dynamischen Reaktionen der Stützen bei gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ω der Scheibe und der Welle. Der Abstand zwischen den Stützen ist $AB = 2a$.

Lösung: 1) Die statischen Reaktionen sind vertikal nach oben gerichtet

$$A' = P\frac{a + e\sin\alpha}{2a};$$

$$B' = P\frac{a - e\sin\alpha}{2a}.$$

2) Die dynamischen Reaktionen sind radial nach außen gerichtet und gegeben durch:

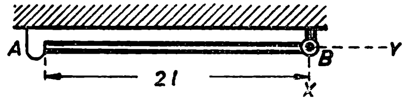
$$A'' = \frac{P}{2g}\left[e\cos\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2a}\left(2e^2 + \frac{r^2}{4}\right)\right]\omega^2;$$

$$B'' = \frac{P}{2g}\left[e\cos\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2a}\left(2e^2 + \frac{r^2}{4}\right)\right]\omega^2.$$

43. Gemischte Aufgaben

1111. Ein homogener schwerer Balken AB mit der Länge $2l$ und dem Gewicht Q befindet sich in horizontaler Lage. Im Zeitpunkt $t = 0$ löst sich das Ende A, und der Balken dreht sich um B. In dem Zeitpunkt t, in dem der Balken in die vertikale Lage kommt, löst er sich von B.

Man bestimme die Bewegungsbahn des Balkenschwerpunktes und die Winkelgeschwindigkeit ω bei der Bewegung des Balkens.



Lösung: 1) Die Parabel $y^2 = 3lx - 3l^2$; 2) $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$.

1112. Ein homogener Stab der Länge l hängt mit seinem oberen Ende im Punkt O. Wenn sich der Stab in vertikaler Lage befindet, erteilt man ihm die Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 3\sqrt{\frac{g}{l}}$. Nach einer halben Umdrehung trennt sich der Stab vom Punkt O.

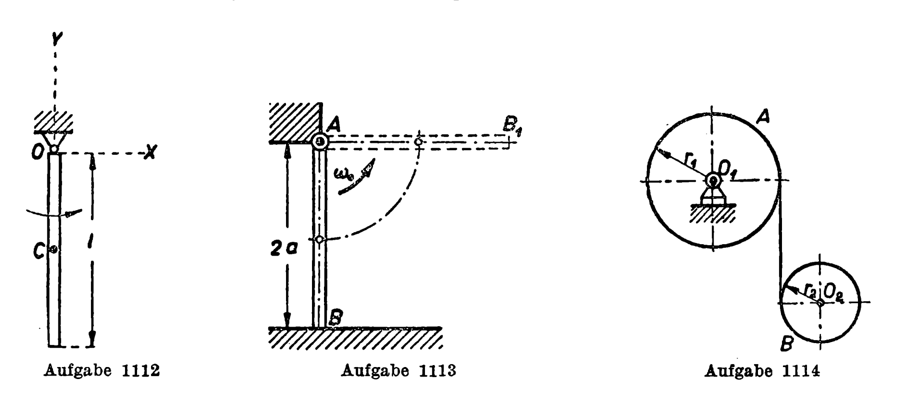
Man bestimme die Bewegungsbahn des Stabschwerpunktes und die Winkelgeschwindigkeit bei der nachfolgenden Bewegung des Stabes.

Lösung: 1) $y_c = \frac{l}{2} - \frac{2}{3\,l}\,x_c^2$; 2) $\omega = \sqrt{\frac{3\,g}{l}}$.

1113. Der homogene Stab AB mit der Länge $2\,a$ hängt an seinem Ende A. Das Ende B befindet sich dicht am Boden. Nachdem man dem Stab eine bestimmte Winkelgeschwindigkeit ω erteilte, wird das Ende A bei horizontaler Lage des Stabes freigemacht. Die nachfolgende Bewegung des freien Stabes erfolgt nur unter der Wirkung der Schwerkraft.

Man bestimme, bei welcher Anfangswinkelgeschwindigkeit ω_0 der fallende Stab senkrecht auf dem Boden aufstößt.

Lösung: $\omega_0^2 = \frac{g}{4\,a}\left[6 + \frac{\pi^2\,(2\,k+1)^2}{\pi\,(2\,k+1)+2}\right]$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.



Aufgabe 1112 Aufgabe 1113 Aufgabe 1114

1114. Zwei homogene Kreiszylinder A und B mit dem Gewicht P_1 bzw. P_2 und den jeweiligen Radien r_1 und r_2 sind mit zwei Fäden umwickelt (vgl. Zeichnung). Die Achse des Zylinders A ist feststehend, der Zylinder B fällt aus dem Ruhezustand unter Einwirkung der Schwerkraft.

Man bestimme im Zeitpunkt t nach Beginn der Bewegung (angenommen, daß die Fäden in diesem Zeitpunkt noch auf den Zylindern aufgewickelt sind):

1) die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 der Zylinder;
2) den Weg s, den der Schwerpunkt des Zylinders B zurückgelegt hat;
3) die Fadenkraft T.

Lösung: 1) $\omega_1 = \frac{2\,gP_2}{r_1\,(3\,P_1+2\,P_2)}\,t$; $\omega_2 = \frac{2\,gP_1\cdot t}{r_2\,(3\,P_1+2\,P_2)}$;

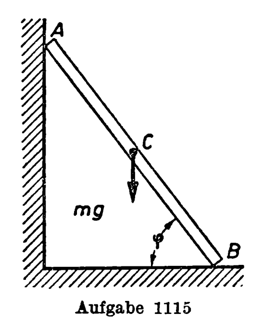
2) $s = \frac{g\,(P_1+P_2)}{3\,P_1+2\,P_2}\,t^2$; 3) $T = \frac{P_1\,P_2}{2\,(3\,P_1+2\,P_2)}$.

1115. Ein homogener Stab der Länge a stützt sich unter dem Winkel φ_0 mit dem einen Ende auf dem Fußboden auf. Mit dem anderen Ende liegt er an der glatten vertikalen Wand an. Wenn der Stab frei ohne Anfangsgeschwindigkeit fällt, ist zu bestimmen:

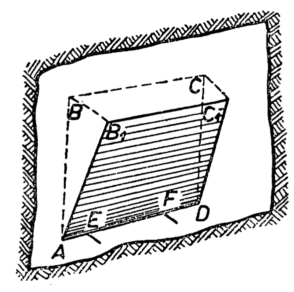
1) die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung des Stabes.
2) welchen Winkel φ_1 schließt der Stab mit der Horizontalen ein, wenn er sich von der Wand löst?

Lösung: 1) $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g}{a}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)}$; $\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{2a}\cos\varphi$;

2) $\sin\varphi_1 = \frac{2}{3}\sin\varphi_0$.



Aufgabe 1115



Aufgabe 1116

1116. Das dünne homogene rechteckige Brett $ABCD$ mit dem Gewicht Q lehnt an der Wand und wird durch zwei glatte Nägel E und F ohne Köpfe gehalten. Die Abstände betragen $AE = FD$, die Länge AB des Brettes ist $2l$. Im Zeitpunkt $t = 0$ beginnt das Brett zu fallen und dreht sich dabei um die Gerade AD.

Man bestimme, welchen Winkel α das Brett in dem Augenblick mit der Wand bildet, in dem es von den Nägeln abgleitet. Der Schlupf des Brettes entlang der Nägel ist ausgeschlossen.

Lösung: $\alpha = \arccos\frac{1}{3} = 70^\circ\,32'$.

1117. Zwei Scheiben drehen sich mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 um die gleiche Achse. Die polaren Massenträgheitsmomente der Scheiben sind Θ_1 und Θ_2.

Man bestimme den Verlust der kinetischen Energie, wenn beide Scheiben plötzlich gekuppelt werden.

Lösung: $\Delta T = \frac{1}{2}\frac{\Theta_1\Theta_2}{\Theta_1+\Theta_2}(\omega_1-\omega_2)^2$.

1118. In einem Mechanismus mit Kurbel und Kurbelstange treibt die sich gleichförmig drehende Kurbel mit einer Länge r die Kurbelstange mit dem Gewicht P und der Länge l an. Ein Ende der Kurbelstange ist durch Gelenkverbindung mit der Kurbel, das andere Ende mit dem Gleitstück verbunden.

Man bestimme die Kräfte, die bei vertikalen und horizontalen Lagen der Kurbel auf die Kurbelstange einwirken (den Hauptvektor und das Hauptmoment der Kräfte in bezug auf den Schwerpunkt der Kurbelstange). Wir betrachten die Kurbelstange als einen dünnen homogenen Stab.

Lösung: 1) Bei vertikaler Lage der Kurbel:
Der Hauptvektor greift im Schwerpunkt der Kurbelstange an und ist senkrecht zu der Geraden gerichtet, die durch die Drehachse der Kurbel und dem Schwerpunkt der Zugstange läuft. Der Größe nach sind der Vektor und das Hauptmoment

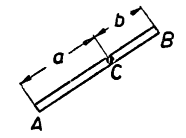
$$V = \frac{P r l \omega_0^2}{2 g \sqrt{l^2 - r^2}}; \quad M_s = \frac{P r l^2 \omega_0^2}{12 g \sqrt{l^2 - r^2}}.$$

2) Bei horizontaler Lage der Kurbel: Der Hauptvektor greift im Schwerpunkt der Kurbelstange an und ist längs der Stange zur Drehachse der Kurbel gerichtet

$$V = \frac{P r \omega_0^2}{g}\left(1 + \frac{r}{2l}\right); \quad M_s = 0.$$

1119. Der Stab AB mit der Masse m führt eine ebene Bewegung aus und hat im gegebenen Moment die Winkelbeschleunigung ε.

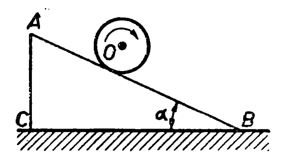
Der Trägheitshalbmesser des Stabes in bezug auf die Achse, die senkrecht zur Bewegungsfläche des Stabes durch den Schwerpunkt C läuft, ist ϱ. Der Abstand des Schwerpunktes C von den Enden A und B des Stabes ist jeweils a bzw. b. Die Masse des Stabes soll durch zwei Punktmassen an den Enden des Stabes A und B ersetzt werden. Die Summe der erwähnten Massen entspricht der Masse des Stabes, der Massenmittelpunkt fällt mit dem Schwerpunkt des Stabes zusammen.



Man untersuche, ob der Hauptvektor und das Hauptmoment der Trägheitskräfte der Punktmassen mit dem Hauptvektor und dem Hauptmoment der Trägheitskräfte des Stabes übereinstimmen.

Lösung: Die Hauptvektoren der Trägheitskräfte der angeführten Massen und des Stabes sind gleich gerichtet, die Hauptmomente differieren um den Wert $m(a\,b - \varrho^2)\,\varepsilon$.

1120. Auf einer glatten horizontalen Fläche kann das dreieckige Prisma ABC mit dem Gewicht P ohne Reibung gleiten. Ein homogener Kreiszylinder mit dem Gewicht Q bewegt sich ohne Schlupf über die Seitenfläche des Prismas AB.



Man bestimme die Bewegung des Prismas.

Lösung: Das Prisma bewegt sich nach links mit der konstanten Beschleunigung

$$\frac{Q \sin(2\alpha)}{3(P + Q) - 2Q\cos^2\alpha}\, g.$$

1121. Auf der Mantelfläche eines Kreiszylinders mit vertikaler Achse, um die sich der Zylinder ohne Reibung drehen kann, ist eine Schraubennut mit dem Steigungswinkel α eingeschnitten. Im Anfangsaugenblick befindet sich der Zylinder im Stillstand. In der Nut fällt eine schwere Kugel ohne Anfangsgeschwindigkeit. Sie rollt in ihr und bringt den Zylinder zum Drehen. Gegeben ist die Masse des Zylinders M, der Halbmesser des Zylinders R, die Masse der Kugel m, die Entfernung der Kugel von der Zylinderachse sei R und das Trägheitsmoment des Zylinders $^1/_2\ MR^2$.

Man bestimme die Winkelgeschwindigkeit ω, die der Zylinder in dem Moment hat, in dem die Kugel bis zur Höhe h gerollt ist.

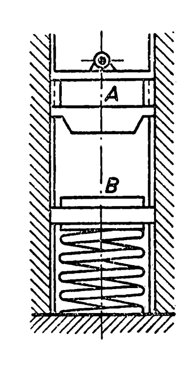
Lösung: $\omega = \frac{2\,m\cos\alpha}{R}\sqrt{\frac{2\,gh}{(M + 2\,m)\cdot(M + 2\,m\sin^2\alpha)}}$.

1122. Ein schwerer Körper mit dem Gewicht P schwingt um die horizontale Achse O, die senkrecht zur Zeichenfläche liegt. Der Abstand von der Aufhängeachse bis zum Schwerpunkt ist a, der Trägheitshalbmesser des Körpers in bezug auf die Achse durch den Schwerpunkt senkrecht zur Zeichenfläche ist ϱ. Zur Zeit $t = 0$ ist der Ausschlagswinkel $\varphi = \varphi_0$ und $v_0 = 0$.

Man bestimme die Auflagerreaktionen R und N im Aufhängepunkt in Abhängigkeit vom Ausschlagswinkel φ.

Lösung: $R = P\cos\varphi + \frac{2\,Pa^2}{\varrho^2 + a^2}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$; $N = P\frac{\varrho^2}{\varrho^2 + a^2}\sin\varphi$.

44. Der Stoß



1123. Der Rammbär A einer Ramme fällt von der Höhe 4,905 m auf den Amboß B, der auf einer Feder liegt. Das Gewicht des Rammbärs beträgt 10 kg, das Gewicht des Ambosses 5 kg.

Man bestimme, welche Geschwindigkeit der Amboß nach dem Stoß hat. (Er bewegt sich zusammen mit dem Rammbär.)

Lösung: 6,54 m/sec.

1124. Man finde die Geschwindigkeiten nach einem vollkommen elastischen Stoß von zwei gleichen Kugeln, die sich mit der Geschwindigkeit v_1 und v_2 aufeinander zu bewegen.

Lösung: Nach dem Stoß wechseln die Kugeln gegenseitig die Geschwindigkeit.

1125. Zwei gleiche halbelastische Kugeln A und B bewegen sich aufeinander zu. Bei welchem Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten vor dem Stoß wird die Kugel A stehen bleiben? (Die Stoßzahl ist k.)

Lösung: $\frac{v_A}{v_B} = \frac{1 + k}{1 - k}$.

1126. Man bestimme das Verhältnis der Massen m_1 und m_2 zweier Kugeln in folgenden Fällen:

1) Die erste Kugel befindet sich im Ruhezustand. Nach dem zentralen Stoß kommt die zweite Kugel zum Stillstand.
2) Die Kugeln begegnen sich mit gleichen, entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeiten. Nach dem zentralen Stoß bleibt die zweite Kugel in Ruhe. Die Stoßzahl ist k.

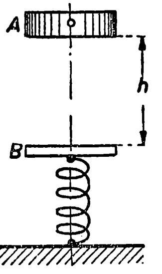
Lösung: 1) $m_2/m_1 = k$; 2) $m_2/m_1 = 1 + 2k$.

1127. Drei vollkommen elastische Kugeln mit den Massen m_1, m_2 und m_3 liegen in einer glatten Rille und haben einen bestimmten Abstand voneinander. Die erste Kugel, der eine Bewegung mit bestimmter Anfangsgeschwindigkeit erteilt wird, stößt die zweite Kugel an, die sich zunächst in Ruhe befindet und sich bei dem Stoß zu bewegen beginnt. Diese stößt ihrerseits die dritte Kugel, die sich ebenfalls zunächst in Ruhe befindet.

Bei welcher Größe der Masse m_2 der zweiten Kugel erreicht die dritte Kugel die Höchstgeschwindigkeit?

Lösung: $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$.

1128. Die Last A mit dem Gewicht P fällt ohne Anfangsgeschwindigkeit von der Höhe h auf die Platte B mit dem Gewicht p, die an einer Feder mit der Federkonstanten c befestigt ist.



Man finde die Größe s der Zusammendrückung der Feder nach dem Stoß, wenn angenommen wird, daß die Stoßzahl gleich Null ist.

Lösung: $s = \frac{P}{c} + \sqrt{\left(\frac{P}{c}\right)^2 + \frac{2P^2 h}{(P+p)\,c}}$.

1129. In einem Gerät, das zur experimentellen Bestimmung der Stoßzahl dient, fällt eine Kugel aus dem zu erprobenden Material ohne Anfangsgeschwindigkeit von der gegebenen Höhe $h_1 = 50$ cm in dem Inneren eines vertikalen Glasröhrchens auf eine feststehende horizontale Platte aus entsprechendem Material.

Wie groß ist die Stoßzahl, wenn die Rückprallhöhe der Kugel $h_2 = 45$ cm beträgt?

Lösung: $k = \sqrt{h_2/h_1} = 0{,}95$.

1130. Eine halbelastische Kugel fällt längs der Vertikalen von der Höhe h auf eine horizontale Platte, prallt von der Platte ab und fällt wieder auf die Platte zurück. Diese Bewegung setzt sich weiter fort.

Welchen Weg legt die Kugel zurück, wenn die Stoßzahl allgemein k ist?

Lösung: $s = \frac{1+k^2}{1-k^2}\,h$.

1131. Ein Dampfhammer, dessen Gewicht 12 t beträgt, fällt mit einer Geschwindigkeit von 5 m/sec auf einen Amboß, dessen Gewicht zusammen mit dem auszuschmiedenden Stück Eisen 250 t beträgt.

Man finde die Arbeit A_1, die durch das auszuschmiedende Teil in Anspruch genommen wird, und die Arbeit A_2, die bei der Schwingung des Fundamentes verloren geht, und berechne den Wirkungsgrad η des Hammers. Der Stoß ist unelastisch.

Lösung: $A_1 = 14\,600$ mkg, $A_2 = 700$ mkg; $\eta = 0{,}95$.

1132. Eine Kugel der Masse m_1, die sich mit der Geschwindigkeit v_1 bewegt, trifft auf eine in Ruhe befindliche Kugel der Masse m_2. Ihre Geschwindigkeit bildet beim Stoß den Winkel α mit der Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Kugeln.

Man bestimme:

1) die Geschwindigkeit der ersten Kugel nach dem Stoß, wenn der Stoß als absolut unelastisch berechnet wird;

2) die Geschwindigkeit jeder Kugel nach dem Stoß, wenn man annimmt, daß der Stoß halbelastisch und die Stoßzahl k ist.

Lösung: 1) $u_1 = v_1 \sqrt{\sin^2\alpha + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \cos^2\alpha}$;

2) $u_1 = v_1 \sqrt{\sin^2\alpha + \left(\frac{m_1 - k m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \cos^2\alpha}$;

$u_2 = v_1 \frac{m_1 (1 + k) \cos\alpha}{m_1 + m_2}$.

1133. Eine absolut elastische Kugel, deren Mittelpunkt eine horizontale Gerade mit der Geschwindigkeit v durchläuft, begegnet einer glatten vertikalen Fläche unter dem Winkel α.

Welche Geschwindigkeit hat die Kugel nach dem Stoß?

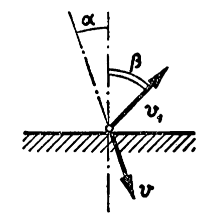
Lösung: Der Reflexionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel. Die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß sind der Größe nach gleich.

1134. Eine Stahlkugel fällt unter dem Winkel 45° auf eine horizontale Stahlplatte und prallt unter dem Winkel 60° nach der Vertikalen ab.

Man bestimme die Stoßzahl.

Lösung: $k = 0{,}58$.

1135. Eine Kugel fällt schräg mit der Geschwindigkeit v auf eine feste horizontale Ebene und prallt von dieser Ebene mit der Geschwindigkeit $v/\sqrt{2}$ ab.



Man bestimme den Einfallswinkel α und den Reflexionswinkel β, wenn die Stoßzahl $k = 1/\sqrt{3}$ ist.

Lösung: $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$.

1136. Zwei gleiche, absolut elastische Kugeln stoßen sich gegenseitig mit gleichgroßen Geschwindigkeiten v ab. Die Geschwindigkeit der linken Kugel vor dem Stoß liegt in Richtung der Verbindungslinie der Mittelpunkte nach rechts. Die Geschwindigkeit der rechten Kugel vor dem Stoß bildet mit der Verbindungslinie der Mittelpunkte den Winkel α (siehe Zeichnung).

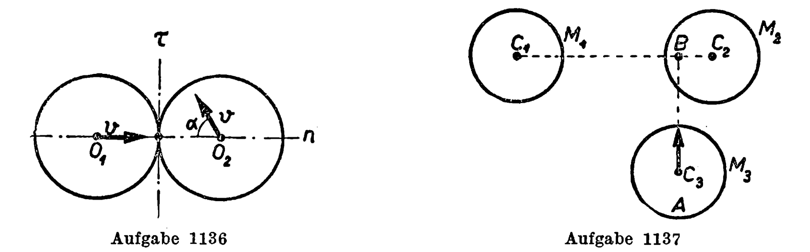
Man finde die Geschwindigkeiten der Kugeln nach dem Stoß.

Lösung: Die Achse n ist längs der Verbindungslinie der Mittelpunkte nach rechts, die Achse τ nach aufwärts gerichtet:

$$u_{1n} = -v \cos \alpha; \quad u_{1\tau} = 0; \quad u_{2n} = v; \quad u_{2\tau} = v \sin \alpha.$$

1137. Drei gleiche Kugeln M_1, M_2, M_3 haben den Halbmesser R, der Abstand zweier Mittelpunkte beträgt $C_1C_2 = a$. Man bestimme, auf welcher Geraden AB, die senkrecht zur Linie C_1C_2 liegt, sich der Mittelpunkt der dritten Kugel C_3 befinden muß, damit diese Kugel, der eine gewisse Geschwindigkeit in Richtung AB erteilt wird, nach dem Zusammenstoß mit der Kugel M_2 einen Zentralstoß gegen die Kugel M_1 ausführt. Wir nehmen an, daß die Kugeln absolut elastisch sind.

Lösung: Die Entfernung der Geraden AB vom Mittelpunkt C_2 beträgt $BC_2 = 4R^2/a$.



Aufgabe 1136 Aufgabe 1137

1138. Zur Befestigung des Bodens unter dem Fundament eines Gebäudes werden Pfähle von einem Gewicht $P = 50$ kg mit einer Ramme eingerammt. Der Rammbär, dessen Gewicht $P_1 = 450$ kg beträgt, fällt ohne Anfangsgeschwindigkeit von einer Höhe $h = 2$ m. Die Stoßzahl ist gleich Null. Bei den letzten Stößen senken sich die Pfähle um $\delta = 5$ cm.

Man bestimme den mittleren Widerstand des Bodens beim Einrammen der Pfähle.

Lösung: $R = 16{,}2$ t.

1139. Zwei Kugeln mit den Massen m_1 und m_2 hängen dicht nebeneinander an parallelen Fäden mit den Längen l_1 und l_2. Ihre Mittelpunkte befinden sich auf der gleichen Höhe. Die erste Kugel wird ohne Anfangsgeschwindigkeit aus einer Lage, in der sie mit der Vertikalen den Winkel α_1 bildet, freigelassen.

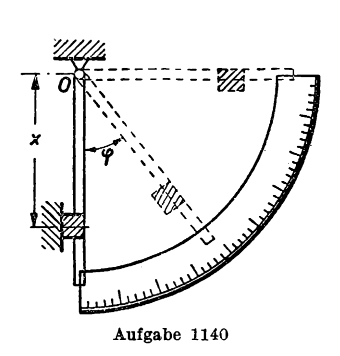
Man bestimme den Winkel α_2 der Höchstneigung der zweiten Kugel, wenn die Stoßzahl gleich k ist.

Lösung: $\sin \frac{\alpha_2}{2} = \frac{m_1 (1 + k)}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \sin \frac{\alpha_1}{2}.$

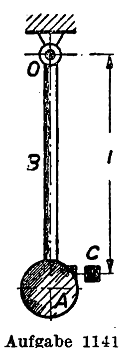
1140. In einem Gerät zur Bestimmung der Stoßzahl befindet sich ein Stab, der sich in einer vertikalen Ebene um eine horizontale Achse O dreht und in einem bestimmten Abstand ein Probestück aus dem zu prüfenden Material trägt. Der Stab beginnt aus der horizontalen Lage unter der Einwirkung des Eigengewichts ohne Anfangsgeschwindigkeit zu fallen und stößt in der vertikalen Lage gegen eine feste Platte aus dem zu prüfenden Material.

Man bestimme die Stoßzahl k, wenn der Stab nach dem Stoß den Winkel φ mit der vertikalen Lage bildet, und finde, in welcher Entfernung x von der Drehachse des Stabes die Prüflinge anzuordnen sind, damit im Gleitlager der Achse O keine zusätzlichen Kräfte entstehen.

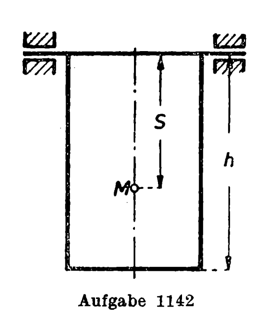
Lösung: $k = \sqrt{2} \sin \frac{\varphi}{2}$; $x = \frac{2}{3} l$.



Aufgabe 1140



Aufgabe 1141



Aufgabe 1142

1141. Das Pendel eines Schlagwerkes besteht aus der Stahlscheibe A, die einen Halbmesser von 10 cm hat und 5 cm dick ist, sowie dem runden Stab B aus Stahl mit dem Durchmesser von 2 cm und der Länge von 90 cm.

In welcher Entfernung l von der horizontalen Drehachse O muß der durch die Maschine zu zerschlagende Prüfling C gelegt werden, damit die Achse keinen Stoß erleidet, wenn die Richtung des Stoßes horizontal angenommen wird?

Lösung: $l = 97{,}5$ cm.

1142. Man bestimme den Stoßmittelpunkt einer rechteckigen Zielscheibe. Die Höhe der Zielscheibe ist h.

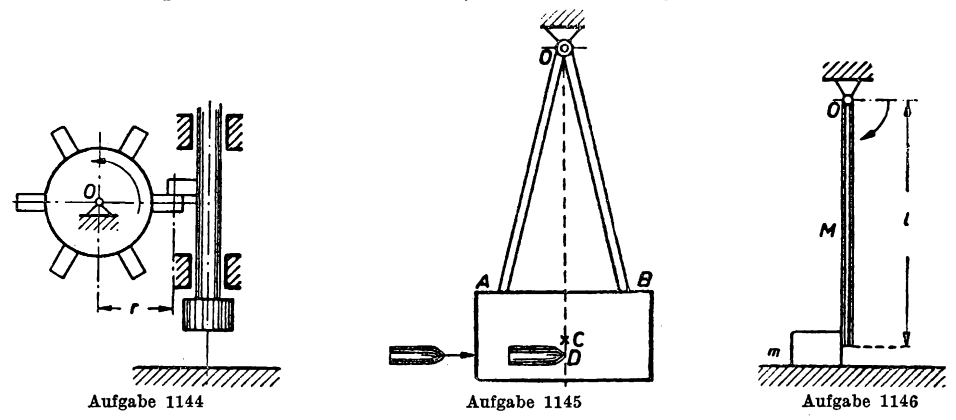
Lösung: $s = \frac{2}{3} h$.

1143. Zwei Riemenscheiben drehen sich in einer Ebene um ihre Achsen mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_{10} und ω_{20}. Man bestimme die Winkelgeschwindigkeiten der Riemenscheiben ω_1 und ω_2, nachdem ein Treibriemen auf dieselben geworfen wurde. Die Riemenscheiben werden als runde Scheiben gleicher Dicke mit den Halbmessern R_1 und R_2 betrachtet. Man vernachlässige den Schlupf und die Masse des Riemens.

Lösung: $\omega_1 = \frac{R_1^3 \omega_{10} + R_2^3 \omega_{20}}{R_1 (R_1^2 + R_2^2)}$, $\omega_2 = \frac{R_1^3 \omega_{10} + R_2^3 \omega_{20}}{R_2 (R_1^2 + R_2^2)}$.

1144. Ein mit einem Schwungrad gekoppeltes Nockenrad treibt eine Stanze an. Welche Winkelgeschwindigkeit hat das Nockenrad und welche Geschwindigkeit die Stanze nach dem Stoß, wenn der Stoß als unelastisch angesehen wird? Welches ist der mittlere Wert Q der Kraft, die sich bei dem Stoß entwickelt, wenn die Winkelgeschwindigkeit des Nockenrades vor dem Stoß $\omega_{10} = 2\,\pi\ \text{sec}^{-1}$ ist? Die Anfangsgeschwindigkeit der Stanze ist gleich Null. Die Dauer des Stoßes beträgt $\tau = 0{,}05$ sec. Das Trägheitsmoment des Zahnrades mit Schwungrad ist in bezug auf die Drehachse $\Theta_0 = 500$ kgcmsec². Der Abstand des Stoßpunktes von der Zahnradachse beträgt $r = 20$ cm, das Gewicht der Stanze $Q = 25$ kg.

Lösung: $\omega_1 = 6{,}15\ \text{sec}^{-1}$, $v = 1{,}23$ m/sec, $Q = 62{,}8$ kg.



Aufgabe 1144 Aufgabe 1145 Aufgabe 1146

1145. Ein ballistisches Pendel, das zur Bestimmung der Geschwindigkeit eines Geschosses dient, besteht aus dem Zylinder AB, der an der horizontalen Achse O hängt. Das eine Ende A des Zylinders ist geöffnet und der Zylinder mit Sand gefüllt. Das Geschoß, das in den Zylinder hineinfliegt, bewirkt eine Drehung des Pendels mit einem bestimmten Winkelausschlag um die Achse O.

Gegeben sind: die Masse des Pendels M; der Abstand h des Schwerpunktes des Pendels von der Achse ($OC = h$); der Trägheitsradius ϱ in bezug auf die Achse O; die Masse des Geschosses m; die Entfernung a von der Achse ($OD = a$); der Neigungswinkel α des Pendels.

Man bestimme die Geschwindigkeit des Geschosses v, unter der Annahme, daß das Pendel in seiner Achse stoßfrei gelagert, d. h. $ah = \varrho^2$ ist.

Lösung: $v = 2\left(1 + \frac{Mh}{ma}\right)\sqrt{ga}\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

1146. Ein homogener Stab mit der Masse M und der Länge l ist mit seinem oberen Ende am Gelenk O befestigt. Er fällt ohne Anfangsgeschwindigkeit aus der horizontalen Lage, stößt in vertikaler Lage gegen eine Last mit der Masse m und erteilt dieser Last eine Bewegung längs der horizontalen rauhen Ebene. Die Reibungszahl ist μ.

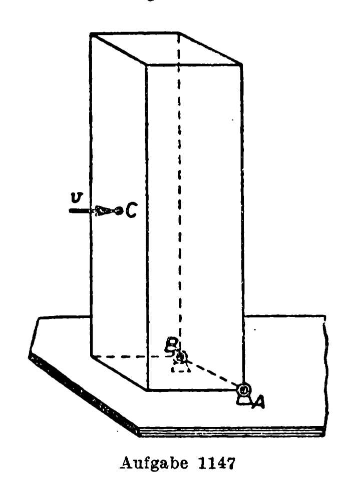
Welchen Weg legt die Last zurück, wenn der Stoß als unelastisch betrachtet wird?

Lösung: $s = \frac{3l}{2\mu}\,\frac{M^2}{(M + 3m)^2}$.

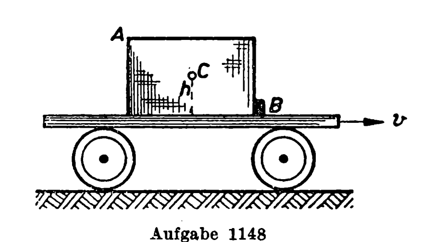
1147. Das homogene gerade Prisma mit quadratischer Grundfläche steht auf einer horizontalen Ebene und kann sich um die Kante AB drehen, die in dieser Ebene liegt. Die Kantenlänge der Grundfläche des Prismas ist a, seine Höhe ist $3\,a$, die Masse $3\,m$. Eine Kugel mit der Masse m stößt mit der horizontalen Geschwindigkeit v gegen die Mitte C der Seitenfläche, die der Kante AB gegenüberliegt. Wir nehmen an, daß der Stoß unelastisch ist und daß die Masse der Kugel in ihrem Mittelpunkt konzentriert ist, der nach dem Stoß im Punkte C bleibt.

Bei welcher Mindestgröße der Geschwindigkeit v wird das Prisma umfallen?

Lösung: $v = \frac{1}{3}\sqrt{53\,g\,a}.$



Aufgabe 1147



Aufgabe 1148

1148. Ein Güterwagen mit daraufliegender prismatischer Last AB bewegt sich auf horizontalem Gleis mit der Geschwindigkeit v. Auf dem Güterwagen ist an der Kante B der Last eine Leiste angebracht, die die Last nicht nach vorn gleiten läßt, aber das Kippen der Last nicht verhindert. Es sind die Höhe des Schwerpunktes h der Last über dem Boden des Güterwagens und der Trägheitsarm der Last ϱ in bezug auf die Kante B gegeben. Man bestimme die Winkelgeschwindigkeit ω der Last in dem Moment, in dem der Güterwagen plötzlich hält.

Lösung: $\omega = \frac{hv}{\varrho^2}.$

1149. Wenn man unter den Bedingungen der Aufgabe 1148 annimmt, daß die Last ein homogenes rechtwinkliges Parallelepiped darstellt, ist die Geschwindigkeit v zu suchen, bei der die Last um B kippt.

Die Abmessungen der Last sind:

Kantenlänge 4 m, Höhe 3 m.

Lösung: $v = 30{,}7$ km/h.

45. Dynamik von Systemen mit veränderlicher Masse

1150. Man stelle die Bewegungsgleichung eines Pendels mit veränderlicher Masse in einem Medium auf, dessen Widerstand proportional der Geschwindigkeit ist. Die Masse des Pendels verändert sich nach dem gegebenen Gesetz $m = m(t)$ durch die Absonderung von Teilen mit einer relativen Geschwindigkeit, die gleich Null ist. Die Länge der Pendelschnur ist l. Auf das Pendel wirkt die Widerstandskraft ein, die proportional seiner Geschwindigkeit $R = -\beta\dot{\varphi}l$ ist.

Lösung: $\ddot{\varphi} + \frac{\beta\,\dot{\varphi}}{m(t)} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$

1151. Man stelle die Differentialgleichung für die Steigbewegung einer Rakete auf und nehme die relative Geschwindigkeit v_r der ausströmenden Gase aus der Rakete als konstant an. Die Masse der Rakete verändert sich mit der Zeit nach dem Gesetz $m = m_0 f(t)$ (Verbrennungsgesetz). Der Luftwiderstand ist eine gegebene Funktion der Geschwindigkeit und der Flughöhe der Rakete $R = R(x, \dot{x})$.

Lösung: $\ddot{x} = -g - \frac{\dot{f}(t)}{f(t)}v_r - \frac{R(x, \dot{x})}{m_0 f(t)}.$

1152. Man integriere die Bewegungsgleichung der vorstehenden Aufgabe mit $m = m_0(1 - \alpha t)$ und $R = 0$. Die Geschwindigkeit der Rakete am Boden ist Null. In welcher Höhe befindet sich die Rakete zur Zeit $t = 10$, 30, 50 sec bei $v_r = 2000$ m/sec und $\alpha = \frac{1}{100}\,\text{sec}^{-1}$?

Lösung: $x(t) = \frac{v_r}{\alpha}[(1 - \alpha t)\ln(1 - \alpha t) + t\alpha] - \frac{gt^2}{2};$

$$x(10) = 0{,}54\,\text{km}; \quad x(30) = 5{,}65\,\text{km}; \quad x(50) \approx 18{,}4\,\text{km}.$$

1153. Die Masse der in Aufgabe 1151 beschriebenen Rakete verändert sich nach dem Gesetz $m = m_0 e^{-\alpha t}$.

Man finde die Bewegung der Rakete, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird, und bestimme die Maximalsteighöhe der Rakete zur Zeit t_0, nachdem die ganze Ladung verbrannt ist. Zu Anfang befindet sich die Rakete auf dem Boden, und ihre Geschwindigkeit ist Null.

Lösung: $H = \frac{1}{2g}(\alpha^2 v_r{}^2 - g^2)\cdot t_0{}^2.$

1154. Man bestimme unter den Voraussetzungen der vorstehenden Aufgabe den Wert α, der der größtmöglichen Steighöhe der Rakete H_{max} entspricht, und berechne H_{max}; den Wert $\mu = \alpha\, t_0 = \ln\,(m_0/m_1)$ nehme man als konstant an; m_1 ist die Masse der Rakete im Moment t_0.

Lösung: $\alpha = \infty$ (augenblickliche Verbrennung)

$$H_{max} = \frac{\mu^2\, v_r^{\,2}}{2\,g}.$$

1155. Ein Freiballon mit dem Gewicht Q steigt senkrecht aufwärts und zieht ein Seil nach sich, das auf dem Boden zusammengelegt war. Die Hubkraft P, die Schwerkraft und die Widerstandskraft R, die proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit ist ($R = -\beta\dot{x}^2$), wirken auf den Freiballon ein. Das Gewicht der Längeneinheit des Seiles betrage γ.

Man finde die Bewegungsgleichung des Freiballons.

Lösung: $\ddot{x} = -g + \dfrac{Pg}{Q + \gamma\,x} - \dfrac{\beta\,g + \gamma}{Q + \gamma\,x}\cdot\dot{x}^2.$

1156. Man bestimme die Steiggeschwindigkeit des Freiballons unter den Voraussetzungen der vorstehenden Aufgabe. Zu Anfang war der Freiballon in Ruhe und befand sich in der Höhe H_0.

Lösung:
$$\dot{x}^2 = \frac{Pg}{(\beta g + \gamma)}\left[1 - \left(\frac{Q + \gamma\,H_0}{Q + \gamma\,x}\right)^{2\left(1 + \beta\,\frac{g}{\gamma}\right)}\right] - \\ - \frac{2\,g}{2\,\beta g + 3\,\gamma}\left[1 - \left(\frac{Q + \gamma\,H_0}{Q + \gamma\,x}\right)^{3 + 2\,\beta\,\frac{g}{\gamma}}\right](Q + \gamma\,x).$$

1157. Ein kugelförmiger Wassertropfen fällt vertikal in eine mit Wasserdampf gesättigte Atmosphäre. Der Kondensation zufolge wächst das Volumen des Tropfens proportional seiner Oberfläche an (Proportionalitätsfaktor α). Der ursprüngliche Halbmesser des Tropfens ist r_0, seine Anfangsgeschwindigkeit v_0, seine ursprüngliche Höhe h_0.

Man bestimme die Geschwindigkeit des Tropfens und das Gesetz der Veränderung seiner Höhe mit der Zeit.

Hinweis: Man beweise, daß $dr = \alpha\,dt$ ist, und gehe zur neuen unabhängigen Veränderlichen r über.

Lösung:
$$x = h_0 + \frac{v_0\,r_0}{2\,\alpha}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right] + \frac{g}{8\,\alpha^2}\left[r^2 - 2\,r_0^{\,2} + \frac{r_0^{\,4}}{r^2}\right],$$
$$v = v_0\,\frac{r_0^{\,3}}{r^3} + \frac{g}{4\,\alpha}\left[r - \frac{r_0^{\,4}}{r^3}\right],$$

wobei $r = r_0 + \alpha t$.

1158. Man löse die vorstehende Aufgabe unter der Annahme, daß außer der Schwerkraft noch eine Widerstandskraft wirkt, die der Oberfläche und der Geschwindigkeit des Tropfens proportional ist:

$$R = -4\beta\pi r^2 v \frac{\gamma}{g} \text{ (β ist ein konstanter Koeffizient).}$$

Lösung:
$$x = h_0 + \frac{1}{3\beta + 2\alpha}\left[\frac{g \cdot r_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}}{4\alpha+3\beta} - v_0 r_0^{\frac{3}{\alpha}(\beta+\alpha)}\right] \times$$
$$\times \left[r^{-\frac{1}{\alpha}(3\beta+2\alpha)} - r_0^{-\frac{1}{\alpha}(3\beta+2\alpha)}\right] + \frac{g(r^2 - r_0^2)}{2\alpha(4\alpha+3\beta)};$$
$$v = \frac{g r}{4\alpha+3\beta} - \left[\frac{g r_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}}{4\alpha+3\beta} - v_0 r_9^{\frac{3}{\alpha}(\alpha+\beta)}\right] r^{-\frac{3}{\alpha}(\alpha+\beta)},$$

wobei $r = r_0 + \alpha t$.

1159. Eine homogene zusammengerollte Kette liegt auf der Kante eines horizontalen Tisches. Zu Beginn hängt ein Glied der Kette unbeweglich vom Tisch herab.

Man bestimme die Bewegung der Kette, wenn die Achse x vertikal nach unten gerichtet ist und zu Anfang $x = 0$, $\dot{x} = 0$ angenommen wird.

Lösung: $x = \frac{1}{6} gt^2$.

1160. Eine Kette liegt zusammengelegt auf dem Boden und ist mit einem Ende an einer Laufkatze befestigt. Die Laufkatze steht auf einer geneigten Gleisstrecke, die den Winkel α mit der Horizontalen bildet. Die Reibungszahl der Kette gegen den Boden ist μ. Das Gewicht pro Längeneinheit der Kette beträgt γ, das Gewicht der Laufkatze ist P. Zu Anfang ist die Geschwindigkeit der Laufkatze v_0.

Man bestimme die Geschwindigkeit der Laufkatze für einen beliebigen Zeitpunkt und stelle fest, welche Voraussetzung nötig ist, damit die Laufkatze stehen bleibt.

Lösung:
$$\dot{x}^2 = \frac{P^2 v_0^2}{(P+\gamma x)^2} + \frac{2Pg}{3\gamma}\sin\alpha\left[1 - \frac{P^2}{(P+\gamma x)^2}\right] + \frac{2}{3} gx \sin\alpha +$$
$$+ \frac{\mu P g}{3\gamma}\left[1 - \frac{P^2}{(P+\gamma x)^2}\right]\cos\alpha - \frac{2}{3}\mu \cdot g \cdot x \cdot \cos\alpha.$$

Der Stillstand kann stattfinden, wenn folgende Ungleichheit erfüllt ist:
$\mu > tg\,\alpha$.

1161. Ein materieller Punkt der Masse m wird nach dem Gesetz von Newton von einer feststehenden Punktmasse angezogen. Die Masse des Mittelpunktes veränderte sich mit der Zeit nach dem Gesetz

$$M = \frac{M_0}{1 + \alpha t}.$$

Man bestimme die Bewegung des Punktes.

Hinweis: Man gehe von den karthesischen Koordinaten des Punktes zu den neuen Koordinaten $\xi = x/(1 + \alpha t)$, $\eta = y/(1 + \alpha t)$ sowie zu der Zeitkoordinate $\tau = \frac{1}{\alpha (1 + \alpha t)}$ über.

Lösung: Die Bewegungsgleichungen in den Koordinaten ξ, η lauten:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{M_0}{m} \frac{\xi}{\varrho^3} = 0; \quad \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{M_0}{m} \cdot \frac{\eta}{\varrho^3} = 0; \quad \varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

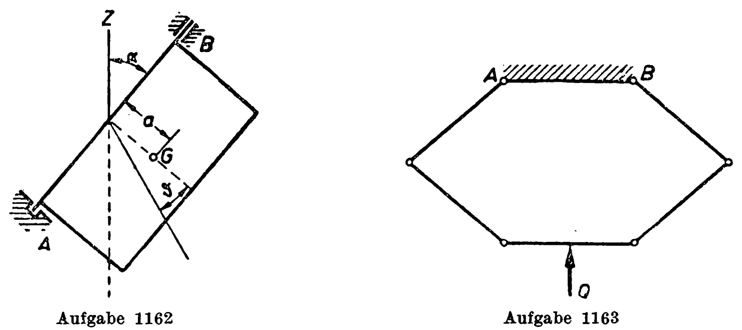
Falls die Massen konstant sind, entsprechen sie also den gewöhnlichen Bewegungsgleichungen. Deshalb finden unter den angegebenen Voraussetzungen in den Koordinaten ξ und η auch Bewegungen auf elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Bahnen statt.

46. Analytische Statik

1162. Die Drehachse AB einer rechtwinkligen Platte ist unter dem Winkel α zur Vertikalen geneigt.

Man bestimme das statische Moment der Kräfte bezüglich der Achse AB, das erforderlich ist, um eine Drehung der Platte um den Winkel ϑ herbeizuführen. Das Gewicht der Platte beträgt P, der Abstand des Schwerpunktes der Platte von der Achse AB ist a.

Lösung: $M = Pa \sin \alpha \sin \vartheta$.



Aufgabe 1162 Aufgabe 1163

1163. Ein Gelenksechseck, das aus sechs gleichen homogenen Stäben von je p kg Gewicht besteht, liegt in einer vertikalen Ebene. Die obere Seite des Sechsecks ist unbeweglich in horizontaler Lage befestigt (AB). Die anderen Seiten sind in bezug auf die Vertikale, die durch die Mitte von AB geht, symmetrisch angeordnet.

Man bestimme die vertikale Kraft Q, die in der Mitte der horizontalen Seite angreifen muß und der Seite AB entgegengesetzt gerichtet ist, damit sich das System in indifferentem Gleichgewicht befindet.

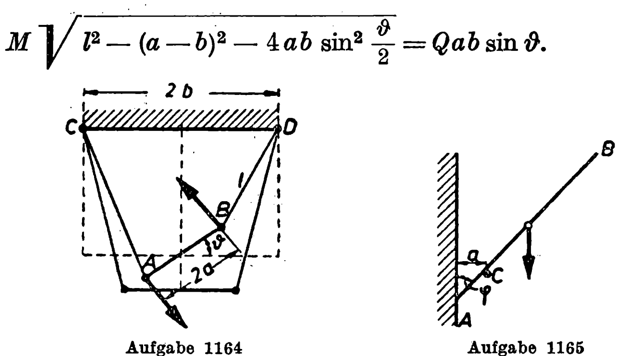
Lösung: $Q = 3\,p$.

1164. An einem homogenen Stab AB mit einer Länge $2a$ und dem Gewicht Q, der an zwei Fäden der Länge l hängt, wird ein Kräftepaar mit einem Moment M angelegt. Die Anhängepunkte der Fäden liegen in der Horizontalen im Abstand $2b$ voneinander.

Man finde den Winkel ϑ, der die Gleichgewichtslage des Stabes bestimmt.

Lösung: In der Gleichgewichtslage wird der Winkel ϑ aus folgender Gleichung bestimmt:

$$M\sqrt{l^2-(a-b)^2-4ab\sin^2\frac{\vartheta}{2}}=Qab\sin\vartheta.$$



Aufgabe 1164 Aufgabe 1165

1165. Ein geradliniger homogener Stab AB der Länge $2l$ stützt sich mit dem unteren Ende A auf eine vertikale Wand, wobei er mit dieser den Winkel φ bildet. Der Stab liegt auch auf dem Nagel C auf, der im Abstand a von der Wand absteht.

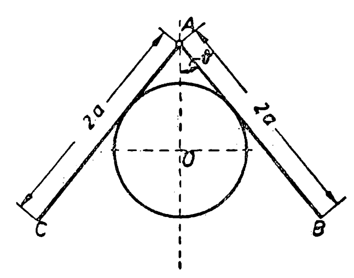
Man bestimme den Winkel φ für die Gleichgewichtslage.

Lösung: Der Neigungswinkel des Stabes zur Vertikalen in der Gleichgewichtslage wird aus folgender Gleichung bestimmt:

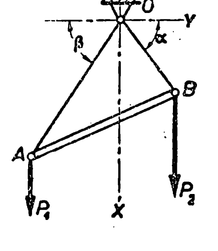
$$\sin\varphi=\sqrt[3]{\frac{a}{l}}.$$

1166. Auf einem glatten Zylinder mit dem Halbmesser r liegen zwei homogene Stäbe, die im Gelenk A miteinander verbunden sind. Die Länge eines jeden Stabes beträgt $2a$.

Man bestimme den Spreizwinkel 2ϑ der Stäbe in der Gleichgewichtslage.



Lösung: Der Öffnungswinkel wird aus der Gleichung $a\operatorname{tg}^3\vartheta-r\operatorname{tg}^2\vartheta-r=0$ bestimmt.



1167. An einem nichtdehnbaren Faden, der über eine unendlich kleine Rolle läuft, hängt ein Stab ohne Eigengewicht. An den Enden des Stabes sind die Gewichte P_1 und P_2 befestigt.

Man bestimme die Gleichgewichtslage des Systems. Die Länge des Stabes ist l, die Länge des Fadens L.

Lösung: In der Gleichgewichtslage ist

$$\alpha = \beta \text{ und } \frac{OA}{OB} = \frac{P_2}{P_1}.$$

Ebenfalls herrscht Gleichgewicht für

$$y_1 = y_2 = 0; \quad x_1 = \frac{1}{2}(L + l), \; x_2 = \frac{1}{2}(L - l)$$

$$\text{bzw. } x_1 = \frac{1}{2}(L - l), \; x_2 = \frac{1}{2}(L + l).$$

1168. Die Enden eines homogenen, mit Masse belegten Stabes der Länge l können ohne Reibung auf einer Kurve gleiten, die durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ gegeben ist. Die y-Achse ist vertikal nach oben, die x-Achse horizontal gerichtet.

Man bestimme die Gleichgewichtslage des Stabes.

Lösung: Die Koordinaten der Stabenden, die der Lage des Gleichgewichts entsprechen, sind die Lösungen folgender Gleichungen:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0; \; f(x_1, y_1) = 0,$$
$$f(x_2, y_2) = 0;$$

$$2(y_2 - y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} = (x_2 - x_1)\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial y_2} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right].$$

1169. Ein homogener, mit Masse belegter Stab der Länge l kann mit seinen Enden ohne Reibung auf der Parabel $y = ax^2$ gleiten.

Man bestimme die möglichen Gleichgewichtslagen. Die y-Achse verläuft senkrecht nach oben, die x-Achse waagerecht.

Lösung: Die erste Gleichgewichtslage entspricht den Gleichungen

$$x_2 = -x_1 = \frac{l}{2}; \qquad y_1 = y_2 = a\frac{l^2}{4}.$$

Die zweite Gleichgewichtslage entspricht der Gleichung

$$\mathfrak{Sin}^2 2\xi + 4\,\mathfrak{Cof}^2 \xi = 4a^2 l^2.$$

Diese bestimmt sich aus den Formeln:

$$x_1 = -\frac{1}{2a}\cdot e^{-\xi}, \; y_1 = \frac{1}{4a}\cdot e^{-2\xi}, \; x_2 = \frac{1}{2a}\cdot e^{\xi}, \; y_2 = \frac{1}{4a}e^{2\xi}.$$

1170. Man löse die Aufgabe 1168 unter der Voraussetzung, daß die Kurve eine Ellipse sei, $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, und die Länge des Stabes der Bedingung $l < 2a$ genügt.

Man bestimme die möglichen Gleichgewichtslagen des Stabes.

Hinweis: An Stelle der rechtwinkligen Koordinaten werden Polarkoordinaten eingeführt. Hierbei gilt $x = a \cdot \cos\varphi$ und $y = b \cdot \sin\varphi$.

Lösung: Die Gleichgewichtslagen ergeben sich aus

a) $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$; $\cos\varphi_2 = \frac{l}{2a}$ (horizontale Lage des Stabes);

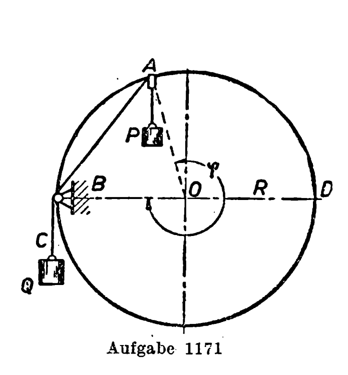
b) $\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \cos\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$; $\sin\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \sqrt{\frac{l}{2b}}$.

1171. Entlang eines glatten Drahtringes mit dem Halbmesser R, der in der vertikalen Ebene liegt, kann ein kleiner Ring A ohne Reibung gleiten. An diesem Ring hängt an einem Faden ein Gewicht P. Ein anderer Faden geht von A über eine kleine Rolle B, die an einem Ende des horizontalen Durchmessers des großen Ringes liegt und am Ende C ein anderes Gewicht Q trägt.

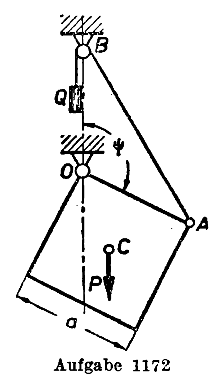
Man bestimme die Gleichgewichtslagen des kleinen Ringes A und untersuche, welche von den Lagen stabil und welche von ihnen labil sind.

Hinweis: Die Lage des Ringes A ist durch den Zentriwinkel φ zu charakterisieren (vgl. Zeichnung).

Lösung: Bei $1 \geqq \frac{Q}{P} \geqq 0$ entsprechen die Werte $0 \leqq \varphi \leqq 90°$ und $240° \leqq \varphi \leqq 270°$ den Gleichgewichtslagen, bei $\frac{Q}{P} > 1$ die Werte $180° \leqq \varphi \leqq 240°$. Die stabilen Gleichgewichtslagen kommen nur im Bereich $0 \leqq \varphi \leqq 90°$ vor.



Aufgabe 1171



Aufgabe 1172

1172. Eine quadratische homogene Platte kann sich in der vertikalen Ebene um eine Achse drehen, die durch die Ecke O geht. Die Platte hat das Gewicht P, ihre Seitenlänge beträgt a. Die Ecke A der Platte wird von einem Faden der Länge l gehalten, der über eine kleine Rolle B läuft, welche im Abstand a senkrecht über O befestigt ist. Am Faden hängt eine Last mit dem Gewicht $Q = \frac{\sqrt{2}}{2} P$.

Man bestimme die Gleichgewichtslagen des Systems und untersuche ihre Stabilität.

Lösung: Die Gleichgewichtslagen entsprechen folgenden Winkeln

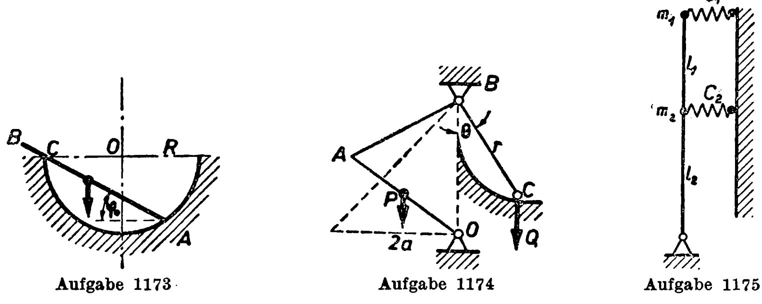
$$\psi_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \psi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_3 = \frac{3\pi}{2}.$$

Die zweite und dritte Gleichgewichtslage ist stabil.

1173. Ein homogener Stab AB mit einer Länge $2a$ liegt auf einer krummlinigen Führung, welche die Form eines Halbkreises mit dem Halbmesser R hat. Man bestimme die Gleichgewichtslage, wenn man die Reibung vernachlässigt, und untersuche ihre Stabilität.

Lösung: In der Gleichgewichtslage hat der Stab eine Neigung zur Horizontalen φ_0, die durch die Gleichung bestimmt wird:

$$\cos\varphi_0 = \frac{1}{8R}\left[a + \sqrt{a^2 + 32R^2}\right] \left(\text{vorausgesetzt, daß } \sqrt{\frac{2}{3}}\,R < a < 2R\right).$$ Diese Gleichgewichtslage ist stabil.



Aufgabe 1173 Aufgabe 1174 Aufgabe 1175

1174. Eine Zugbrücke OA mit dem Gewicht P und der Länge $2a$ ist in der Skizze als homogene Platte abgebildet. In der Mitte der Platte ist ein Seil der Länge l befestigt, das über eine kleine Rolle läuft, die im Abstand $2a$ über dem Punkt O auf der Vertikalen angeordnet ist. Das andere Ende des Seiles C ist mit einem Gegengewicht verbunden, das ohne Reibung auf einer krummlinigen Führung gleitet.

Man bestimme die Form dieser Führung und das Gewicht Q der Gegenlast derart, daß das System sich im indifferenten Gleichgewicht befindet.

Lösung: $Q = \frac{P}{\sqrt{2}}$; die Gleichung der Führung in Polarkoordinaten r und ϑ:

$$r^2 = 2\,(l - 2\sqrt{2}\,a\cos\vartheta)\,r - 8a^2 + 4\sqrt{2}\,al - l^2.$$

1175. Man untersuche die Stabilität der vertikalen Gleichgewichtslage des abgebildeten „kippenden" Pendels. Das Pendel kann schematisch durch zwei Massenpunkte m_1 und m_2, die mit Stäben l_1 und l_2 verbunden sind, dargestellt werden. In der vertikalen Gleichgewichtslage tritt keine Spannung in den Federn auf (Federkonstanten c_1 und c_2).

Lösung: Die Stabilität entspricht den Bedingungen: $c_1 l_1 > m_1 g$;

$$[(c_1 + c_2)\,l_2 - (m_1 + m_2)\,g] \cdot [c_1 l_1 - m_1 g] > c_1^2\,l_1\,l_2.$$

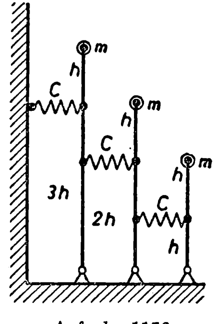
1176. Man untersuche die Stabilitätsbedingungen der vertikalen Gleichgewichtslage des abgebildeten Pendelsystems. Die Länge des Stabes des ersten Pendels ist gleich $4h$, des zweiten $3h$ und des dritten $2h$. Alle Pendel haben die gleiche Masse m und die gleiche Federkonstante c. Die Abstände der Anschlußpunkte der Federn von den Schwerpunkten der Massen sind h. Man vernachlässige die Massen der Stäbe und betrachte die Massen m als materielle Punkte. In der vertikalen Lage der Pendel sind die Federn spannungslos.

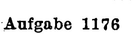
Lösung: Die Bedingungen für die Stabilität lauten:

$$13\,ch^2 - 4\,mgh > 0;\; 49\,c^2 h^4 - 59\,mgch^3 + 12\,m^2 g^2 h^2 > 0$$
$$36\,c^3 h^6 - 153\,mg\,c^2 h^5 + 130\,m^2 g^2 ch^4 - 24\,m^3 g^3 h^3 > 0.$$

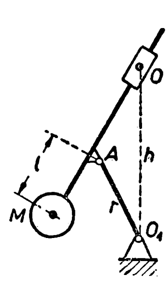
1177. Bei dem Pendel eines Pallographen hängt die Last M an dem Stab OM, der frei durch eine kleine drehbare Buchse O geht und durch ein Gelenk im Punkt A mit dem Schwinghebel AO_1 verbunden ist. Letzterer dreht sich um die Achse O_1. Die Länge des Schwinghebels beträgt r, der Abstand des Schwerpunktes der Last vom Gelenk A ist l, die Entfernung OO_1 ist h. Man untersuche die Stabilität der vertikalen Gleichgewichtslage. Man vernachlässige die Abmessungen der Last und die Gewichte der Stäbe.

Lösung: Bei $\sqrt{rl} > h - r$ ist die Lage stabil;
bei $\sqrt{rl} < h - r$ ist die Lage labil.

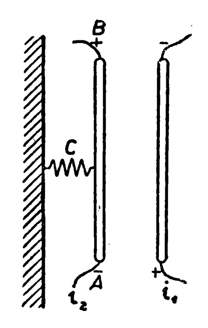




Aufgabe 1176



Aufgabe 1177



Aufgabe 1178

1178. Ein geradliniger Leiter, in dem ein Strom der Stärke i_1 fließt, zieht einen parallelen Leiter AB an, in dem ein Strom der Stärke i_2 fließt. Der Leiter AB hat die Masse m. An ihm ist eine Feder mit der Federkonstanten c befestigt. Die Länge eines jeden Leiters beträgt l. Wenn kein Strom in AB fließt, beträgt der Abstand zwischen beiden Leitern a. Man bestimme die Gleichgewichtslagen des Systems und untersuche die Stabilität.

Hinweis: Die Anziehungskraft zweier paralleler Leiter mit den Strömen i_1 und i_2 und der Länge l bei einem Abstand d wird durch die Gleichung $F = \frac{2\,i_1\,i_2}{d}\,l$ bestimmt.

Lösung: Bei $\alpha = \frac{2\,i_1 i_2\, l}{c} < \frac{a^2}{4}$ gibt es zwei Gleichgewichtslagen:

$x_1 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - \alpha}$ und $x_2 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \alpha}$; x_1 entspricht der stabilen Lage, x_2 der labilen.

Bei $\alpha > \frac{a^2}{4}$ gibt es keine Gleichgewichtslage.

Bei $\alpha = \frac{a^2}{4}$ gibt es keine Lage, in der Stabilität herrscht.

47. Die Gleichungen von Lagrange

1179. Die Übertragung der Drehung bei zwei sich senkrecht kreuzenden Wellen erfolgt durch zwei Kegelräder mit den Zähnezahlen z_1 und z_2. Die Trägheitsmomente der Wellen mit den angesetzten Rädern sind Θ_1 und Θ_2.

Man bestimme die Winkelbeschleunigung der ersten Welle, wenn auf sie das Drehmoment M_1 einwirkt, während auf die andere Welle das Gegenmoment M_2 wirkt. Man vernachlässige die Reibung in den Lagern.

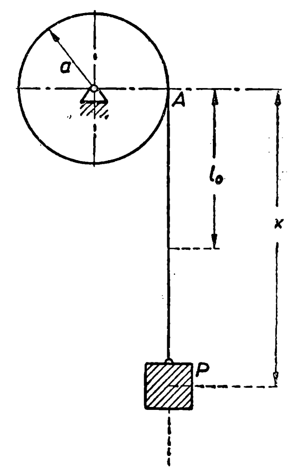
Lösung: $\varepsilon_1 = \frac{M_1 - kM_2}{\Theta_1 + k^2\,\Theta_2}; \quad k = \frac{z_1}{z_2}.$

1180. Bei dem abgebildeten Zahnradgetriebe wird das Rad 1 durch das Moment M_1 angetrieben. Auf das Rad 2 wirkt das Gegenmoment M_2 und auf das Rad 3 das Gegenmoment M_3.

Man finde die Winkelbeschleunigung des ersten Rades, wenn die Räder als homogene Scheiben betrachtet werden, deren Massen m_1, m_2, m_3 und deren Halbmesser r_1, r_2, r_3 betragen.

Lösung: $\varepsilon_1 = \frac{2\left(M_1 - \frac{r_1}{r_2}\,M_2 - \frac{r_1}{r_3}\,M_3\right)}{(m_1 + m_2 + m_3)\,r_1^2}.$

1181. Man bestimme die Bewegung einer Last mit dem Gewicht P, die an einem Seil mit dem Gewicht P_1 und der Länge l hängt. Das Seil ist auf eine Trommel mit dem Halbmesser a und dem Gewicht P_2 gewickelt. Die Drehachse ist horizontal. Man vernachlässige die Reibung; die Masse der Trommel wird als gleichmäßig über dem Umfang verteilt betrachtet. Zu Anfang ($t = 0$) befindet sich das System in Ruhe. Die Länge des herabhängenden Teils des Seiles beträgt l_0.



Hinweis: Man vernachlässige bei der Lösung die Abmessungen der Trommel im Vergleich zu der Länge des herabhängenden Seiles.

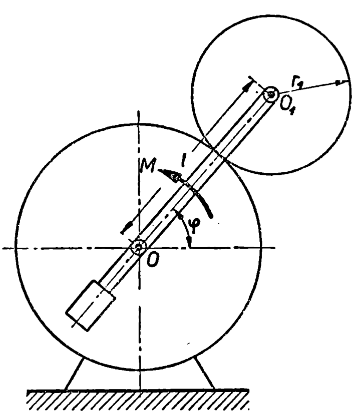
Lösung: $x = -\frac{Pl}{P_1} + \left(l_0 + \frac{Pl}{P_1}\right) \mathfrak{Cof} \sqrt{\frac{P_1\, g}{(P + P_1 + P_2)\, l}} \cdot t.$

1182. Eine Welle mit der Riemenscheibe I wird durch einen Motor angetrieben, dessen Welle eine Riemenscheibe II trägt, welche durch einen Treibriemen mit der Riemenscheibe I verbunden ist. Die Trägheitsmomente der Welle des Motors und der Riemenscheibenwelle zusammen mit den Riemenscheiben haben die Werte Θ_1 und Θ_2. Das Gewicht des endlosen Riemens beträgt P, der Halbmesser der Riemenscheibe des Motors r_1, die Übersetzung vom Motor zur Riemenscheibenwelle sei k.

Man finde die Winkelbeschleunigung der Motorwelle, wenn die Reibung in den Lagern vernachlässigt wird. An der Motorwelle wirkt das Drehmoment M_1 und an der Riemenscheibenwelle das Moment des Nutzwiderstandes M_2.

Lösung: $\varepsilon_1 = g \dfrac{M_1 - kM_2}{(\Theta_1 + k^2 \Theta_2) g + Pr_1^2}$.

1183. In einem epizyklischen Getriebe sind das Laufzahnrad mit dem Halbmesser r_1 und die Kurbel mit dem Gegengewicht, die um die Achse des unbeweglichen Zahnrades unter der Einwirkung des angelegten Momentes M rotiert, gelenkig verbunden.



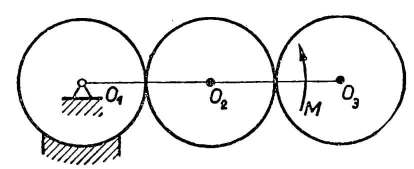
Man bestimme die Winkelbeschleunigung der rotierenden Kurbel sowie die Umfangskraft S der Zahnräder.

Die Entfernung zwischen den Achsen der Zahnräder beträgt l, das Trägheitsmoment der Kurbel mit Gegengewicht in bezug auf die Drehachse Θ_0, die Masse des Laufzahnrades m_1, das Trägheitsmoment des Zahnrades in bezug auf seine Achse ist Θ_1. Man vernachlässige die Reibung; der Schwerpunkt von Zahnrad, Kurbelwelle und Gegengewicht befindet sich auf der Drehachse der Kurbel.

Lösung: $\varepsilon = \dfrac{M}{\Theta_0 + m_1 l^2 + \Theta_1 \dfrac{l^2}{r_1^2}}$; $S = \dfrac{\Theta_1 l}{r_1^2}\, \varepsilon$.

1184. In einem Planetengetriebe ist das Rad mit der Achse O_1 unbeweglich. An der Handkurbel O_1O_3 wirkt ein Drehmoment M. Das System liegt in der horizontalen Ebene.

Man bestimme die Winkelbeschleunigung der Handkurbel, wenn man die Räder als homogene Scheiben betrachtet. Sie besitzen die gleiche Masse m und den Halbmesser r. Die Masse der Handkurbel wird vernachlässigt.



Lösung: $\varepsilon_1 = \dfrac{M}{22\, mr^2}$.

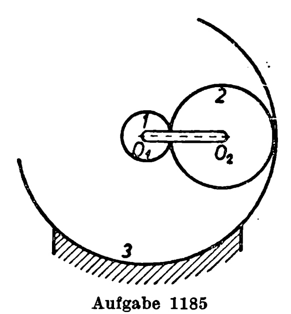
1185. Bei dem abgebildeten Getriebe rollt Rad 2, das durch die Handkurbel O_1O_2 in Bewegung gesetzt wird, ohne Schlupf auf der Innenfläche des feststehenden Rades 3 und dreht auf diese Weise Rad 1 um die Achse O_1. Es sei bekannt, daß sich Rad 1 zehnmal schneller als die Handkurbel dreht.

Unter der Annahme, die Räder seien homogene Scheiben gleicher Stärke und aus gleichem Material angefertigt, finde man die Bewegung des Systems unter der Voraussetzung, daß auf Rad 1 ein konstantes Gegenmoment M_1 wirkt und an die Handkurbel das konstante Drehmoment M angelegt ist. Das System liegt in der Horizontalen. Man vernachlässige die Masse der Kurbel.

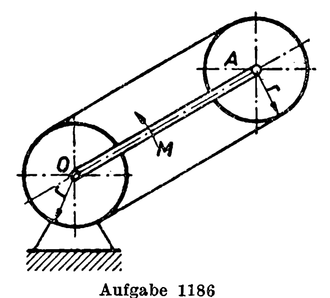
Lösung: Die Winkelbeschleunigung der Handkurbel ist gleich

$$\varepsilon = \frac{M - 10\,M_1}{1300\,\Theta},$$

wobei Θ das Trägheitsmoment des Rades 1 in bezug auf seine Drehachse ist.



Aufgabe 1185

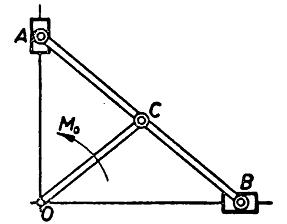


Aufgabe 1186

1186. Man bestimme die Winkelbeschleunigung der Kurbel $OA = l$, die an ihrem Ende A eine bewegliche Riemenscheibe mit dem Halbmesser r trägt und das am Mittelpunkt O der unbeweglichen Riemenscheibe mit dem Radius r wirkende Moment M aufnimmt. Beide Riemenscheiben sind durch einen endlosen Riemen verbunden, der so gespannt ist, daß bei der Bewegung des Systems ein Schlupf des Riemens an dem Umfang der Scheiben nicht erfolgt. Das System liegt in der horizontalen Ebene. Das Gewicht der Kurbel beträgt P, das Gewicht der Riemenscheibe Q.

Lösung: $\varepsilon = 3\,gM/(P + 3\,Q)\,l^2$.

1187. Man bestimme die Winkelbeschleunigung der Kurbel, die das Lineal eines in der Horizontalen liegenden Ellipsengetriebes in Bewegung setzt, wenn auf die Achse der Kurbel ein Drehmoment M_0 einwirkt. Man betrachte die Kurbel und das Lineal als homogene Prismenstäbe mit den Gewichten p und $2p$, wobei $OC = AC = BC = a$ ist. Die Gewichte der Schlitten A und B betragen $q_1 = q_2 = q$. Man vernachlässige die Reibung.



Lösung: $\varepsilon = M_0\,g/a^2\;(3\,p + 4\,q)$.

1188. Man bestimme die Winkelbeschleunigungen der Antriebs- und Abtriebswellen I und IV, die durch ein Untersetzungsgetriebe verbunden sind. Dieses besteht aus dem unbeweglichen Zahnrad 1 mit dem Halbmesser r_1, zwei gepaarten Laufzahnrädern 2 und 3 mit den Halbmessern r_2 und r_3 und dem Zahnrad 4 mit dem Halbmesser r_4, das auf der Abtriebswelle befestigt ist.

Das Trägheitsmoment der Massen, die mit der Antriebswelle verbunden sind, ist in bezug auf die Wellenachse Θ_1. Die Masse jedes Paares der Laufzahnräder beträgt m_2, das Trägheitsmoment des Paares in bezug auf die eigene Achse Θ_2, das Trägheitsmoment der mit der Abtriebswelle verbundenen Massen in bezug auf die Wellenachse Θ_4, das Drehmoment, das an der Antriebswelle wirkt, M_1 und das Gegenmoment, das an der Abtriebswelle angreift, M_4. Man vernachlässige die Reibung.

Lösung: $$\varepsilon_1 = \frac{M_1 - M_4\left(1 - \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)}{\Theta_1 + 2\,m_2\,(r_1 + r_2)^2 + 2\,\Theta_2\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \Theta_4\left(1 - \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)^2};$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1\left(1 - \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right).$$

Aufgabe 1188

Aufgabe 1189

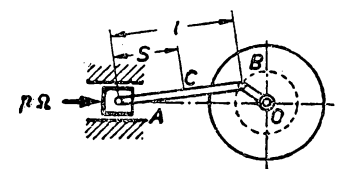
1189. Die Last M, deren Gewicht 101 kg beträgt, hebt durch einen Flaschenzug eine andere Last M_1, die zusammen mit dem unteren Bügel 320 kg wiegt. Im ganzen besteht das System aus vier Rollen. Die großen Rollen wiegen je 16 kg, die kleinen je 8 kg. Die Halbmesser der großen Rollen sind r, die Halbmesser der kleinen r_1.

Man bestimme die Beschleunigung der Last M.

Bei Bestimmung der Energie der Rollen nehmen wir an, daß deren Masse gleichmäßig auf dem Umfang vom Radius r bzw. r_1 verteilt ist.

Lösung: 0,1 g.

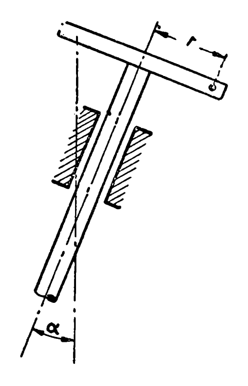
1190. Ein Kurbelsystem besteht aus dem Kolben mit der Masse m_1, der Pleuelstange AB mit der Masse m_2, der Kurbel OB, der Welle und dem Schwungrad. Θ_2 ist das Trägheitsmoment der Pleuelstange in bezug auf den Punkt A, Θ_3 das Trägheitsmoment der Kurbel OB, der Welle und des Schwungrades in bezug auf die Drehachse; Ω ist die Kolbenfläche, p der Druck auf den Kolben, l die Länge der Pleuelstange, s der Abstand zwischen dem Punkt A und dem Schwerpunkt der Pleuelstange, r ist der Kurbelradius OB und M das Gegenmoment, das auf die Welle wirkt.



Man finde die Bewegungsgleichung des Systems, wenn man den Drehwinkel ψ der Pleuelstange als klein annimmt, d.h., wenn man annimmt, daß $\sin\psi = \psi$ und $\cos\psi = 1$ ist. Der Mechanismus liegt in einer horizontalen Ebene.

Lösung:
$$\left[(m_1 + m_2)\, r^2 \sin^2\varphi + (\Theta_2 + m\, s^2)\left(\frac{r}{l}\right)^2 \cos^2\varphi + \Theta_3\right]\ddot{\varphi} +$$
$$+ \left[(m_1 + m_2)\, r^2 - (\Theta_2 + m\, s^2)\left(\frac{r}{l}\right)^2\right]\cos\varphi\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 = -M + \Omega\, p\, r \sin\varphi.$$

1191. In einer Auswuchtmaschine sind die Lager um den Winkel α zur Vertikalen geneigt. Ein Rotor, der in ein Lager eingesetzt wird, hat das Trägheitsmoment Θ (in bezug auf seine Achse) und trägt die nicht ausgewuchtete Masse m im Abstand r von der Achse.



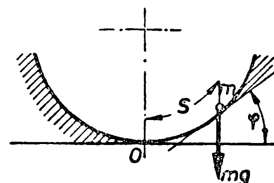
Man finde die Differentialgleichung der Rotorbewegung und bestimme die Frequenz k der kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage.

Lösung: $(m\, r^2 + \Theta)\,\ddot{\varphi} + m\, g\, r \sin\alpha \sin\varphi = 0;$

$$k = \sqrt{\frac{m g r \sin\alpha}{m r^2 + \Theta}},$$

worin φ der Drehwinkel des Rotors ist.

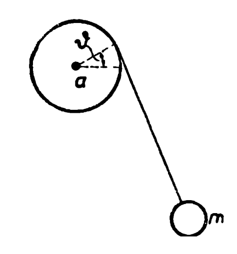
1192. Ein materieller Punkt der Masse m bewegt sich unter dem Einfluß der Schwerkraft auf einer Führungskurve, die durch die Gleichung $s = 4\, a \sin\varphi$ gegeben ist. s ist der Weg, der vom Punkt O zurückgelegt wird, φ der Winkel der Tangente der Kurve mit einer Horizontalachse.



Man bestimme die Bewegung des Punktes.

Lösung: $s = A \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\, t + \varphi_0\right),$

(worin A und φ_0 die Integrationskonstanten sind).



1193. Man finde die Bewegungsgleichung eines Pendels, das aus einem materiellen Punkt m besteht, der an einem Faden hängt. Der Faden ist auf einen Zylinder mit dem Halbmesser r aufgewickelt. Die herabhängende Länge des Fadens im Gleichgewicht ist l. Die Masse des Fadens ist zu vernachlässigen.

Lösung: $(l + r\vartheta)\ddot{\vartheta} + r\dot{\vartheta}^2 + g\sin\vartheta = 0$, worin ϑ der Ausschlagswinkel des Pendels von der Vertikalen ist.

1194. Man finde die Gleichung der Bewegung eines Pendels, das aus einem materiellen Punkt der Masse m besteht und an einem Faden hängt, dessen Länge sich nach dem willkürlich gegebenen Gesetz $l = l(t)$ ändert.

Lösung: $\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$,

worin φ der Ausschlagswinkel des Fadens zur Vertikalen ist.

1195. Man finde in der vorangegangenen Aufgabe die Bewegung des Pendels für den Fall kleiner Schwingungen. Der Faden verlängere sich dabei nach dem Gesetz $l(t) = l_0 + ct$.

Hinweis: Man nehme $l(t)$ als die unabhängige Veränderliche an.

Lösung: $$\varphi = \frac{1}{\sqrt{l(t)}}\left[C_1 J_1\left(2\sqrt{\frac{g}{c^2}l(t)}\right) + C_2 Y_1\left(2\sqrt{\frac{g}{c^2}l(t)}\right)\right],$$

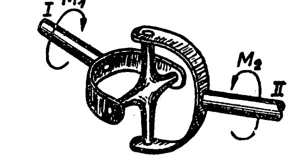
worin C_1 und C_2 willkürliche Konstanten und J_1, Y_1 die BESSELschen und NEUMANNschen Funktionen 1. Ordnung sind.

1196. Der Aufhängepunkt eines mathematischen Pendels der Masse m und der Länge l bewegt sich nach dem gegebenen Gesetz $\xi = \xi(t)$ auf einer geneigten Geraden. Diese bildet mit der Horizontalen den Winkel α.

Man finde die Bewegungsgleichung des Pendels.

Lösung: $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi + \frac{\ddot{\xi}}{l}\cos(\varphi - \alpha) = 0$.

1197. Zwei Wellen, die in einer Ebene liegen und den Winkel α miteinander bilden, sind mit einem Cardangelenk verbunden. Die Trägheitsmomente der Wellen sind Θ_1 und Θ_2.



Man finde die Bewegungsgleichung der ersten Welle, wenn auf diese das Drehmoment M_1 wirkt und die andere Welle das Gegenmoment M_2 aufnimmt. Man vernachlässige die Reibung in den Lagern.

Lösung: Wenn man den Drehwinkel der Welle I mit φ bezeichnet, ergibt sich:

$$\left[\Theta_1 + \Theta_2\left(\frac{\cos\alpha}{1 - \sin^2\alpha\cos^2\varphi}\right)^2\right]\ddot{\varphi} - \frac{\Theta_2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin 2\varphi}{(1 - \sin^2\alpha\cos^2\varphi)^3}\cdot\dot{\varphi}^2 =$$
$$= M_1 - M_2\frac{\cos\alpha}{1 - \sin^2\alpha\cos^2\varphi}.$$

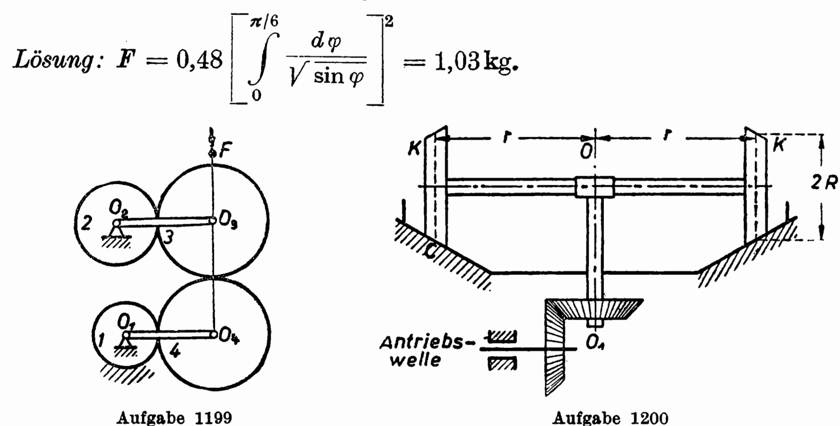
1198. Man finde in der Aufgabe 1197 die Bewegung der ersten Welle im Fall eines kleinen Winkels α zwischen den Wellen. Die Berechnung führe man unter Vernachlässigung von α^2 durch.

Lösung: $\varphi = \frac{1}{2}\frac{M_1 - M_2}{\Theta_1 + \Theta_2}t^2 + C_1 t + C_2$,

worin C_1 und C_2 willkürliche Konstanten sind.

1199. Das in der horizontalen Ebene liegende epizyklische Getriebe besteht, wie in der Zeichnung abgebildet, aus drei Kurbeln O_1O_4, O_4O_3, O_3O_2 und vier Zahnrädern 1, 2, 3, 4 mit den entsprechenden Halbmessern $r_1 = 50$ mm, $r_2 = 80$ mm, $r_3 = 120$ mm, $r_4 = 150$ mm sowie $O_1O_2 = O_3O_4 = 270$ mm; $O_1O_4 = O_2O_3 = 200$ mm. Rad 1 ist unbeweglich. Man betrachte die Räder als homogene Scheiben (mit gleicher Dicke und aus gleichem Material) und vernachlässige die Massen der Kurbeln sowie die Reibungskraft. Man bestimme die Kraft F (die man konstant und entlang O_4O_3 annimmt), die auf die Kurbel O_3O_4 einwirken muß, damit sich in 1 sec die Kurbel O_2O_3 um den Winkel 30° dreht. Zu Anfang war das System in Ruhe und $\sphericalangle O_2O_3O_4 = 90°$. Das Gewicht aller beweglichen Räder beträgt 30 kg.

Lösung: $F = 0{,}48\left[\int\limits_0^{\pi/6}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}}\right]^2 = 1{,}03\,\text{kg}.$



Aufgabe 1199 Aufgabe 1200

1200. Die Läufer K K werden durch das Getriebe eines Motors, wie es die Zeichnung zeigt, angetrieben. Das Gewicht des Läufers beträgt 3 t, der mittlere Halbmesser $R = 1$ m, der Halbmesser des Drehkreises $r = 0{,}5$ m. Man nehme an, daß die augenblickliche Drehachse des Läufers durch den Mittelpunkt C des Umfanges geht. Das Verhältnis der Halbmesser der Räder des Kegelradgetriebes vom Motor zur Vertikalwelle O_1O ist 2/3. Man nehme an, daß jeder Läufer eine homogene Scheibe darstellt (vom Halbmesser R), und vernachlässige die Masse aller beweglichen Teile.

Man berechne, welches konstante Drehmoment an der Welle des Motors angreifen muß, damit der Vertikalachse O_1O die Drehzahl 120 U/min nach 10 sec (vom Augenblick des Anlassens des Motors an) erteilt wird. Die Reibungksräfte sind zu vernachlässigen.

Lösung: 320 mkg.

1201. Ein homogener Kreiskegel pendelt auf einer rauhen Oberfläche, die unter dem Winkel α gegen die Horizontale geneigt ist. Die Länge der Mantellinie des Kegels ist l. Der Spitzenwinkel ist 2β.

Man stelle die Gleichung für die Kegelbewegung auf.

Hinweis: Für die veränderliche Bewegungskoordinate ist der Winkel ϑ zu nehmen, der von dem Gradienten der Fläche mit der Mantellinie des Kegels im Berührungspunkt gebildet wird.

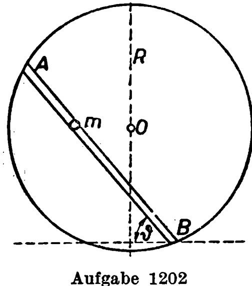
Lösung: $\ddot{\vartheta} + \dfrac{g \sin \alpha}{l\left(\cos^2 \beta + \frac{1}{5}\right)} \sin \vartheta = 0.$

1202. Auf einem homogenen Stab der Masse M und der Länge $2a$, dessen Enden auf einem glatten Kreisring vom Halbmesser R gleiten, bewegt sich ein materieller Punkt der Masse m mit konstanter relativer Geschwindigkeit v.

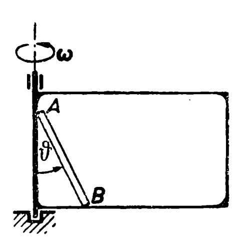
Man bestimme die Bewegung des Stabes.

Lösung: $\vartheta - \vartheta_0 = C \cdot \operatorname{arc\,tg} \dfrac{vt}{\sqrt{R^2 - a^2 + \frac{M}{m}\left(R^2 - 2\frac{a^2}{3}\right)}},$

worin ϑ_0 und C willkürliche Konstanten sind.



Aufgabe 1202



Aufgabe 1203

1203. Die Enden eines homogenen Stabes AB der Länge $2a$ und der Masse M gleiten ohne Reibung längs der horizontalen und vertikalen Stäbe eines Rahmens, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um seine vertikale Seite rotiert.

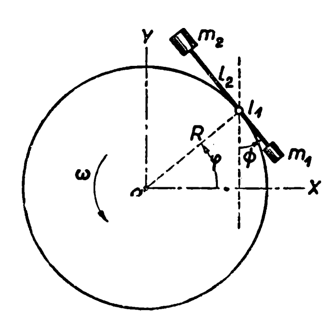
Man finde die Gleichung der Bewegung des Stabes und bestimme die Gleichgewichtslage.

Lösung: $\frac{4}{3} Ma^2 \ddot{\vartheta} - \frac{4}{3} M \omega^2 a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - Mga \sin \vartheta = 0,$

worin ϑ der Winkel ist, der von dem Stab mit der Vertikalen gebildet wird. In der Gleichgewichtslage ist $\vartheta = 0$.

1204. Am Umfang einer homogenen Kreisscheibe vom Halbmesser R ist mit einem Gelenk ein Hebel befestigt, der an seinen Enden die Punktmassen m_1 und m_2 trägt. Die Abstände der Massen vom Gelenk sind l_1 und l_2. Die Scheibe dreht sich um die vertikale Achse, die senkrecht zu ihrer Ebene steht. Die Winkelgeschwindigkeit beträgt ω.

Man gebe die Bewegungsgleichung an und bestimme die Gleichgewichtslage. Die Masse des Hebels ist zu vernachlässigen. Die Drehachse des Hebels liegt parallel zur Drehachse der Scheibe.



Lösung: $(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\ \ddot{\psi} - R\omega^2\ (m_1 l_1 - m_2 l_2)$ $\cos\ (\psi - \omega t) = 0.$

Bei $m_1 l_1 = m_2 l_2$ befindet sich der Hebel in indifferentem Gleichgewicht. Bei $m_1 l_1 \neq m_2 l_2$ existiert eine relative Gleichgewichtslage, bei der $\psi = \omega t + \frac{\pi}{2}$ ist, d. h., der Hebel hat radiale Richtung.

1205. Man löse die Aufgabe 1204 unter der Voraussetzung, daß die Scheibe in der Vertikalebene rotiert, d. h., man berücksichtige die Schwerkraft.

Lösung: $$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\,\ddot{\psi} - R\omega^2\,(m_1 l_1 - m_2 l_2)\cos\,(\psi - \omega t) + \\ + (m_1 l_1 - m_2 l_2)\,g\sin\psi = 0.$$

1206. Eine dünne Scheibe der Masse M kann ohne Reibung auf einer horizontalen Ebene gleiten. Auf der Scheibe selbst bewegt sich ein Körper der Masse m. Es sind die Gleichungen der Bewegung des Körpers in kartesischen Koordinaten gegeben: $x = x\,(t)$ und $y = y\,(t)$. Das Trägheitsmoment der Scheibe in bezug auf den Schwerpunkt ist Θ.

Es ist die Veränderung der Winkelgeschwindigkeit ω der Scheibe zu bestimmen, wenn man den Körper als einen Massenpunkt ansieht. In der Anfangslage befand sich die Scheibe in Ruhe.

Lösung: $$\left[\Theta + \frac{mM}{m+M}\,(x^2 + y^2)\right]\dot{\varphi} + \frac{mM}{m+M}(x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{mM}{m+M}(x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0);$$

$x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$ sind die Koordinatenwerte sowie die Werte der Geschwindigkeit des Punktes in der Ausgangslage.

1207. Auf der in der vorangegangenen Aufgabe beschriebenen Scheibe bewegt sich auf einem Kreis mit dem Halbmesser R ein Massenpunkt mit der relativen Geschwindigkeit $v = \alpha\,t$. Man finde das Bewegungsgesetz der Scheibe.

Lösung: $$\varphi = -\frac{mM}{2\,(m+M)}\,\frac{R\alpha}{\Theta + \dfrac{mM}{m+M}\,R^2}\,t^2 = \frac{\beta}{2\,R}\,t^2$$

$$\xi = -\frac{mR}{m+M}\cos\frac{\alpha+\beta}{2\,R}\,t^2$$

$$\eta = -\frac{mR}{m+M}\sin\frac{\alpha+\beta}{2\,R}\,t^2,$$

wobei φ der Drehwinkel der Scheibe und ξ und η die Koordinaten des Schwerpunktes der Scheibe in dem unbeweglichen Koordinatensystem sind, dessen Ursprung im Schwerpunkt des Systems liegt.

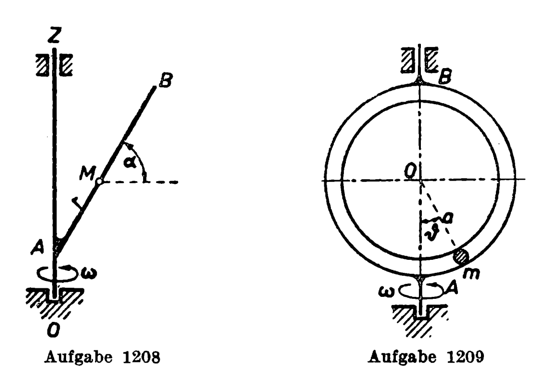
1208. Ein Massenpunkt M bewegt sich auf der Geraden AB, die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine unbewegliche vertikale Achse dreht. Die Gerade bildet mit der Horizontalen den Winkel α.

Man bestimme die Bewegungsgleichung des Punktes.

Lösung: Der Abstand des beweglichen Punktes vom Schnittpunkt der Geraden mit der vertikalen Achse beträgt:

$$r = C_1 e^{\omega t \cos\alpha} + C_2 e^{-\omega t \cos\alpha} + \frac{g}{\omega^2}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha},$$

worin C_1 und C_2 Integrationskonstanten sind.



Aufgabe 1208 Aufgabe 1209

1209. Ein materieller Punkt der Masse m kann sich auf einem Kreis vom Halbmesser a bewegen. Der Kreis selbst rotiert mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit ω um einen vertikalen Durchmesser AB.

Man stelle die Bewegungsgleichung des Punktes auf und bestimme das Moment M, das notwendig ist, um die Winkelgeschwindigkeit konstant zu erhalten.

Lösung: $\ddot{\vartheta} + \left(\frac{g}{a} - \omega^2 \cos\vartheta\right)\sin\vartheta = 0,$

$$M = 2\,ma^2 \sin\vartheta\cos\vartheta \cdot \omega\,\dot{\vartheta}.$$

1210. Ein Massenpunkt der Masse m bewegt sich im Innern eines glatten Rohres, dessen Achse einen Kreis mit dem Halbmesser a darstellt. Das Rohr kann sich frei um den vertikalen Durchmesser drehen. Das Trägheitsmoment des Rohres in bezug auf den vertikalen Durchmesser ist Θ.

Man bestimme die Bewegungsgleichung des Systems, wenn man annimmt, daß das Rohr durch das konstante Moment M bewegt wird.

Lösung: $ma^2\ddot{\vartheta} - ma^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2 + mga\sin\vartheta = 0$

$$\Theta\,\ddot{\varphi} + ma^2\sin^2\vartheta\,\ddot{\varphi} + 2\,ma^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta}\,\dot{\varphi} = M$$

(ϑ ist der Winkel, der die Lage des Punktes im Rohre bestimmt, φ ist das Azimut des Rohres, siehe Zeichnung zur Aufgabe 1209).

1211. Ein homogener Träger mit dem Gewicht P und der Länge $2\,l$ hängt an den Enden eines Seiles der Länge $2\,a$. Das Seil ist über eine feste Rolle C gelegt. Man bilde die Bewegungsgleichung des Systems, wenn die Masse des Seiles vernachlässigt und die Rolle als sehr klein angenommen wird.

Hinweis: Die Bewegungsbahn des Punktes C in bezug auf den Abschnitt F_1F_2 ist eine Ellipse mit der großen Achse $2\,a$ und den Brennpunkten F_1 und F_2. Man nehme als eine der gemeinsamen Koordinaten die exzentrische Anomalität der Ellipse an, d. h. den Winkel φ, der durch das Verhältnis $AB = a \cdot \cos\varphi$ und $BC = \sqrt{l^2 - a^2}\,\sin\varphi$ bestimmt wird. Als die zweite Koordinate nehme man den Winkel α zwischen der vertikalen Achse y und der Senkrechten BC zum Stab an.

Lösung: Die kinetische Energie des Systems ist

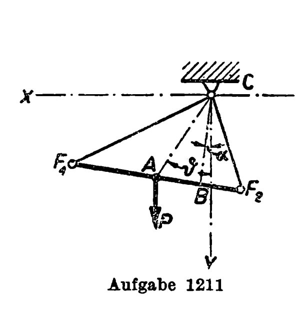
$$T = \frac{P}{2\,g}\left[\left(\frac{l^2}{3} + a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi\right)\dot{\alpha}^2 - 2\,ab\,\dot{\varphi}\,\dot{\alpha} + \frac{a^2 b^2 + l^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\,\dot{\varphi}^2\right]$$

Die potentielle Energie des Systems ist

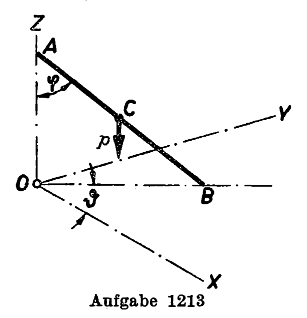
$$U = -P\,(b\sin\varphi\cos\alpha - a\cos\varphi\sin\alpha);\ b = \sqrt{l^2 - a^2}.$$

1212. Man untersuche unter den Bedingungen der vorstehenden Aufgabe die kleinen Bewegungen des Systems in der Nähe der Gleichgewichtslage $\alpha = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und bestimme, ob diese Gleichgewichtslage stabil ist oder nicht.

Lösung: Die Gleichgewichtslage $\alpha = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist labil.



Aufgabe 1211



Aufgabe 1213

1213. Ein homogener dünner Stab AB mit dem Gewicht p und der Länge $2\,l$ gleitet mit dem Ende A auf einer Vertikalen und mit dem Ende B auf einer horizontalen Ebene.

Man leite die Bewegungsgleichung des Stabes ab und finde deren erste Integrale.

Lösung: $\ddot{\varphi} - \dot{\vartheta}^2\sin\varphi\cos\varphi = \frac{3}{4}\frac{g}{l}\sin\varphi; \qquad \ddot{\vartheta}\sin^2\varphi + 2\,\dot{\vartheta}\,\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi = 0$

(φ ist der Neigungswinkel des Stabes zur Vertikalen, ϑ ist der Winkel der Stabprojektion OB in der horizontalen Ebene mit der Achse Ox).

$\dot{\vartheta}\sin^2\varphi = C_1; \qquad \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}\sin^2\varphi + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\varphi = C_2,$

worin C_1 und C_2 Integrationskonstanten sind.

1214. Man finde die Bewegungsgleichungen eines mathematischen Pendels der Masse m, das an einem elastischen Faden hängt. Die Länge des Fadens in der Gleichgewichtslage ist l, seine Federkonstante c.

Lösung: Wenn φ der Neigungswinkel des Pendels gegenüber der Vertikalen und z die Verlängerung des Fadens ist, so sind die Bewegungsgleichungen:

$$(1 + z)\,\ddot{\varphi} + 2\dot{z}\,\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0;$$

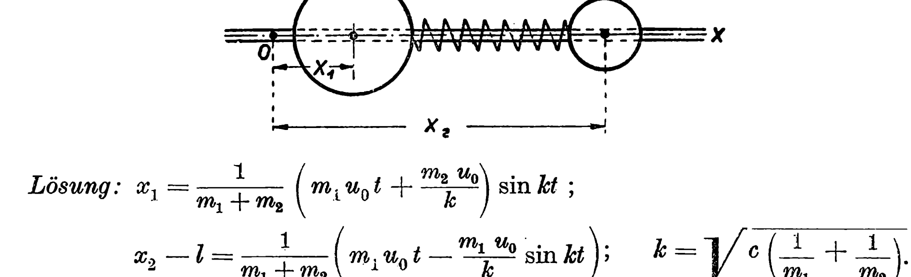
$$\ddot{z} - (1 + z)\,\dot{\varphi}^2 + \frac{c}{m}\,z + \frac{g}{l}\,(1 - \cos\varphi) = 0.$$

1215. Man finde in der Aufgabe 1214 die Bewegung des Pendels für den Fall sehr kleiner Schwingungen.

Lösung: $z = A\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + \alpha\right)$, $\varphi = B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \beta\right)$,

worin A, α, B, β Integrationskonstanten sind.

1216. Man bestimme die Bewegung des Systems zweier Massen m_1 und m_2, die miteinander durch eine Feder mit der Federkonstanten c verbunden sind und entlang des Stabes gleiten können. Der Abstand zwischen den Schwerpunkten der Massen bei ungespannter Feder beträgt l. Der Anfangszustand des Systems wird durch folgende Geschwindigkeitswerte und Koordinaten der Schwerpunkte der Massen bestimmt: $t = 0$, $x_1 = 0$, $\dot{x}_1 = u_0$, $x_2 = l$, $\dot{x}_2 = 0$.



Lösung: $x_1 = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 u_0 t + \frac{m_2 u_0}{k}\right)\sin kt$;

$$x_2 - l = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 u_0 t - \frac{m_1 u_0}{k}\sin kt\right); \qquad k = \sqrt{c\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}.$$

1217. Das Schwungrad 1, das um die vertikale Achse O_1 unter der Wirkung eines konstanten Momentes M rotiert, trägt die Drehachse O_2 des Zahnrades 2. Das Zahnrad 2 befindet sich im Eingriff mit dem Zahnrad 3, das sich um eine außerhalb des Schwungrades befestigte Achse drehen kann. Die Drehung des Zahnrades 3 wird durch eine Spiralfeder behindert (die auf der Zeichnung nicht angegeben ist), deren Gegenmoment gleich $c\,\psi$ ist, also proportional dem Drehwinkel ψ des Zahnrades 3 anwächst.

Man bestimme die Bewegung des Systems, wenn die Zahnräder als homogene Scheiben mit gleichen Radien a und gleicher Masse m betrachtet werden und das Trägheitsmoment des Schwungrades in bezug auf die Achse O_1 mit $20\,ma^2$ angenommen wird. Zu Anfang befand sich das System in Ruhe.

Lösung: $\psi = \frac{M}{26\,c}\left(1 - \cos 1{,}02 \sqrt{\frac{c}{ma^2}} \cdot t\right)$,

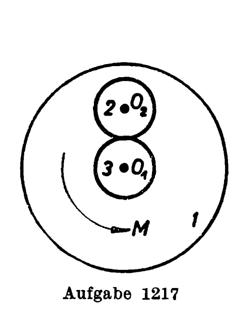
$$\varphi = \frac{Mt^2}{52\,ma^2} + \frac{M}{676\,c}\left(1 - \cos 1{,}02 \sqrt{\frac{c}{ma^2}} \cdot t\right),$$

worin φ der Drehwinkel des Schwungrades ist.

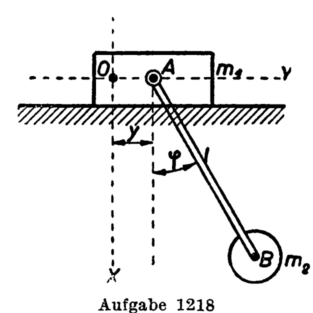
1218. Man finde die Bewegungsgleichung eines elliptischen Pendels, das aus einer Masse m_1, die ohne Reibung auf einer horizontalen Ebene gleitet, und einer kleinen Kugel der Masse m_2 besteht. Letztere ist mit m_1 durch einen Stab AB der Länge l gelenkig verbunden. Dieser Stab kann sich frei um die Achse A drehen, die mit dem Stößel verbunden ist und zur Zeichnungsfläche senkrecht steht. Die Masse des Stabes wird vernachlässigt.

Lösung: $\frac{d}{dt}\left[(m_1 + m_2)\,\dot{y} + m_2\,l\,\dot{\varphi}\cos\varphi\right] = 0;$

$$l\,\ddot{\varphi} + \cos\varphi\,\ddot{y} + g\sin\varphi = 0.$$



Aufgabe 1217



Aufgabe 1218

1219. Man bestimme die Periode für kleine Schwingungen des elliptischen Pendels der vorangegangenen Aufgabe.

Lösung: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}\,\frac{l}{g}}.$

1220. Aus der Aufgabe über die Bewegung des elliptischen Pendels (siehe Aufgabe 1218) ist die Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung der Wirkung einer konstanten Reibungskraft beim Gleiten der Masse m_1 auf der Ebene abzuleiten. Der Reibungskoeffizient ist μ.

Lösung: $\frac{d}{dt}\left[(m_1 + m_2)\,\dot{y} + m_2\,l\,\dot{\varphi}\cos\varphi\right] = -\mu\left[(m_1 + m_2)\,g + m_2\,l\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \right.$

$$\left. + m_2\,l\sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right] \operatorname{sign}\dot{y},$$

$$l\,\ddot{\varphi} + \cos\varphi\,\ddot{y} + g\sin\varphi = 0,$$

$$\text{wobei } \operatorname{sign}\dot{y} = \begin{cases} +1 \text{ bei } \dot{y} > 0, \\ -1 \text{ bei } \dot{y} < 0. \end{cases}$$

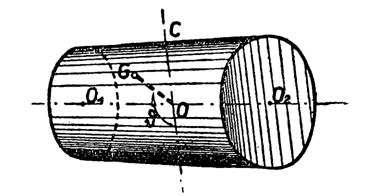
1221. Ein rauher Zylinder der Masse m und vom Halbmesser r rollt ohne Schlupf auf der Innenfläche eines Hohlzylinders der Masse M und vom Halbmesser R. Dieser ist um seine horizontal gelagerte Achse O drehbar. Die Trägheitsmomente der Zylinder in bezug auf ihre Achsen betragen MR^2 und $\frac{1}{2}mr^2$. Man bilde die Bewegungsgleichungen des Systems und finde deren erste Integrale.

Lösung: $MR^2\dot{\vartheta} - \frac{1}{2}mR\,[(R-r)\,\dot{\varphi} - R\dot{\vartheta}] = C_1,$

$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{4}m\,[(R-r)\,\dot{\varphi} - R\dot{\vartheta}]^2 + \\ + \frac{m}{2}(R-r)^2\dot{\varphi}^2 - mg\,(R-r)\cos\varphi = C_2,$$

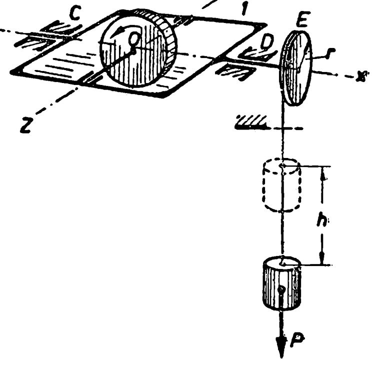
worin φ der Drehwinkel der Geraden OO_1, welche die Achsen der Zylinder verbindet, und ϑ der Drehwinkel des äußeren Zylinders ist.

1222. Ein Körper mit dem Gewicht P kann sich um die Horizontalachse O_1O_2 drehen. Diese rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die Vertikalachse OC. Der Schwerpunkt des Körpers G befindet sich im Abstand l vom Punkt O auf einer Geraden, die zu O_1O_2 senkrecht ist. Man stelle die Bewegungsgleichung unter der Annahme auf, daß die Achsen O_1O_2 und OG Hauptträgheitsachsen des Körpers im Punkt O sind. Die Trägheitsmomente des Körpers in bezug auf die Hauptachsen sind A, B, C.



Lösung: $A\ddot{\vartheta} - \omega^2(C-B)\sin\vartheta\cos\vartheta = -Pl\sin\vartheta$, wobei ϑ der Drehwinkel um O_1O_2 ist.

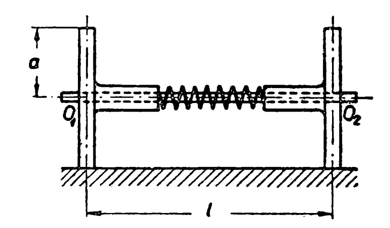
1223. Die Last P dreht den Rahmen 1 um die Achse CD. Der Rahmen ist einschließlich Seil und Riemenscheibe E (mit Halbmesser r) im Gleichgewicht. Man bestimme den Druck auf die Lager C und D des Rahmens durch das Kreiselmoment des im Rahmen laufenden Rotors, wenn die Last um h herabgesunken ist. A und C sind die Trägheitsmomente des Rotors in bezug auf die Achsen Ox und Oz. A_1 ist das Trägheitsmoment des Rahmens in bezug auf die Achse Ox. Der Rotor macht n Umdrehungen in der Sekunde. Der Abstand DC ist gleich b.



Lösung: $R_C = R_D = \frac{M}{b} = \frac{2C\pi n}{b}\sqrt{\frac{2Ph}{A + A_1 + \frac{P}{g}r^2}}.$

1224. Ein System besteht aus zwei gleichen Rädern (Halbmesser a), von denen jedes unabhängig vom anderen um die gemeinsame Achse O_1O_2 der Länge l rotieren kann. Es rollt auf einer Horizontalfläche. Die Räder sind mit einer Feder der Federkonstante c verbunden, die auf Verdrehung beansprucht wird. Die Masse jedes Rades ist M. C ist das Trägheitsmoment jedes Rades in bezug auf seine Achse und A das Trägheitsmoment des Rades in bezug auf den Durchmesser.

Man stelle die Bewegungsgleichung des Systems auf und bestimme die Bewegung, die den Anfangsgleichungen $\varphi_1 = 0$, $\dot{\varphi}_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\dot{\varphi}_2 = \omega$ entspricht (φ_1, φ_2 sind die Drehwinkel der Räder). Die Masse der Achse wird vernachlässigt.



Lösung: $\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\omega t - \frac{\omega}{k}\sin kt\right)$; $\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\omega t + \frac{\omega}{k}\sin kt\right)$;

$$k = \sqrt{\frac{2c}{Ma^2 + C + 4A\left(\frac{a}{l}\right)^2}}.$$

1225. Welche Arbeit muß geleistet werden, um einem Wagen der Masse M die Geschwindigkeit u in folgenden Fällen zu erteilen?

1) Auf dem Boden des Wagens liegt (quer) ein homogener Zylinder der Masse m und vom Halbmesser r. Der Trägheitshalbmesser des Zylinders in bezug auf seine Achse ist ϱ. Der Zylinder rollt ohne Schlupf auf dem Boden des Wagens.

2) Der Zylinder ist starr am Boden des Wagens befestigt.

Lösung: $A_1 = \frac{M}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\frac{\varrho^2}{\varrho^2 + r^2}\right)u^2$;

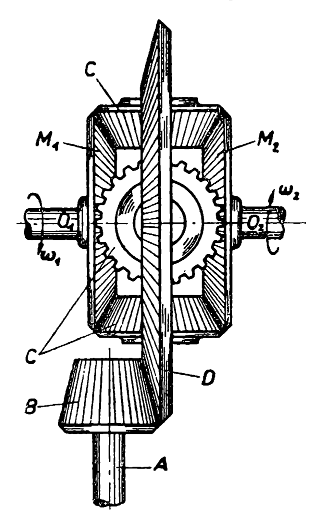
$$A_2 = \frac{M}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)u^2; \quad A_2 > A_1.$$

1226. Man finde die Beschleunigung eines Wagens, auf dessen Plattform ein Zylinder ohne Schlupf rollt. Der Wagen selbst rollt ohne Schlupf auf einer Fläche herab, die den Winkel α mit der Horizontalen bildet und zur Plattform des Wagens parallel ist. Die Achse des Zylinders steht quer zur Bewegungsrichtung des Wagens. Die Masse des Wagens ohne Räder ist M, des Zylinders M_1, aller Räder m. Die Räder betrachte man als homogene Scheiben.

Lösung: $b = \frac{6M + 6m + 2M_1}{6M + 9m + 2M_1}\, g \sin\alpha.$

1227. In dem Differentialregulator, der untenstehend abgebildet ist, sind die nach entgegengesetzten Richtungen mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 rotierenden Wellen mit Zahnrädern M_1 und M_2 versehen. Die Wellen sind durch vier Planetenkegelräder C mit dem Zahnrad D gekoppelt. Die Planetenachsen sind im Radkörper D befestigt. Wenn ω_1 gleich ω_2 ist, bleibt das Zahnrad D unbeweglich. Andernfalls beginnt sich D zu drehen und bringt durch die Welle A die Regulierungsvorrichtung (die auf der Zeichnung nicht abgebildet ist) in Bewegung. Die letztere erzeugt dabei Momente, die den Wellen O_1 und O_2 erteilt werden. Dabei wird die sich rascher bewegende Welle abgebremst, und die langsamere beschleunigt ihre Winkelgeschwindigkeit. Diese Momente werden proportional der Winkelgeschwindigkeit des Zahnrades D angenommen (der Proportionalitätskoeffizient wird mit n bezeichnet) und für beide Wellen gleichgroß vorausgesetzt. Das Gesamtträgheitsmoment des Systems in bezug auf die Achse O_1O_2 ist Θ.

Man finde das Gesetz der Veränderung der Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2, wenn deren Anfangswerte (ω_{10} und ω_{20}) nicht einander gleich sind. Die Trägheitsmomente Θ_1 und Θ_2 der Wellen O_1 und O_2 mit den Zahnrädern M_1 und M_2 werden einander gleich angenommen. Das Trägheitsmoment des Zahnrades D in bezug auf dessen Drehachse sowie der Teile des Mechanismus, die durch die Welle A in Bewegung gesetzt werden, bezeichnen wir mit Θ_D. Bei Lösung der Aufgabe wird noch das Trägheitsmoment Θ_C der Planetenräder bezüglich ihrer Drehachsen in Betracht gezogen (diese Größe tritt im Endresultat nicht auf). Unter dem Trägheitsmoment des Systems bezüglich der Wellenachse wird die Summe $\Theta = 2\,\Theta_1 + \Theta_D + 4\,\Theta'_C$ verstanden, worin Θ'_C das Trägheitsmoment eines Planetenrades in bezug auf die Achse O_1O_2 ist.



Lösung: $\omega_1 = \frac{1}{2}\,\omega_{10}\,(1 + e^{-\lambda t}) + \frac{1}{2}\,\omega_{20}\,(1 - e^{-\lambda t})$,

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\,\omega_{10}\,(1 - e^{-\lambda t}) + \frac{1}{2}\,\omega_{20}\,(1 + e^{-\lambda t}).$$

1228. An den Enden A und B eines Fadens, der durch die Öffnung O der glatten Horizontalfläche eines Tisches hindurchgelassen wird, sind zwei Punktmassen m_1 und m_2 befestigt. Die erste Masse bleibt auf der Tischoberfläche, während sich die zweite auf der Vertikalen bewegt, die durch den Punkt O geht. Zu Anfang ist $OA = r_0$. Die Masse m_2 hat keine Geschwindigkeit, während die Geschwindigkeit v_0 der Masse m_1 senkrecht zur Anfangslage des Fadenstücks OA gerichtet ist. Man beweise, daß unter dieser Bedingung die Masse m_2 eine schwingende Bewegung ausführt.

Man finde die Amplitude a dieser Schwingung und bilde den Ausdruck für ihre Periode t_s. Man nehme den Faden als masselos, dehnungslos und absolut biegsam an.

Lösung: $a = |r_0 - r_1|$

$$T = \sqrt{\frac{2(m_1+m_2)}{m_2 g}} \left| \int_{r_0}^{r_1} \frac{r\,dr}{\sqrt{(r_0-r)(r-r_1)(r-r_2)}} \right|;$$

$$r_{1,2} = \frac{m_1 v_0^2}{4 m_2 g} \pm \sqrt{\frac{m_1 v_0^2}{4 m_2 g}\left(2 r_0 + \frac{m_1 v_0^2}{4 m_2 g}\right)}.$$

Aufgabe 1228

Aufgabe 1229

1229. Eine homogene Scheibe mit dem Halbmesser R und der Masse M kann sich um ihre horizontale Achse O drehen. An der Scheibe hängt an dem Faden AB der Länge l ein materieller Punkt der Masse m.

Man stelle die Bewegungsgleichungen dieses Systems auf.

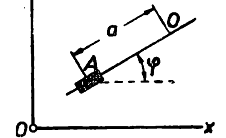
Lösung: $\left(m + \frac{M}{2}\right) R^2 \ddot{\varphi} + mRl \cos(\varphi - \psi)\, \ddot{\psi} + mRl \sin(\varphi - \psi)\, \dot{\psi}^2 +$
$+ mgR \sin\varphi = 0;$

$mRl \cos(\varphi - \psi)\, \ddot{\varphi} + ml^2 \ddot{\psi} - mRl \sin(\varphi - \psi)\, \dot{\varphi}^2 + mgl \sin\psi = 0,$
worin φ der Drehwinkel der Scheibe ist und ψ den Neigungswinkel des Fadens in bezug auf die Vertikale darstellt.

1230. Die Scheibe des in der Aufgabe 1229 beschriebenen Systems dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Man bilde die Bewegungsgleichung des materiellen Punktes und bestimme die äquivalente Länge des mathematischen Pendels $l_ä$.

Lösung: $\ddot{\psi} - \omega^2 \frac{R}{l} \sin(\omega t - \psi) + \frac{g}{l} \sin\psi = 0$, und $l_ä = \frac{g}{\omega^2 R}\, l.$

1231. Man kann einen Schlitten als ein starres System ansehen, das eine ebene Bewegung ausführt. Der Schwerpunkt des Systems befinde sich im Punkt O, die unendlich kleine schneidende Kufe (die im Schema die wirklichen Kufen ersetzt) im Punkt A, der von O um die Strecke a entfernt ist; d. h., die Schlittenbewegung erfolgt immer so, daß AO die Tangente an der durch die Kufe gezeichneten Kurve darstellt. M ist die Masse des Schlittens, Θ das Trägheitsmoment in bezug auf O. Man bestimme die Abhängigkeit des Drehwinkels φ von der Zeit.



Lösung: $\sin k\,(\varphi + \varphi_0) = \mathfrak{L}g\; ct, \quad k^2 = \dfrac{Ma^2}{\Theta + Ma^2},$

worin c und φ_0 Integrationskonstanten sind.

1232. Ein Rad rollt ohne Schlupf auf einer horizontalen Fläche. Der Halbmesser des Rades ist a, seine Masse M, C ist das Trägheitsmoment des Rades in bezug auf seine Achse und A das Trägheitsmoment des Rades in bezug auf seinen Durchmesser. Man stelle die Bewegungsgleichung des Rades auf.

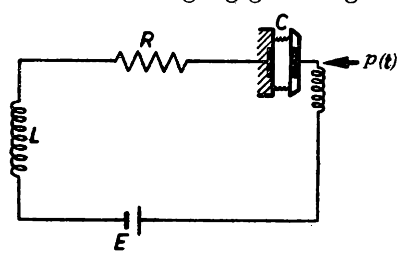
Hinweis: Man benutze die Gleichung von LAGRANGE mit den Multiplikatoren für nicht-holonome Systeme.

Lösung:
$$\frac{d}{dt}\,(A\dot\psi\,\sin^2\vartheta) - C\,(\dot\varphi + \dot\psi\,\cos\vartheta)\,\dot\vartheta\,\sin\vartheta = 0,$$
$$(C + ma^2)\,\frac{d}{dt}\,(\dot\varphi + \dot\psi\,\cos\vartheta) - ma^2\,\dot\vartheta\,\dot\psi\,\sin\vartheta = 0,$$
$$(A + ma^2)\,\ddot\vartheta - A\,\dot\psi^2\sin\vartheta\cos\vartheta + (C + ma^2)\,(\dot\varphi + \dot\psi\,\cos\vartheta)\cdot\dot\psi\,\sin\vartheta = = -\,mg\,a\cos\vartheta,$$

worin bedeutet: φ Drehwinkel des Rades um die senkrecht zu seiner Ebene orientierte Achse, ϑ Neigungswinkel des Rades zum Horizont, ψ Azimut der vertikalen Ebene, die den Durchmesser des Rades enthält und durch den Tangentenpunkt (Berührungspunkt) geht.

1233. Ein Kondensatormikrophon besteht aus in Reihe geschalteten Selbstinduktionsspulen mit Ohmschem Widerstand sowie aus einem Plattenkondensator, dessen Platten durch zwei Federn mit gemeinsamer Federkonstante c gehalten werden. Der Stromkreis ist an ein Element mit konstanter Spannung E angeschlossen, wobei auf die Platte des Kondensators die veränderliche Kraft $p\,(t)$ einwirkt. Der Selbstinduktionskoeffizient der Spule ist L, der Ohmsche Widerstand R, die Kapazität des Kondensators in der Gleichgewichtslage des Systems C_0. Die Entfernung zwischen den Platten in dieser Lage beträgt a. Die Masse der beweglichen Platte des Kondensators ist m.

Man führe die elektrischen und die verallgemeinerten mechanischen Koordinaten in das System ein und bilde die Bewegungsgleichung nach LAGRANGE.



Hinweis: 1) Die potentielle Energie des Kondensators ist $V = \frac{q^2}{2C}$ (C ist die Kapazität des Kondensators, q die Ladung seiner Oberfläche). Die elektrische Energie wird nach der Formel $T = \frac{1}{2} Li^2$ ($i = \frac{dq}{dt}$ Stromstärke im Stromkreis) berechnet.

2) Die verallgemeinerten Koordinaten sind die Veränderungen der Ladung (Aufladung) q des Kondensators und die Verschiebung der Federn aus der Gleichgewichtslage. Dann wird die vollständige Aufladung $q_0 + q$ und die gesamte Verschiebung $x_0 + x$. Hierbei ist q_0 die Ladung des Kondensators und x_0 die Verschiebung der Federn aus der neutralen Lage in die Gleichgewichtslage des Systems.

Lösung: $m\ddot{x} + cx - \frac{E}{a} q - \frac{q^2}{2C_0 a} = p(t)$; $l\ddot{q} + R\dot{q} - \frac{E}{a} x + \frac{q}{C_0} - \frac{qx}{aC_0} = 0.$

1234. Man bestimme die Frequenzen der kleinen freien Schwingungen des Kondensatormikrophons, das in vorstehender Aufgabe beschrieben wurde. Man vernachlässige den Widerstand des elektrischen Stromkreises.

Lösung: $$k_{1,2} = \sqrt{\frac{\frac{1}{C_0 L} + \frac{c}{m}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{C_0 L} - \frac{c}{m}\right)^2 + 4\frac{q_0^2}{m C_0^2 a^2 L}}}.$$

1235. Man bestimme die elektrischen Schwingungen des Kondensatormikrophons der Aufgabe 1233, wenn auf die Platte (Membrane) des Mikrophons plötzlich ein konstanter Druck p_0 zu wirken beginnt. Zur Vereinfachung der Berechnungen vernachlässige man die Masse der beweglichen Membrane und nehme außerdem an, daß der Ohmsche Widerstand des Stromkreises gleich Null ist. Es sollen auch die nichtlinearen Glieder in der Bewegungsgleichung vernachlässigt werden.

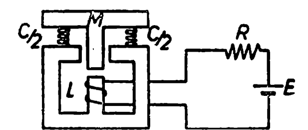
Lösung: Bei $ca > \frac{q_0^2}{C_0 a}$ ist die Ladung des Kondensators gleich dem Ausdruck

$$q = \frac{p_0 q_0}{ca\left(1 - \frac{q_0^2}{c C_0 a^2}\right)} \left[1 - \cos\sqrt{\frac{1}{C_0 L}\left(1 - \frac{q_0^2}{c C_0 a^2}\right)}\, t\right].$$

1236. Das auf der Zeichnung abgebildete System entspricht dem Prinzipschaltbild eines elektromagnetischen Gebers, den man für die Registrierung von mechanischen Schwingungen benutzt. Die Masse des Ankers beträgt M, die Federkonstante c. Der Selbstinduktionskoeffizient der Spule verändert sich infolge der Änderung der Länge des Luftspaltes $L = L(x)$ (x ist die vertikale Verschiebung des Ankers aus der Ruhelage). An die Spule ist ein elektrischer Stromkreis angeschlossen, der aus einem Element mit der gegebenen Spannung E und dem Ohmschen Widerstand R besteht.

Man stelle die Bewegungsgleichungen des Systems auf und bestimme ihre Gleichgewichtslagen.

Hinweis: Als verallgemeinerte Koordinaten nehme man die Verschiebung des Ankers x und die Ladungsänderung $\dot{q}$ an, die dem Strom i im Kreis entspricht $\left(i = \frac{dq}{dt}\right)$.



Lösung: Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \dot{q}\dot{x}\frac{dL}{dx} = E; \qquad M\ddot{x} - \frac{1}{2}\frac{dL}{dx}\dot{q}^2 + cx = Mg.$$

In der „Gleichgewichtslage" ist $x = x_0$ und $i = \dot{q} = i_0$,

worin $i_0 = \frac{E}{R}$; $\quad cx_0 = Mg + \frac{1}{2}\left(\frac{dL}{dx}\right)_0 i_0^2$ ist.

1237. Man bilde die Gleichungen für kleine Bewegungen in der Nähe der Gleichgewichtslage des elektromagnetischen Gebers, der in der vorangegangenen Aufgabe beschrieben ist.

Hinweis: Als die verallgemeinerten Koordinaten nehme man die Veränderung der Ladung e und die vertikale Verschiebung des Ankers aus der Gleichgewichtslage ξ. Die Funktion $L(x)$ ist zu zerlegen in: $L = L(x_0 + \xi) = L_0 + L_1\xi + \ldots$, wobei man sich in dieser Reihe auf die beiden ersten Glieder beschränkt.

Lösung: $L_0\ddot{e} + R\dot{e} + L_1 i_0 \dot{\xi} = 0;$

$M\ddot{\xi} + c\xi - L_1 i_0 \dot{e} = 0.$

1238. Der Boden des Gebers, der in Aufgabe 1236 beschrieben ist, führt kleine vertikale Schwingungen nach dem Gesetz $\xi = \xi_0 \sin\omega t$ aus. Man bestimme die Bewegungsgesetze des Ankers und des Stromes im elektrischen Stromkreis des Gebers.

Lösung:
$$i = \frac{M\xi_0\omega^3}{\Delta} L_1 i_0 \Big\{ R(c - M\omega^2)\cos\omega t + [L_1^2 i_0^2\omega + L_0\omega(c - M\omega^2)]\sin\omega t\Big\},$$

$$x = \frac{M\xi_0\omega^2}{\Delta}\Big\{-[L_1^2 i_0^2 L_0\omega^2 + (R^2 + L_0^2\omega^2)(c - M\omega^2)]\sin\omega t + \omega L_1^2 i_0^2 R\cos\omega t\Big\},$$

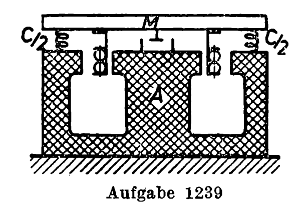
wobei $\Delta = R^2(c - M\omega^2)^2 + \omega^2[L_1^2 i_0^2 + L_0(c - M\omega^2)]^2$.

1239. Ein elektromechanisches bewegliches System besteht aus einem Topfmagneten mit dem zylindrischen Kern A, der ein Radialfeld erzeugt, und aus einem Anker der Masse M. Letzterer liegt auf einer Feder, deren Federkonstante c ist. Am Anker ist eine Drahtspule befestigt, die n Wicklungen hat. Außerdem ist der Anker an einen mechanischen Dämpfer angeschlossen. Der Widerstand des Dämpfers ist proportional der Geschwindigkeit des Ankers (die Dämpfungskonstante ist β). Der mittlere Radius der Spulenwicklung ist r. Der Selbstinduktionskoeffizient der Spule ist L, der Ohmsche Widerstand R. Die Magnetinduktion im Luftspalt der Spule beträgt B. An den Klemmen der Spule liegt eine veränderliche Spannung $V(t)$.

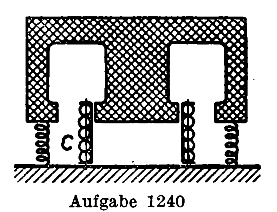
Man finde die Bewegungsgleichung des Systems.

Hinweis: Die Kräfte, die zwischen Spule und Magnet ausgeübt werden, betragen $Q_q = -2\pi rn B\dot{x}$, $Q_x = 2\pi rn B\dot{q}$ (Q_q ist die elektromotorische Kraft, die durch den elektrischen Stromkreis induziert wird, und Q_x die Kraft zwischen Spule und Magneten).

Lösung: $L\ddot{q} + R\dot{q} + 2\pi rn B\dot{x} = V(t)$;
$M\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx - 2\pi rn B\dot{q} = 0$.



Aufgabe 1239



Aufgabe 1240

1240. An der Grundplatte eines Seismographen ist eine Drahtspule mit n Wicklungen befestigt. Die Spule besitzt den Halbmesser r und ist an ein elektrisches Registriersystem angeschlossen. Letzteres kann durch einen Stromkreis schematisch dargestellt werden, der den Selbstinduktionskoeffizienten L besitzt und den Ohmschen Widerstand R aufweist. Der Magnetkern erzeugt ein Radialfeld, das durch die Magnetinduktion B charakterisiert wird. Der Kern ist gegen den Boden durch Federn der gemeinsamen Federkonstante c abgestützt. Auf den Kern wirkt außerdem eine Widerstandskraft, die proportional der Geschwindigkeit anwächst und durch einen Dämpfer hervorgerufen wird. (Widerstandskraft $\beta\dot{x}$).

Man bilde die Gleichungen für die Verschiebung des Kerns und den Strom im Stromkreis, wenn der Seismograph kleine Schwingungen ausführt, die nach dem Gesetz $\xi = \xi_0 \sin\omega t$ erfolgen.

Hinweis: Die verallgemeinerten Kräfte, die der Zusammenwirkung der Spule und des Magneten entsprechen, sind durch die Formeln
$Q_q = -2\pi rn B\dot{x}$ und $Q_x = 2\pi rn B\dot{q}$ gegeben.

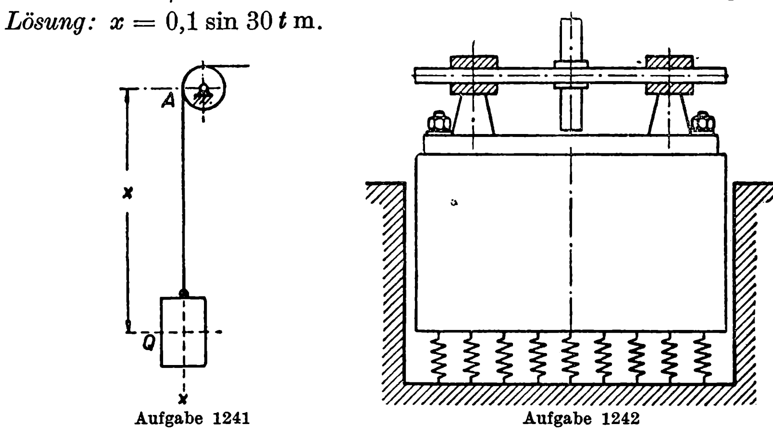
Lösung: $Mx + \beta x + cx - 2\pi rn B\dot{q} = M\xi_0\omega^2 \sin\omega t$;
$L\ddot{q} + R\dot{q} + 2\pi rn B\dot{x} = 0$.

X. Theorie der Schwingungen

48. Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad

1241. Ein Förderkorb mit dem Gewicht $Q = 3$ t wird in einen Schacht mit der Geschwindigkeit $u = 3$ m/sec hinuntergelassen. Plötzlich wird die Abwärtsbewegung durch eine Verklemmung des oberen Seilendes unterbrochen. Man bestimme die darauffolgende Bewegung des Korbes, wenn die Federkonstante des Seiles $c = 2{,}75$ t/cm ist. Die Masse des Seiles ist zu vernachlässigen.

Lösung: $x = 0{,}1 \sin 30\,t$ m.



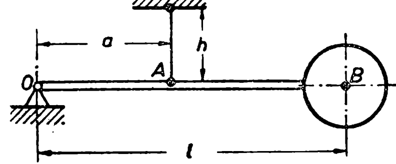
Aufgabe 1241 Aufgabe 1242

1242. Man bestimme die Periode der freien Schwingungen des Fundamentes einer Maschine, das auf einem nachgiebigen Bodengrund steht und aus der Gleichgewichtslage gebracht wird. Das Gewicht des Fundamentes mit der Maschine beträgt $Q = 147$ t, die Bodenfläche des Fundamentes ist $S = 50\,\text{m}^2$, die elastische Bettungsziffer ist $\lambda = 3\,\text{kg/cm}^3$ (die Federkonstante des Bodens ist somit $c = \lambda \cdot S$).

Lösung: $T = 0{,}0628$ sek.

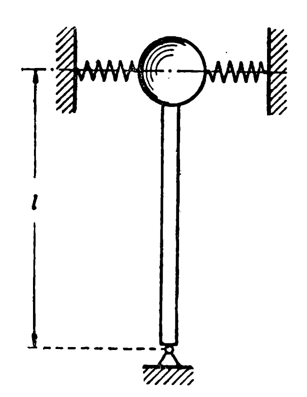
1243. Der starre Stab OB mit der Länge l kann auf einem Kugelgelenk frei um das Ende O schwingen und trägt am anderen Ende eine Kugel mit dem Gewicht Q. Durch einen undehnbaren vertikalen Faden der Länge h wird der Stab in horizontaler Lage gehalten. Der Abstand $OA = a$ ist bekannt. Wenn man die Kugel senkrecht zu der Zeichenebene auslenkt und dann freiläßt, so beginnt das System zu schwingen.

Man bestimme die Periode für kleine Schwingungen des Systems und vernachlässige dabei die Masse des Stabes.



Lösung: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{hl}{ag}}$.

1244. Man bestimme die Schwingungszeit für Schwingungen mit kleinem Ausschlag eines in verschiedenen Seismographen zum Notieren der Bodenschwingungen angewandten astatischen Pendels. Das Pendel besteht aus einem starren Stab der Länge l, der am Ende die Masse m trägt. Diese wird von den zwei horizontalen Federn mit der Federkonstante c gehalten. Man vernachlässige die Masse des Stabes und betrachte die Federn in der Gleichgewichtslage als ungespannt.

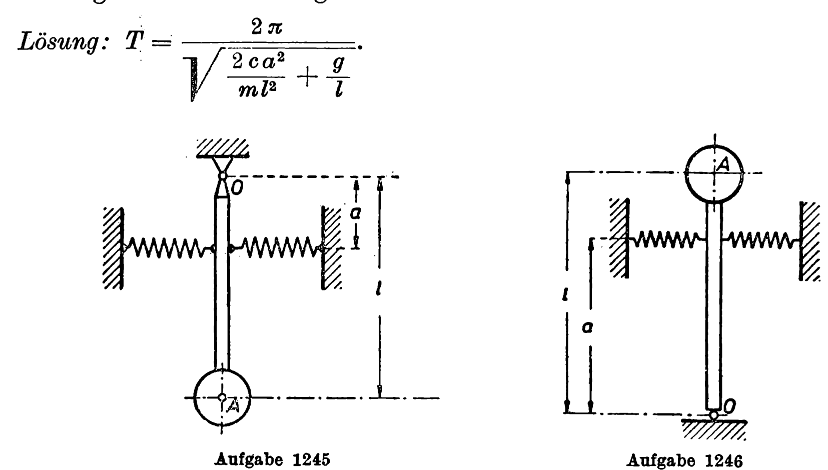


Lösung: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{2\dfrac{c}{m} - \dfrac{g}{l}}}$.

1245. Ein Pendel besteht aus dem starren Stab der Länge l, der am Ende die Masse m trägt. Am Stab sind zwei Federn mit der Federkonstanten c im Abstand a vom oberen Ende des Stabes befestigt; die anderen Enden der Federn sind am Gehäuse befestigt.

Man berechne die Schwingungsdauer des Pendels für Schwingungen mit kleinem Ausschlag und vernachlässige dabei die Masse des Stabes.

Lösung: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2ca^2}{ml^2} + \dfrac{g}{l}}}$.

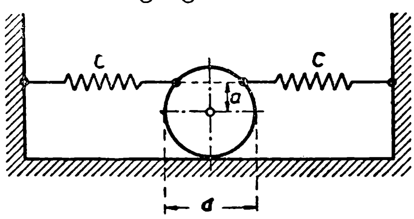


Aufgabe 1245 **Aufgabe 1246**

1246. Im Gegensatz zu voriger Aufgabe ist jetzt die Masse m über dem Aufhängungspunkt angebracht. Man bestimme, unter welcher Voraussetzung die vertikale Gleichgewichtslage des Pendels stabil ist, und berechne die Schwingungsdauer des Pendels für Schwingungen mit kleinem Ausschlag.

Lösung: $a^2 > \dfrac{mgl}{2c}$; $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2ca^2}{ml^2} - \dfrac{g}{l}}}$.

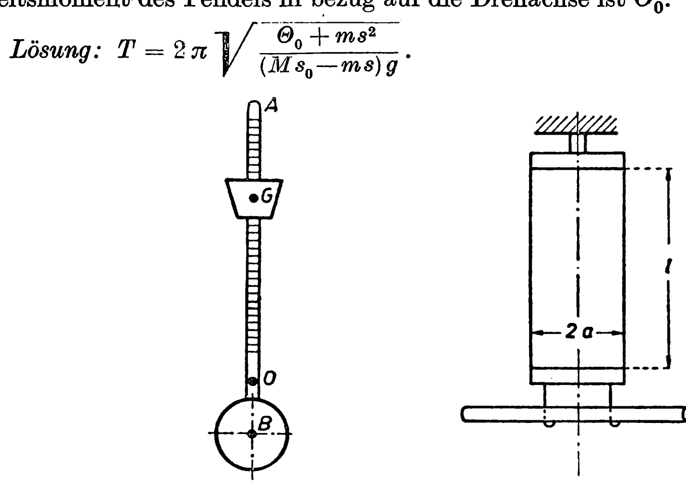
1247. Ein Zylinder mit dem Durchmesser d und der Masse m kann sich ohne Schlupf auf einer horizontalen Fläche bewegen. Zwei gleiche Federn mit der Federkonstanten c sind am Zylinder im Abstand a von seiner Achse befestigt; die anderen Enden der Federn sind am Gehäuse befestigt. Man bestimme die Schwingungszeit des Zylinders für Schwingungen mit kleinem Ausschlag.



Lösung: $T = \dfrac{\pi \sqrt{3}}{1 + 2\dfrac{a}{d}} \cdot \sqrt{\dfrac{m}{c}}.$

1248. Man bestimme die Schwingungszeit für Schwingungen mit kleinem Ausschlag eines aus einem Pendel und dem zusätzlichen beweglichen Gewicht G mit der Masse m bestehenden Metronoms. Das Trägheitsmoment des ganzen Systems in bezug auf die horizontale Drehachse verändert sich durch Verschieben des beweglichen Gewichtes G. Die Masse des Pendels ist M; der Abstand des Schwerpunktes des Pendels von der Drehachse beträgt s_0; der Abstand $OG = s$; das Trägheitsmoment des Pendels in bezug auf die Drehachse ist Θ_0.

Lösung: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{\Theta_0 + m s^2}{(M s_0 - m s)\, g}}.$



Aufgabe 1248 Aufgabe 1249

1249. Der Abstand zwischen zwei vertikalen Fäden der Länge l beträgt $2a$. Ein Körper, der an diesen Fäden aufgehängt ist, schwingt um die vertikale Achse (Bifilaraufhängung). Der Trägheitshalbmesser des Körpers in bezug auf die Drehachse ist ϱ. Man bestimme die Schwingungszeit für Schwingungen mit kleinem Ausschlag.

Lösung: $T = 2\pi \dfrac{\varrho}{a} \sqrt{\dfrac{l}{g}}.$

1250. Ein runder Reifen ist durch drei Fäden von der Länge l an drei festen Punkten so aufgehängt, daß die Fläche des Reifens horizontal liegt. In der Ruhelage des Reifens sind die Fäden vertikal und teilen seinen Umkreis in drei gleiche Teile. Man finde die Schwingungszeit für Schwingungen mit kleinem Ausschlag um die vertikale Achse, die durch seinen Mittelpunkt geht.

Lösung: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

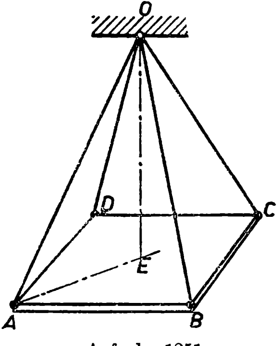
1251. Die schwere quadratische Hebebühne $ABCD$ mit der Masse M ist durch vier elastische Seile mit der jeweiligen Federkonstanten c an dem festen Punkt O aufgehängt. In der Gleichgewichtslage des Systems entspricht der Abstand des Aufhängepunktes von dem Schnittpunkt E der Diagonalen der Hebebühne l.

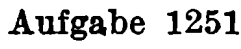
Die Länge der Diagonale der Hebebühne ist a. Man bestimme die Schwingungszeit der Schwingungen des Systems.

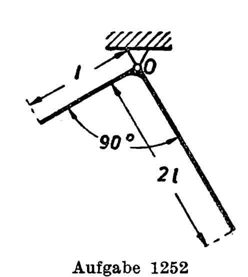
Lösung: $T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{c} \frac{(a^2 + 4l^2)}{16\,l^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{M g a^2}{16\,c\,l^3}}}$.

1252. Ein aus dünnen homogenen Stäben von der Länge l und $2l$ bestehender Stahlwinkel mit einem Winkel von 90° zwischen den Stäben schwingt um den Punkt O. Man bestimme die Schwingungszeit des Winkels um die Gleichgewichtslage für Schwingungen mit kleinem Ausschlag.

Lösung: $T = 2\pi \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{17}} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 7{,}53 \sqrt{\frac{l}{g}}$.




Aufgabe 1251

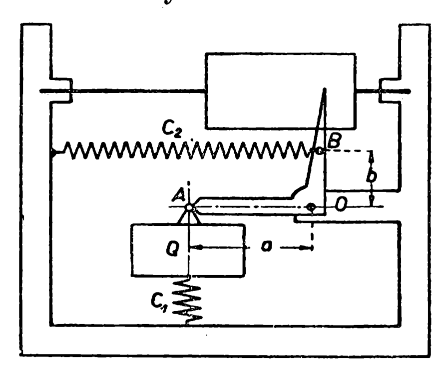


Aufgabe 1252

1253. Man bestimme die Schwingungszeit eines Pendels vom Gewicht Q, dessen Drehachse den Winkel β mit der horizontalen Ebene bildet. Das Massenträgheitsmoment des Pendels in bezug auf die Drehachse ist Θ, der Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse beträgt s.

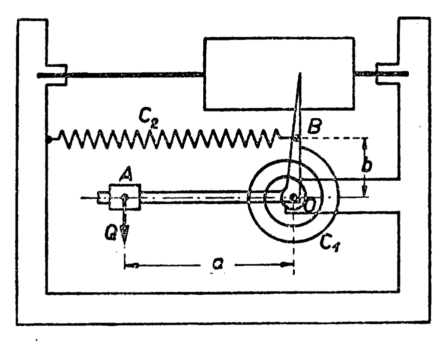
Lösung: $T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{Q \cdot s \cdot \cos\beta}}$.

1254. In einem Gerät zur Registrierung der vertikalen Schwingungen von Maschinenfundamenten schwingt eine Last mit dem Gewicht Q auf der vertikalen Feder mit der Federkonstanten c_1. Im Drehpunkt O ist ein Zeiger beweglich angebracht, der von der Feder mit der Federkonstanten c_2 im Gleichgewicht gehalten wird. Das Trägheitsmoment Θ des Zeigers in bezug auf die Drehachse O und die Abmessungen $OA = a$ und $OB = b$ sind gegeben. Man bestimme die Schwingungszeit des Zeigers bei Schwingungen um seine vertikale Gleichgewichtslage. Das Gewicht betrachte man als Punktmasse; der statische Gleichgewichtszustand ist der Ruhezustand des Systems.



Lösung: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{\Theta g + Qa^2}{g(c_1 a^2 + c_2 b^2)}}$.

1255. In einem Gerät zur Registrierung vertikaler Schwingungen wird der ins statische Gleichgewicht gebrachte Hebel AOB (Trägheitsmoment Θ in bezug auf die Drehachse) durch eine Spiralfeder mit der Federkonstanten c_1 im Gleichgewicht gehalten. Eine Last vom Gewicht Q ist an dem Ende A des Hebels, eine Feder mit der Federkonstanten c_2 an der Stelle B des Hebels befestigt. Man bestimme die Schwingungszeit für Schwingungen des Hebels um die Gleichgewichtslage, wenn $OA = a$ und $OB = b$ ist; man betrachte die Last als Punktmasse und vernachlässige die Vorspannung der Federn.



Lösung: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{\Theta g + Qa^2}{g(c_1 + c_2 b^2)}}$.

1256. Ein Schwingungstilger kann schematisch durch einen materiellen Punkt der Masse m dargestellt werden, der durch n Federn mit den Federkonstanten c mit den Ecken eines regulären n-Eckes verbunden ist. In ungespanntem Zustand ist die Länge jeder Feder a, der Halbmesser des Umkreises, der um das n-Eck beschrieben wird, ist b.

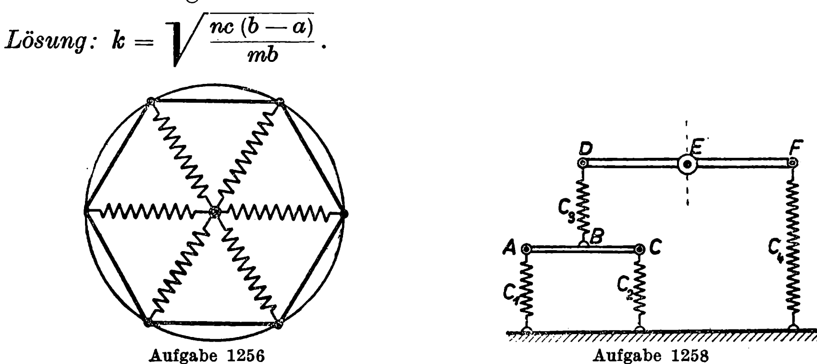
Man bestimme die Frequenz der horizontalen freien Schwingungen des in einer horizontalen Ebene gelagerten Systems.

Hinweis: Zur Berechnung der genauen potentiellen Energie mit den Größen zweiter Ordnung muß man die Verlängerung der Federn mit derselben Genauigkeitsstufe bestimmen.

Lösung: $k = \sqrt{\frac{nc}{2m} \frac{2b-a}{b}}$.

1257. Man bestimme die Frequenz der senkrecht zur Fläche des Vielecks auftretenden Schwingungen in der vorherigen Aufgabe. Die Schwerkraft wird nicht berücksichtigt.

Lösung: $k = \sqrt{\frac{nc(b-a)}{mb}}$.

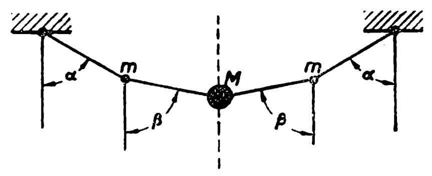


Aufgabe 1256 Aufgabe 1258

1258. Man bestimme die Frequenz der vertikalen Schwingungen des materiellen Punktes E mit kleinem Ausschlag. Dieser ist an 4 Federn mit den Federkonstanten c_1, c_2, c_3 und c_4 schwingungsfähig aufgehängt. Die Masse des materiellen Punktes E ist m. Die Abstände betragen $AB = BC$ und $DE = EF$. Die Balken AC und DF sind als starr und masselos anzusehen (vgl. Zeichnung).

Lösung: $k = \sqrt{\frac{4}{m\left(\frac{1}{4c_1} + \frac{1}{4c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4}\right)}}$.

1259. An einem undehnbaren Faden der Länge $4a$ befinden sich drei Lasten mit den Massen m, M, m (vgl. Zeichnung). Der Faden ist symmetrisch an seinen Enden aufgehängt, so daß die Anfangs- und Endteile den Winkel α mit der Vertikalen, die mittleren Abschnitte den Winkel β bilden. Die Last M führt kleine vertikale Schwingungen aus. Man bestimme die Frequenz der freien vertikalen Schwingungen der Last M.



Lösung: $k = \sqrt{\frac{g(\cos^2\beta \sin\beta + \cos^2\alpha \sin\alpha)}{a\cos\beta\cos\alpha\sin(\beta-\alpha)\cos(\beta-\alpha)}}$, $\quad 2m = \frac{M\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

1260. Der Vertikal-Seismograph von B. B. GOLIZYN besteht aus dem Rahmen AOB, auf dem die Last vom Gewicht Q befestigt ist. Der Rahmen ist um die horizontale Achse O drehbar. Am Punkt B wird der Rahmen durch eine Feder mit der Federkonstanten c in der Gleichgewichtslage gehalten. Dabei ist der Stab OA horizontal. Das Massenträgheitsmoment des Rahmens und der Last in bezug auf O ist Θ, die Höhe des Rahmens ist b, und der senkrechte Abstand des Punktes B vom Drehpunkt O ist a.

Man vernachlässige die Masse der Feder und bestimme die Schwingungsdauer des Pendels für Schwingungen mit kleinem Ausschlag. Es wird angenommen, daß der Schwerpunkt der Last und des Rahmens sich im Punkt A befindet ($OA = l$).

Lösung: $k = \sqrt{\frac{ca^2 - F_0 b\left(1 - \frac{b}{L}\right)}{\Theta}}$,

wobei $F_0 = Q\frac{l}{a}$ die Belastung der Feder in der Gleichgewichtslage und L die Länge der Feder in der Gleichgewichtslage ist.

Aufgabe 1260

Aufgabe 1261

Aufgabe 1262

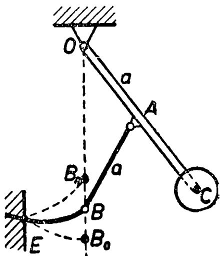
1261. In einem Vibrographen, der zur Aufzeichnung der Schwingungen von Fundamenten, Maschinenteilen usw. dient, wird das Pendel mit dem Gewicht Q durch eine Spiralfeder mit der Federkonstanten c unter dem Winkel α zur Vertikalen gehalten; das Massenträgheitsmoment des Pendels in bezug auf die Drehachse O ist Θ; der Abstand des Pendelschwerpunktes von der Drehachse ist s. Man bestimme die Schwingungszeit der freien Schwingungen bei kleinen Ausschlägen des Vibrographen.

Lösung: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{Qs\cos\alpha + c}}$.

1262. In einem Vibrographen, der zur Aufzeichnung horizontaler Schwingungen dient, kann das aus einem Hebel und einer Last bestehende Pendel OA um die horizontale Achse O schwingen. Man bestimme die Schwingungszeit des Pendels bei kleinen Ausschlagswinkeln, wenn bekannt ist, daß das statische Maximalmoment des Pendelgewichtes $Qa = 4{,}5$ kgcm beträgt. Das Massenträgheitsmoment in bezug auf die Achse O beträgt $\Theta = 0{,}03$ kgcmsec^2, die Federkonstante $c = 4{,}5$ kg/cm.

Lösung: $T = 0{,}364$ sec.

1263. Der Stab OA eines Pendels wird durch die Stange AB mit der kleinen stählernen Plattfeder EB mit der Federkonstanten c gestützt. Im ungespannten Zustand nimmt die Plattfeder die Lage EB_1 ein. Es ist bekannt, daß man die Plattfeder mit der Kraft F_0 in Richtung OB belasten muß, um sie in die Lage EB_0 zu bringen, die dem statischen Gleichgewicht des Pendels entspricht; $OA = AB = a$. Man vernachlässige die Masse der Stäbe. Der Abstand des Pendelschwerpunktes von der Drehachse beträgt $OC = l$; das Gewicht des Pendels ist Q. Um einfachere Abhängigkeit der Schwingungen vom Winkel der anfänglichen Neigung zu erhalten, wird das System so eingestellt, daß in der Bewegungsgleichung des Pendels $\ddot{\varphi} = f(\varphi) = -\beta\varphi + \ldots$ das erste der vernachlässigten Glieder von der Ordnung φ^5 sei.



Man stelle die Abhängigkeit der Konstanten Q, F_0, c, a, l fest und berechne die Schwingungszeit für Schwingungen mit kleinem Ausschlag.

Lösung: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2aF_0}{Ql}}}$; $Ql - 2aF_0 = 12a^2c$.

1264. Man untersuche, ob bei den Voraussetzungen in der vorigen Aufgabe eine Vergrößerung der Schwingungsdauer um 0,4 % nicht überschritten wird, wenn der Ausschlag des Pendels gegen die Gleichgewichtslage $\varphi_0 = 45^\circ$ beträgt. Wie verändert sich unter diesen Bedingungen die Schwingungszeit des einfachen Pendels?

Lösung: Wir erhalten, wenn wir in der Bewegungsgleichung des Pendels das Glied mit φ^5 beibehalten:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2aF_0}{Ql}}}\left(1+\frac{\varphi_0{}^4}{96}\right);$$

die Veränderung der Schwingungsdauer bei dem Ausschlagswinkel um 45° beträgt 0,4 %.

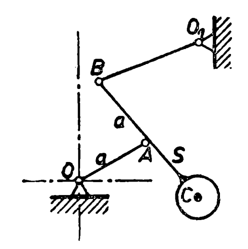
1265. Unter den Bedingungen der Aufgabe 1263 wird das Pendel so eingestellt, daß $Ql = 2aF_0$ ist. Man bestimme die Schwingungszeit des Pendels bei einer Auslenkung um φ_0 aus der Gleichgewichtslage.

Lösung: $T = \frac{4l}{a\varphi_0}\sqrt{\frac{Q}{cg}}\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 5{,}24\,\frac{l}{a\varphi_0}\sqrt{\frac{Q}{cg}}$.

1266. Bei einem Pallographen ist die Last M an einem Pendel aufgehängt, das frei drehbar im Punkt O gelagert ist und im Punkt A mit der Stütze AO_1, der sich um die unbewegliche Achse O_1 dreht, beweglich verbunden ist.

Unter welcher Voraussetzung ist die vertikale Lage des Stabes OM des Pendels die Lage des stabilen Gleichgewichtes? Man bestimme die Schwingungszeit für die Schwingungen mit kleinem Ausschlag des Pendels. Man vernachlässige das Gewicht der Stäbe und betrachte die Last als Punktmasse. (Die Maße der Stäbe sind in der Zeichnung zu Aufgabe 1177 angegeben.)

Lösung: $T = 2\pi(h-r+l)\sqrt{\frac{r}{[rl-(h-r)^2]\,g}}$; $h - r < \sqrt{rl}$.



1267. Man bestimme die Schwingungsdauer bei kleinem Ausschlag des auf der Zeichnung dargestellten Pendels. Der Schwerpunkt der Last befindet sich auf der Verlängerung der Koppelstange des viergliedrigen Systems $OABO_1$ (geradlinig führender Mechanismus). In der Gleichgewichtslage verlaufen die Stäbe OA und BC vertikal, der Stab O_1B horizontal ($OA = AB = a$, $AC = s$).

Lösung: $T = 2\pi \frac{s+a}{\sqrt{g(s-a)}}$.

1268. Man bestimme die Schwingungsdauer einer Last vom Gewicht P, die an einer Feder aufgehängt ist, wenn die Federkonstante c und das Gewicht der Feder P_0 ist.

Hinweis: Zur angenäherten Bestimmung der Schwingungsfrequenz der Systeme in den Aufgaben 1268 bis 1275 wende man die Energiemethode an.

Lösung: $T = 2\pi \sqrt{\frac{P + \frac{1}{3}P_0}{cg}}$.

1269. Am unteren Ende einer zylindrischen elastischen Welle mit eingespanntem oberen Ende ist eine Scheibe mit dem polaren Massenträgheitsmoment Θ horizontal befestigt. Das Massenträgheitsmoment der Welle in bezug auf seine Längsachse ist Θ_0. Die Federkonstante der Welle bei Torsionsschwingungen ist c; man bestimme die Schwingungsdauer des Systems.

Lösung: $T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta + \frac{1}{3}\Theta_0}{c}}$.

1270. Eine Last Q ist in der Mitte eines an den Enden frei aufliegenden Balkens befestigt; die Länge des Balkens ist l, das äquatoriale Flächenträgheitsmoment J; der Elastizitätsmodul des Materials ist E.

Man bestimme die Zahl der freien Schwingungen, die durch die Last pro Minute ausgeführt werden, wenn das Gewicht des Balkens vernachlässigt wird.

Lösung: $n = 2080 \sqrt{\frac{EJ}{Ql^3}}$ (Längen in Zentimeter).

1271. Eine Last Q ist in der Mitte eines an den Enden frei aufliegenden Balkens befestigt; die Länge des Balkens ist l, das äquatoriale Flächenträgheitsmoment J, der Elastizitätsmodul des Materials E und das Gewicht des Balkens ist Q_1.

Man bestimme (angenähert) die Zahl der freien Schwingungen, die die Last pro Minute ausführt.

Lösung: $n = 2080 \sqrt{\frac{EJ}{\left(Q + \frac{17}{35}Q_1\right) l^3}}$ (Längen in Zentimeter).

1272. Ein Balken von rechteckigem Querschnitt wird in der Mitte durch die Last $Q = 600$ kg belastet und an den Enden gestützt. Das Flächenträgheitsmoment des Balkens ist $J = 210$ cm^4, ihr laufendes Gewicht $q = 11$ kg/m, die Länge $l = 200$ cm und der Elastizitätsmodul des Balkenmaterials $E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm^2.

Man bestimme die Schwingungsfrequenz des Balkens mit und ohne Berücksichtigung seiner Masse.

Lösung: $k_1 = 10{,}1$ sec^{-1}; $k_2 = 10{,}2$ sec^{-1}.

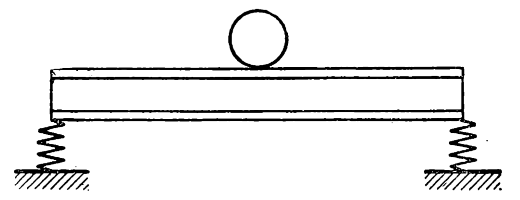
1273. Ein Träger mit dem laufenden Gewicht $q = 49$ kg/m, mit dem Flächenträgheitsmoment $J = 8360$ cm^4 und der Länge $l = 10$ m, wird in der Mitte mit einem Gewicht $Q = 700$ kg belastet und an den Enden gestützt. Der Elastizitätsmodul des Trägermaterials beträgt $E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm^2.

Man bestimme die Frequenz der Schwingungen des Trägers mit und ohne Berücksichtigung seiner Masse.

Lösung: $k_1 = 4{,}56$ sec^{-1}; $k_2 = 5{,}34$ sec^{-1}.

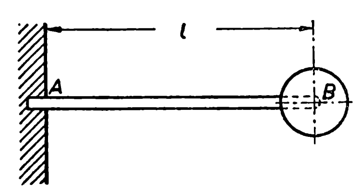
1274. Der Doppel-T-Träger *NP* 10 mit dem Flächenträgheitsmoment $J = 180$ cm^4 und der Länge $l = 4$ m liegt auf zwei gleichen elastischen Stützfedern, deren Federkonstante $c = 150$ kg/cm ist. Er trägt in der Mitte eine Last vom Gewicht $Q = 200$ kg.

Man vernachlässige das Gewicht des Balkens und bestimme die Schwingungszeit der freien Schwingungen des Systems. Der Elastizitätsmodul des Balkenmaterials ist $E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm^2.



Lösung: $T = 0{,}238$ sec.

1275. Am Ende eines fest eingespannten horizontalen Stabes der Länge l befindet sich eine Last vom Gewicht Q, die Schwingungen mit der Schwingungsdauer T ausführt. Das äquatoriale Flächenträgheitsmoment ist J. Man bestimme den Elastizitätsmodul des Stabmaterials.



Lösung: $E = \dfrac{4\pi^2 Q l^3}{3 J g T^2}$.

1276. Die Schärfe der Resonanzkurve eines Systems mit einem Freiheitsgrad (bei Reibung, die proportional der Geschwindigkeit ist) ist durch die Halbwertsbreite der Resonanzkurve charakterisiert. Die Halbwertsbreite der Resonanzkurve wird durch die Differenz zwischen zwei Frequenzen bestimmt, bei denen die Amplitude der Schwingungen die Hälfte der Amplitude ist, die bei $z = \frac{\omega}{k} = 1$ entsteht. Hierbei bedeuten ω die Erregerfrequenz und k die Frequenz der freien Schwingung des ungedämpften Systems.

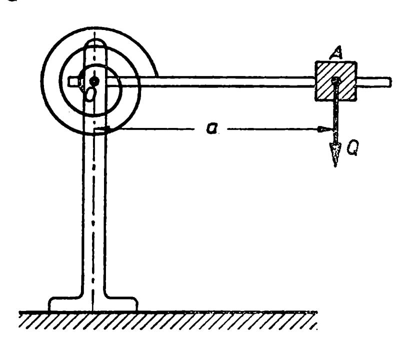
Man drücke die Halbwertsbreite Δ der Resonanzkurve durch das Frequenzverhältnis $z = \frac{\omega}{k}$ und den gegebenen Dämpfungsfaktor $\delta = \frac{n}{k}$ aus. Man gebe die annähernde Formel für den Fall $\delta \ll 1$ an.

Lösung: Die Halbwertsbreite der Resonanzkurve ist

$$\Delta = z_2 - z_1 = \sqrt{1 - 2\delta^2 + 2\delta\sqrt{3 + \delta^2}} - \sqrt{1 - 2\delta^2 - 2\delta\sqrt{3 + \delta^2}};$$

$$\text{mit } \delta \ll 1 \text{ wird } \Delta \approx 2\sqrt{3}\,\delta.$$

1277. In einem Vibrographen zur Aufzeichnung vertikaler Schwingungen sei der Stab OA, der von der Feder des Gerätes gehalten wird um die horizontale Achse O drehbar. An seinem Ende A trägt der Stab OA die Last Q und wird durch die Spiralfeder eine horizontale Gleichgewichtslage einnehmen.



Man bestimme die relative Bewegung des Stabes OA, wenn der Vibrograph auf einem Fundament steht, das vertikale Schwingungen nach dem Gesetz $z = 2 \sin 25t$ mm ausführt. Die Federkonstante der Feder ist $c = 0{,}1$ kgcm, das Massenträgheitsmoment des Stabes OA mit der Last Q in bezug auf den Punkt O beträgt $\Theta = 0{,}4$ kgcmsec², $Qa = 10$ kgcm. Man vernachlässige die Biegeschwingungen des Stabes.

Lösung: $\varphi = 0{,}0051 \sin 25\,t$ cm.

1278. Der Stab des in Aufgabe 1277 beschriebenen Vibrographen ist mit einer Wirbelstrombremse versehen (Aluminiumplatte, die zwischen den Polen eines festen Magneten schwingt). Die in der Platte entstehenden Wirbelströme verursachen eine Dämpfung, die proportional der Plattengeschwindigkeit ist.

Man bestimme die erzwungenen Schwingungen des Stabes, wenn das Gerät auf einem Fundament befestigt ist, das vertikale Schwingungen nach dem Gesetz $z = h \cdot \sin(pt)$ ausführt.

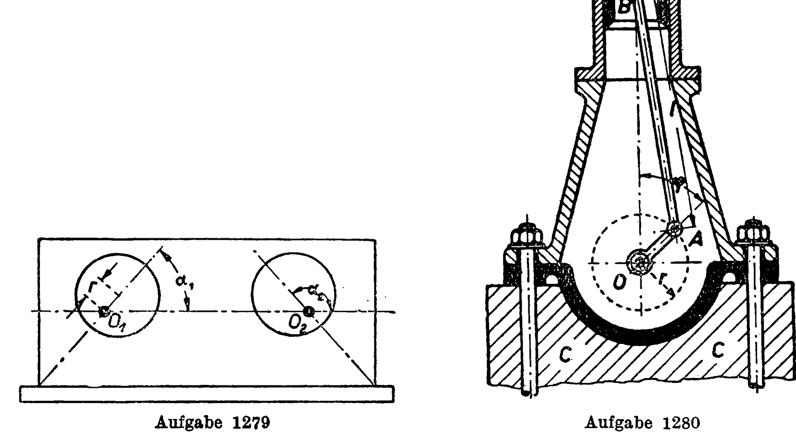
Lösung: $$\varphi = \frac{Qah\cos\varepsilon}{\Theta g\left[1 - \frac{c}{\Theta p^2}\right]}\sin(pt - \varepsilon);$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\frac{k \cdot p}{c}}{1 - \frac{\Theta p^2}{c}};$$ k ist der Dämpfungsfaktor.

1279. Eine Vibrationsmaschine zur Erzeugung von Schwingungen besteht aus zwei exzentrisch auf zwei parallelen Achsen aufgesetzten Scheiben; das Gewicht jeder Scheibe ist Q, das Gewicht der Maschine ist P. Die Exzentrizität r der beiden Scheiben ist gleich groß. Im Anfangszustand bilden die Scheiben mit der Horizontalen die Winkel α_1 und α_2. Die Scheiben drehen sich im entgegengesetzten Sinn mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Die Maschine ist durch Bolzen auf dem elastischen Bett mit der Federkonstanten c befestigt.

Man bestimme die Amplitude der erregten vertikalen Schwingungen der Maschine, wobei das Gewicht des Bettes zu vernachlässigen ist.

Lösung: $A = \dfrac{2\,Q\,r}{\dfrac{c\,g}{\omega^2} - (P + 2\,Q)} \sin \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$



Aufgabe 1279 Aufgabe 1280

1280. Ein Motor mit dem Gewicht Q ist auf einem Fundament mit der Grundfläche S befestigt. Die spezifische Elastizität des Bodens ist gleich λ. Die Länge der Kurbel des Motors sei r, die Länge der Pleuelstange l, die Winkelgeschwindigkeit der Welle ω; das Gewicht des Kolbens und der unausgewuchteten Teile, die eine oszillierende Bewegung ausführen, ist P, das Gewicht des Fundamentes ist G. Die Kurbel sehe man als ausgewuchtet an. Man vernachlässige die Masse der Stange und bestimme die erzwungenen Schwingungen des Fundamentes.

Hinweis: Man vernachlässige bei der Berechnung alle Glieder des Verhältnisses $\dfrac{r}{l}$ mit höherer als 1. Ordnung.

Lösung: $\xi = \dfrac{P\,r\,\omega^2}{(Q + G)\,(k^2 - \omega^2)} \cos \omega t + \dfrac{r}{l}\, \dfrac{P\,r\,\omega^2}{(Q + G)\,(k^2 - 4\,\omega^2)} \cos 2\,\omega\,t;$

ξ ist die Verschiebung des Fundamentschwerpunktes aus der Gleichgewichtslage.

$$k = \sqrt{\frac{\lambda\,S\,g}{Q + G}}.$$

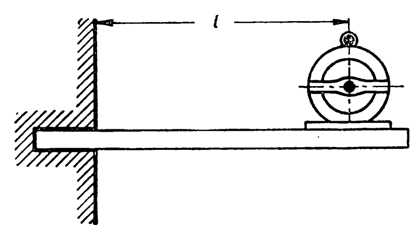
1281. Man berechne das Gewicht des Fundamentes eines stehenden Motors, der $Q = 10$ t wiegt. Die Amplitude der erzwungenen vertikalen Schwingungen des Fundamentes soll 0,25 mm nicht überschreiten. Die Grundfläche des Fundamentes beträgt $S = 100\ \mathrm{m}^2$, die spezifische Elastizität des Bodens unter dem Fundament ist $\lambda = 50\ \mathrm{t/m}^3$. Die Länge der Kurbelwelle des Motors sei $r = 30$ cm, die Länge der Kurbelstange $l = 180$ cm, die Drehzahl der Welle $n = 240$ U/min, das Gewicht des Kolbens und anderer unausgewuchteter Teile, die eine oszillierende Bewegung ausführen, beträgt $P = 250$ kg. Die Kurbelwelle sehe man als ausgewuchtet an. Man vernachlässige die Masse der Kurbelstange.

Hinweis: Man benutze das Lösungsergebnis der vorstehenden Aufgabe und begnüge sich mit der angenäherten Lösung, wobei das Glied mit dem Faktor $\frac{r}{l}$ vernachlässigt wird. Man prüfe die Gesetzmäßigkeit der ausgeführten Näherung.

Lösung: $G = 366{,}6$ t.

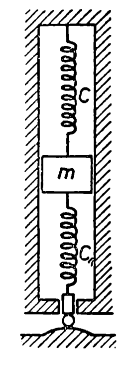
1282. Ein Elektromotor mit dem Gewicht $Q = 1200$ kg ist auf den freien Enden zweier horizontaler, paralleler, fest eingespannter Träger montiert. Der Abstand der Achse des Elektromotors von der Wand beträgt $l = 1{,}5$ m. Der Anker des Motors hat die Drehzahl $n = 1500$ U/min, das Gewicht des Ankers ist $p = 200$ kg, sein Schwerpunkt steht von der Wellenachse um den Abstand $r = 0{,}05$ mm ab. Der Elastizitätsmodul des Trägermaterials ist $E = 2 \cdot 10^6\ \mathrm{kg/cm}^2$.

Man bestimme das Flächenträgheitsmoment so, daß die Amplitude der erzwungenen Schwingungen 0,5 mm nicht überschreitet. Man vernachlässige das Gewicht des Trägers.



Lösung: $J = 8740\ \mathrm{cm}^4$ und $J = 8480\ \mathrm{cm}^4$.

1283. Ein Nockengetriebe zum Antrieb eines Ventils ist in beistehender Abbildung schematisch dargestellt. Die Masse m, die an einer Seite durch eine Feder mit der Federkonstanten c gehalten wird und die von der anderen Seite durch eine Feder mit der Federkonstanten c_1 die Bewegung des sich bewegenden Nockens erhält, beginnt zu schwingen. Die vertikale Verstellung durch den Nocken wird mit folgenden Formeln festgelegt:



$$x_1 = a\,[1 - \cos\omega t] \quad \text{bei } 0 \leqq t \leqq \frac{2\pi}{\omega},$$

$$x_1 = 0 \qquad \text{bei } t > \frac{2\pi}{\omega}.$$

Man bestimme die Bewegung der Masse m.

Lösung: Bei $0 < t < \frac{2\pi}{\omega}$

$$x = \frac{c_1 a}{m(k^2 - \omega^2)}[\cos kt - \cos \omega t] + \frac{c_1 a}{mk^2}[1 - \cos kt],$$

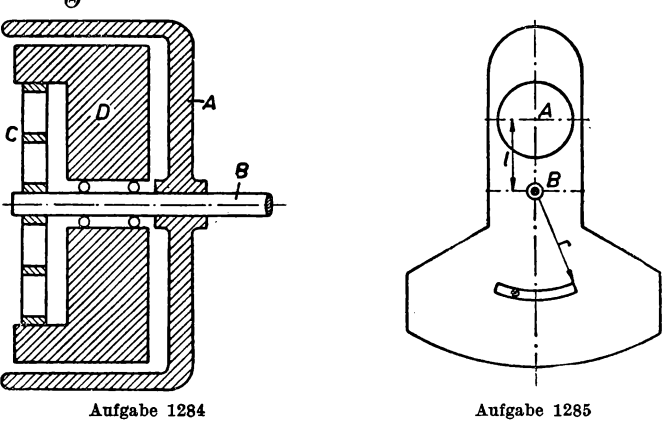
wobei $k = \sqrt{\frac{c + c_1}{m}}$.

Bei $t > \frac{2\pi}{\omega}$ führt die Last freie Schwingungen aus:

$$x = \left[\frac{c_1 a}{m(k^2 - \omega^2)} - \frac{c_1 a}{mk^2}\right]\left[\cos kt - \cos k\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right)\right].$$

1284. Zur Aufzeichnung von Drehschwingungen benutzt man Torsiographen. Die leichte Aluminiumscheibe A ist auf der Welle B verkeilt, die Schwungmasse D durch eine Spiralfeder mit der Federkonstanten c mit der Welle B verbunden. Diese bewegt sich nach der Gleichung $\varphi = \omega t + \varphi_0 \sin \omega t$ (gleichförmige Rotation mit überlagerten harmonischen Schwingungen). Das Massenträgheitsmoment der Schwungmasse in bezug auf die Drehachse ist Θ. Man untersuche die erzwungenen Schwingungen der Schwungmasse des Torsiographen.

Lösung: $\psi = \dfrac{\frac{c}{\Theta}\varphi_0}{\frac{c}{\Theta} - \omega^2} \cdot \sin \omega t$; ψ ist der Drehwinkel der Schwungmasse.



Aufgabe 1284 Aufgabe 1285

1285. Zur Tilgung von Schwingungen der Kurbelwelle eines Flugzeugmotors wird im Gegengewicht der Kurbelwelle eine kreisförmige Nut mit dem Halbmesser r eingearbeitet. Der Mittelpunkt der Nut liegt in B (vgl. Zeichnung), die Drehachse in A. Der Abstand AB beträgt l. Das als materieller Punkt schematisierte zusätzliche Gegengewicht kann sich in der Nut frei bewegen. Die Winkelgeschwindigkeit der Welle sei ω. Man vernachlässige die Einwirkung der Schwerkraft und bestimme die Frequenz der kleinen Schwingungen des zusätzlichen Gegengewichtes.

Lösung: $k = \omega \sqrt{\frac{l}{r}}$.

1286. Der Last vom Gewicht P, die an einer Feder mit der Federkonstanten c hängt, wird im Anfangszeitpunkt die konstante Kraft F erteilt, deren Einwirkung mit Ablauf der Zeitdauer τ aufhört. Man bestimme die Bewegung der Last.

Lösung: Bei $0 < t < \tau$: $x = \frac{F}{c}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{cg}{P}}\, t\right)\right]$,

bei $\tau < t$: $x = \frac{F}{c}\left[\cos\sqrt{\frac{cg}{P}}\,(t-\tau) - \cos\sqrt{\frac{cg}{P}}\, t\right]$.

1287. Man bestimme die Maximalabweichung aus der Gleichgewichtslage des in vorheriger Aufgabe beschriebenen Systems im Falle der Einwirkung von Kräften verschiedener Dauer:

a) $\tau = 0$, $\lim\limits_{\tau \to 0} F\tau = S$ (Stoß); b) $\tau = \frac{T}{4}$; c) $\tau = \frac{T}{2}$, worin T die Schwingungszeit der freien Schwingungen des Systems ist.

Lösung: a) $x_{\max} = \sqrt{\frac{g}{cP}}\, S$; b) $x_{\max} = \sqrt{2}\,\frac{F}{c} = $ c, $x_{\max} = 2\,\frac{F}{c}$.

1288. Man finde die Bewegungsgleichung eines mathematischen Pendels mit der Pendellänge l und der Punktmasse m. Der Aufhängepunkt des Pendels bewegt sich nach dem Gesetz $\xi = \xi(t)$ auf der Horizontalen.

Lösung: Der Ausschlagswinkel φ des Pendels gegen die Vertikale wird durch folgende Formel, worin $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ist, bestimmt:

$$\varphi = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt - \frac{\xi(t)}{l} + \frac{k}{l}\int_0^t \xi(\tau)\sin k(t-\tau)\, d\tau.$$

1289. Auf einen materiellen Punkt mit dem Gewicht P, der an einer Feder mit der Federkonstanten c aufgehängt ist, wirkt eine wechselnde Kraft ein, die durch die Bedingungen

$F = 0$ für $t < 0$,

$F = \frac{t}{\tau} F_0$ für $0 < t < \tau$,

$F = F_0$ für $\tau < t$, gegeben ist. Man bestimme die Bewegung des Punktes und die Amplitude der Schwingung bei $t > \tau$.

Lösung: $x = \frac{F_0}{c}\left[1 - \frac{2}{k\tau}\cos k\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\sin\frac{k\tau}{2}\right]$; $k = \sqrt{\frac{cg}{P}}$; $A = \frac{2F_0}{kc\tau}\sin\frac{k\tau}{2}$.

1290. Auf die Last P, die an einer Feder mit der Federkonstanten c hängt, wirkt eine periodisch wechselnde Kraft Q, die sich nach $Q(t) = F\,|\sin \omega t|$ verändert. Man bestimme die Schwingungsgleichung des Systems unter Berücksichtigung der Erregerfrequenz.

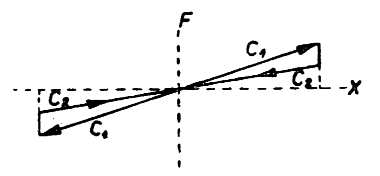
Lösung: Bei $0 < t < \frac{\pi}{\omega}$ ist:

$$x = \frac{F\omega}{mk\,(\omega^2 - k^2)}\left[\sin kt + \operatorname{ctg}\frac{k\,\pi}{2\,\omega}\cos kt\right] - \frac{F}{m\,(\omega^2 - k^2)}\sin \omega t;$$

$$k = \sqrt{\frac{cg}{P}}.$$

1291. Bei der Untersuchung von Pufferfedern ergab sich eine „dreieckige" Charakteristik. Bei der Belastung der Feder ermittelte man den oberen Zweig der Charakteristik (c_1), bei der darauf folgenden Entlastung den unteren Zweig der Charakteristik (c_2). Im Anfangszeitpunkt befindet sich die Feder um die Verschiebung x_0 außerhalb der statischen Gleichgewichtslage und hat keine Anfangsgeschwindigkeit. Die Masse an der Feder ist m, die Federkonstante ist c_1 bzw. c_2.

Man bestimme die Gleichung der freien Schwingungen der Pufferfeder für die erste Hälfte der vollen Periode der Schwingungen und finde die Schwingungszeit T.



Lösung: Bei dem Rückgang der Feder in die Lage des statischen Gleichgewichtes ist $x = x_0 \cdot \cos k_2 t$ bei der Belastung

$$x = -x_0\,\frac{k_2}{k_1}\sin\left(k_1 t - \frac{\pi}{2}\,\frac{k_1}{k_2}\right);\quad T = \pi\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right);$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}};\quad k_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}}.$$

1292. Man bestimme die Beziehung für die Amplitudenabnahme der freien Schwingungen einer Pufferfeder (vgl. vorige Aufgabe). Bei der Aufzeichnung der freien Schwingungen ergab sich folgende Reihe der schrittweisen Verminderung der Amplituden: 12,0 mm, 7,05 mm, 3,80 mm, 2,05 mm usw. Man bestimme gemäß den Angaben des Vibrogramms das Verhältnis der Federkonstanten c_1/c_2 des jeweiligen oberen und unteren Zweiges der „dreieckigen" Charakteristik.

Lösung: Die Werte der Amplituden (jede zweite Halbperiode der Schwingungen) vermindern sich nach einer geometrischen Reihe mit dem Faktor $\frac{k_2}{k_1}$; $\frac{c_1}{c_2} = 3{,}4$.

1293. Man bestimme die kritische Winkelgeschwindigkeit für Biegeschwingungen einer dünnen Welle, die in der Mitte eine Scheibe vom Gewicht P trägt. Man betrachte folgende Fälle:

1. Die Welle liegt mit beiden Enden auf langen Lagern (die Enden können als eingespannt angesehen werden).
2. Das eine Ende der Welle liegt auf einem langen Lager (das Ende ist eingespannt), das andere auf einem kurzen Lager (das Ende liegt frei auf). Die Biegesteifigkeit der Welle beträgt EJ, die Länge der Welle l.

Lösung: 1) $\omega_{\text{krit.}} = \sqrt{\dfrac{192\,EJg}{Pl^3}}$, 2) $\omega_{\text{krit.}} = \sqrt{\dfrac{768\,EJg}{7\,Pl^3}}$.

1294. Man bestimme die kritische Winkelgeschwindigkeit einer rotierenden dünnen Welle der Länge l, wenn die Welle auf zwei kurzen Lagern liegt und im Abstand a davon an einem freien Ende eine Scheibe vom Gewicht P trägt. Die Biegesteifigkeit der Welle ist EJ.

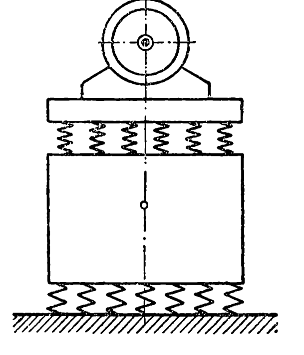
Lösung: $\omega_{\text{krit.}} = \sqrt{\dfrac{3\,EJg}{Pla^2}}$.

1295. Man bestimme die kritische Winkelgeschwindigkeit einer dicken Welle, von der das eine Ende in einem kurzen und das andere in einem langen Lager liegt. Die Länge der Welle ist l, die Biegesteifigkeit EJ, das Gewicht pro Längeneinheit beträgt q kg/m.

Lösung: $\omega_{\text{krit.}} = 15{,}4\sqrt{\dfrac{EJg}{ql^4}}$.

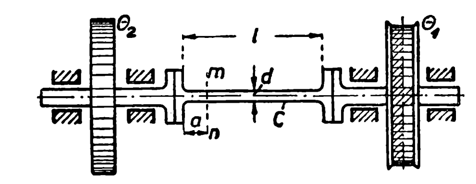
49. Schwingungen mit kleinen Ausschlägen von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden

1296. Das Fundament einer Maschine, die 100 t wiegt, ist auf elastischem Boden aufgebaut. Die Grundfläche des Fundamentes beträgt 17,0 m²; die Bettungsziffer des Bodens ist $\lambda = 6000$ t/m³. Zur Beseitigung von Resonanzschwingungen, die bei dem Betrieb der Maschine entstehen, ist diese auf einem schweren Rahmen gelagert, der durch Federn der Federkonstante $c = 5000$ t/m mit dem Fundament verbunden ist. Das Gewicht der Maschine und des Rahmens beträgt $P = 4{,}9$ t. Man bestimme die Frequenzen der Fundamentalschwingung des Systems (Fundament und Schwingungsdämpfer).



Lösung: $k_1 = 89{,}5\ \text{sec}^{-1}$; $k_2 = 111{,}7\ \text{sec}^{-1}$.

1297. Zur Untersuchung des Reguliervorganges von Wasserturbinen wurde eine Anlage gebaut, bestehend aus der Turbine, deren Rotor das polare Massenträgheitsmoment $\Theta_1 = 5$ kgcmsec² hat, dem Schwungrad mit dem Trägheitsmoment $\Theta_2 = 150$ kgcmsec² und der elastischen Welle C, die den Rotor der Turbine mit dem Schwungrad verbindet. Die Welle hat eine Länge von $l = 1552$ mm, der Durchmesser ist $d = 25{,}4$ mm. Der Schubmodul der Welle ist $G = 880\,000$ kg/cm². Die Wellenmasse wird vernachlässigt, und die Kupplungsstücke werden als starr betrachtet. Zu bestimmen ist die Lage des Schwingungsknotens und die Schwingungszeit T der freien Schwingungen des Systems.



Lösung: $a = 50$ mm; $T = 0{,}09$ sec.

1298. Man bestimme die Frequenz der freien Drehschwingungen einer Schiffswelle mit Propeller. Die Länge der Welle ist $l = 50$ m, der Durchmesser $d = 35$ cm; das Trägheitsmoment der rotierenden Massen an dem einen Ende der Welle ist $\Theta_1 = 390\,000$ kgcmsec², das Trägheitsmoment der Schiffsschraube am anderen Ende der Welle beträgt $\Theta_2 = 69\,000$ kgcmsec². Man vernachlässige die Einwirkung der Wellenmasse auf die Frequenz der freien Schwingungen. Der Schubmodul des Stahles ist $G = 880\,000$ kg/cm².

Lösung: $k = 21{,}4\ \text{sec}^{-1}$.

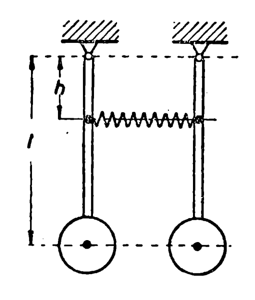
1299. Man bestimme die Frequenzen für die Torsionsschwingungen eines Systems, das aus einer eingespannten Welle mit zwei Schwungmassen von Scheibenform besteht. Eine Scheibe ist in der Mitte der Welle, die andere am freien Ende angebracht. Das Massenträgheitsmoment jeder Scheibe in bezug auf die Wellenachse ist Θ. Die Federkonstanten der Wellenabschnitte sind $c_1 = c_2 = c$. Man vernachlässige die Masse der Welle.

Lösung: $k_1 = 0{,}62\sqrt{\dfrac{c}{\Theta}}$; $\quad k_2 = 1{,}62\sqrt{\dfrac{c}{\Theta}}$.

1300. Man bestimme die Frequenzen für Torsionsschwingungen eines Systems, das aus einer Welle mit drei gleichen homogenen Scheiben besteht. Zwei Scheiben sind an den Enden der Welle befestigt, die dritte in der Mitte. Das Massenträgheitsmoment jeder Scheibe in bezug auf die Wellenachse beträgt Θ. Die Federkonstanten der Wellenabschnitte sind $c_1 = c_2 = c$. Man vernachlässige die Masse der Welle.

Lösung: $k_1 = \sqrt{\dfrac{c}{\Theta}}$; $\quad k_2 = \sqrt{3\dfrac{c}{\Theta}}$.

1301. Zwei gleiche Pendel von der Länge l und der Masse m sind durch eine elastische Feder mit der Federkonstanten c im Abstand h vom Aufhängepunkt verbunden (vgl. Zeichnung). Man bestimme die kleinen Schwingungen des Systems um die Gleichgewichtslage der Pendel, nachdem einem der Pendel der Ausschlag um den Winkel α gegen die Gleichgewichtslage erteilt wurde; die Anfangsgeschwindigkeiten der Pendel betragen $v_0=0$. Man vernachlässige die Massen der Stäbe und die Masse der Feder.



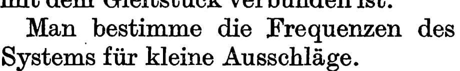
Lösung: $\varphi_1 = \alpha \cdot \cos \frac{k_1 + k_2}{2} t \cdot \cos \frac{k_2 - k_1}{2} t,$

$\varphi_2 = \alpha \cdot \sin \frac{k_1 + k_2}{2} t \cdot \sin \frac{k_2 - k_1}{2} t,$

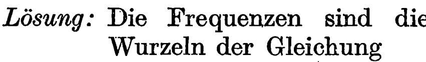
worin φ_1 und φ_2 die Neigungswinkel der Pendel gegen die Vertikale sind.

$$k_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad k_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2\,ch^2}{ml^2}}.$$

1302. Ein Pendel besteht aus einem Gleitstück der Masse M, das ohne Reibung auf einer horizontalen Fläche gleitet und durch eine Feder in die Gleichgewichtslage zurückgebracht wird. Am Gleitstück schwingt eine Kugel mit der Masse m, die durch den Stab AB mit dem Gleitstück verbunden ist.

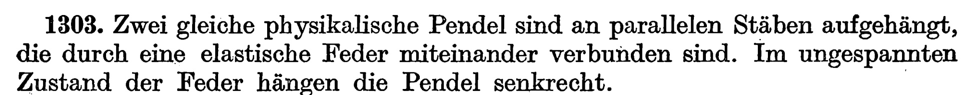


Man bestimme die Frequenzen des Systems für kleine Ausschläge.



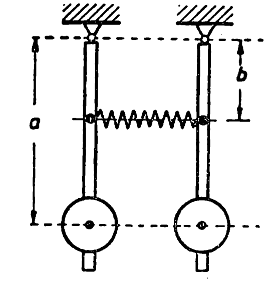
Lösung: Die Frequenzen sind die Wurzeln der Gleichung

$$k^4 - \left[\frac{c}{M} + \frac{g}{l}\,\frac{M+m}{M}\right] k^2 + \frac{c}{M}\,\frac{g}{l} = 0.$$



1303. Zwei gleiche physikalische Pendel sind an parallelen Stäben aufgehängt, die durch eine elastische Feder miteinander verbunden sind. Im ungespannten Zustand der Feder hängen die Pendel senkrecht.

Man vernachlässige die Bewegungswiderstände und die Masse der Feder und bestimme die Frequenzen und die Amplitudenverhältnisse der Fundamentalschwingungen des Systems bei kleinen Ausschlagswinkeln aus der Gleichgewichtslage. Das jeweilige Gewicht der Pendel sei P, der Trägheitshalbmesser des Pendels in bezug auf den Schwerpunkt der Scheibe ϱ; der Schwerpunktsabstand des Pendels vom Aufhängepunkt ist a, der Abstand des Befestigungspunktes der Feder ist b und die Federkonstante ist c.



Lösung: $k_1^2 = \frac{ga}{\varrho^2 + a^2}$; $k_2^2 = \frac{(Pa + 2\,cb^2)\,g}{P(\varrho^2 + a^2)}$; $\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}} = +1$; $\frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}} = -1,$

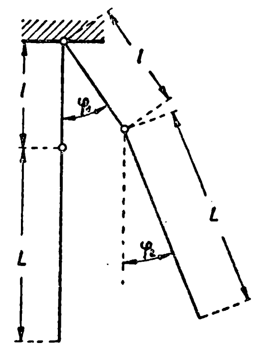
worin A_1 und A_2 die Amplituden der Schwingungen sind.

1304. Zwei gleiche physikalische Pendel sind in gleicher Höhe aufgehängt und durch eine elastische Feder verbunden. Im ungespannten Zustand der Feder hängen die Pendel senkrecht. Das Gewicht jedes Pendels beträgt $P = 0{,}45$ kg; das Massenträgheitsmoment des Pendels in bezug auf den Aufhängepunkt ist $\Theta = 0{,}664$ kgcmsec^2; der Abstand des Pendelschwerpunktes vom Aufhängepunkt beträgt $a = 34{,}2$ cm, der Abstand der Befestigung der Feder an die Pendel $h_1 = h_2 = 34{,}2$ cm; die Federkonstante ist $c = 0{,}004$ kg/cm.

Man bestimme die Frequenzen der Fundamentalschwingungen des gegebenen Systems und die jeweiligen Amplitudenverhältnisse. Man vernachlässige die Masse der Feder.

Lösung: $k_1 = 4{,}8$ sec^{-1}; $k_2 = 6{,}1$ sec^{-1}.
$\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}} = +1$; $\frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}} = -1$.

1305. Ein homogener Stab von der Länge L ist durch eine Schnur von der Länge $l = 0{,}5\,L$ an einen festen Punkt aufgehängt. Man vernachlässige die Masse der Schnur und bestimme die Frequenzen der Fundamentalschwingungen des Systems. Weiterhin sollen die Beziehungen der Neigungen des Stabes und der Schnur gegen die Vertikale bei der ersten und zweiten Fundamentalschwingung gefunden werden.



Lösung: $k_1 = 0{,}677\sqrt{\frac{g}{l}}$; $k_2 = 2{,}558\sqrt{\frac{g}{l}}$;
in der ersten Hauptschwingung ist $\varphi_1 = 0{,}847\,\varphi_2$, in der zweiten $\varphi_1 = -1{,}180\,\varphi_2$, worin φ_1 und φ_2 die Amplituden der Winkel sind, die durch die Schnur bzw. den Stab mit der Vertikalen gebildet werden.

1306. Im Gegensatz zur vorigen Aufgabe ist die Länge der Schnur im Vergleich zur Länge des Stabes sehr groß. Man vernachlässige das Quadrat des Wertes $\frac{L}{l}$ und bestimme das Verhältnis der Grundfrequenz der freien Schwingungen des Systems zur Frequenz der Schwingungen des mathematischen Pendels von der Länge l.

Lösung: $1 - \frac{1}{4}\frac{L}{l}$.

1307. In Aufgabe 1305 sei die Länge der Schnur im Vergleich zur Länge des Stabes sehr klein. Man vernachlässige das Quadrat des Wertes $\frac{l}{L}$ und bestimme das Verhältnis der Grundfrequenz der freien Schwingungen des Systems zur Frequenz des physikalischen Pendels, wenn sich die Drehachse am Ende des Stabes befindet.

Lösung: $1 - \frac{9}{16}\frac{l}{L}$.

1308. Die Punkte A und B der Hebebühne einer Laufkatze liegen auf je einer Feder der gleichen Federkonstanten c; der Abstand zwischen den Achsen der Federn ist $AB = l$; der Schwerpunkt C der Hebebühne liegt auf der Geraden AB im Abstand $AC = \frac{1}{3}$ vom Punkt A. Der Trägheitshalbmesser der Hebebühne um die Achse, die senkrecht zur Geraden AB durch den Schwerpunkt C der Hebebühne geht und in ihrer Ebene liegt, wird zu 0,2 l angenommen; das Gewicht der Hebebühne ist Q.

Man finde die Schwingungen der Hebebühne, die unter der Einwirkung eines Stoßes entstehen, der dem Schwerpunkt der Hebebühne senkrecht zu ihrer Ebene erteilt wird. Der Impuls des Stoßes sei S.

Lösung: z sei die vertikale Verschiebung des Schwerpunktes der Hebebühne, φ ihr Verdrehungswinkel um die in der Aufgabe angeführte Achse. Die angegebenen Koordinaten werden von der Gleichgewichtslage des Schwerpunktes aus gezählt. Man findet:

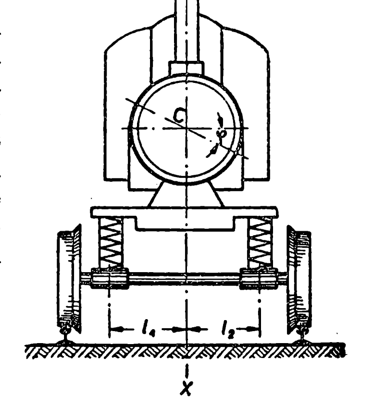
$$z = \sqrt{\frac{g}{cQ}}\,S\left(0{,}738 \sin 1{,}330 \sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t + 0{,}00496 \sin 3{,}758 \sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t\right);$$

$$l\,\varphi = \sqrt{\frac{g}{cQ}}\,S\left(0{,}509 \sin 1{,}330 \sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t - 0{,}180 \sin 3{,}758 \sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t\right).$$

1309. Ein physikalisches Doppelpendel besteht aus dem homogenen geradlinigen Stab O_1O_2 mit der Länge $2\,a_1$ und dem Gewicht P_1, der sich um die feste horizontale Achse O_1 dreht, und dem homogenen geradlinigen Stab AB von der Länge $2\,a_2$ und dem Gewicht P_2, der in seinem Mittelpunkt mit dem Ende O_2 des ersten Stabes beweglich verbunden ist. Man bestimme die Bewegung des Systems, wenn im Anfangsaugenblick der Stab $O_1\,O_2$ um den Winkel φ_0 gegen die Vertikale geneigt ist, der Stab AB eine vertikale Lage einnimmt und seine anfängliche Winkelgeschwindigkeit ω_0 ist.

Lösung: $\varphi = \varphi_0 \cos\left\{\sqrt{\frac{3}{4}\cdot\frac{g}{a_1}\,\frac{1+\frac{2P_2}{P_1}}{1+\frac{3P_2}{P_1}}}\cdot t\right\}$; $\psi = \omega_0 t$, worin ψ der Winkel ist, den der Stab AB mit der vertikalen Richtung bildet.

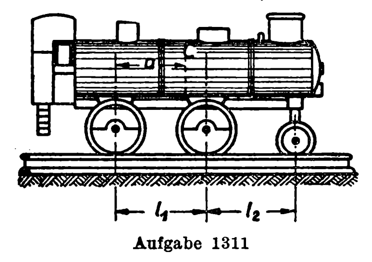
1310. Das Gewicht $Q = 26$ t einer dreiachsigen Lokomotive ist auf Federn gelagert. Der Abstand des Schwerpunktes von den Befestigungsstellen der Federn beträgt $l_1 = l_2 = 1{,}25$ m, das Trägheitsmoment bezüglich der Längsachse durch C ist $\Theta = 3$ tmsec^2; die Federkonstanten der an drei Räderachsen befestigten Federn sind für jede Seite gleich: $c_1 = c_2 = 135$ t/m; $c_3 = 148$ t/m. Man bestimme die Frequenz des auf den Federn gelagerten Teiles der Lokomotive.



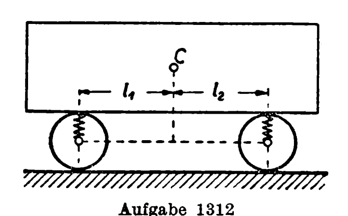
Lösung: $\varphi = A \sin(kt + \alpha)$; $k = 20{,}88\ \text{sec}^{-1}$, worin A, α Integrationskonstanten sind.

1311. Das Gewicht einer dreiachsigen Lokomotive beträgt $Q = 26$ t, der Abstand des Schwerpunktes von der Vertikalen durch die Hinterachse $a = 1{,}6$ m; der Achsabstand beträgt $l_1 = l_2 = 1{,}8$ m; das Trägheitsmoment der Lokomotive, bezogen auf die horizontale Querachse durch den Schwerpunkt, ist $\Theta = 220$ tmsec²; die Federkonstanten der Federn sind $c_1 = c_2 = 135$ t/m, $c_3 = 148$ t/m (an jeder Achse sind zwei Federn). Man bestimme die Frequenzen der Fundamentalschwingungen der Lokomotive in ihrer vertikalen Längsebene und finde die Verhältnisse β zwischen den vertikalen Schwingungsamplituden (Stampfen) und der Rotation um die Querachse (Rollen) für jede Fundamentalschwingung.

Lösung: $k_1 = 2{,}88\ \text{sec}^{-1}$; $k_2 = 17{,}76\ \text{sec}^{-1}$;
$\beta_1 = -0{,}263$ m/Bg; $\beta_2 = 318$ m/Bg.



Aufgabe 1311



Aufgabe 1312

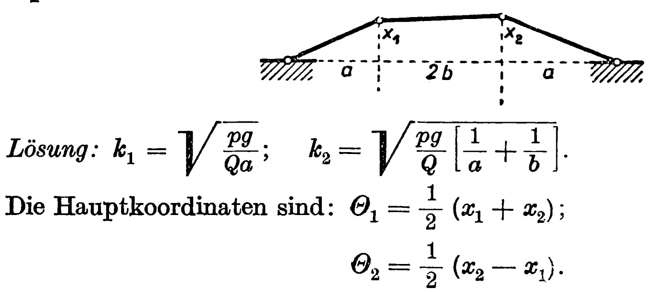
1312. Man untersuche die Schwingungen eines Eisenbahnwagens in seiner mittleren vertikalen Ebene, wenn das Gewicht des auf den Federn lastenden Waggons Q ist; der Abstand des Schwerpunktes von den Achsen beträgt $l_1 = l_2 = l$; der Trägheitshalbmesser, bezogen auf die Achse, die durch den Punkt C verläuft, ist ϱ; die Federkonstanten sind für beide Achsen gleich $c_1 = c_2 = c$.

Lösung: $x = A \sin(k_1 t + \alpha)$; $\psi = B \sin(k_2 t + \beta)$,
wobei x die vertikale Verschiebung des Waggonschwerpunktes und ψ der Ausschlagwinkel des Waggons gegen die Horizontale und A, B, α, β Integrationskonstanten sind;

$$k_1 = \sqrt{\frac{2cg}{Q}}; \qquad k_2 = \sqrt{\frac{2cgl^2}{Q\varrho^2}}.$$

1313. Zwei gleiche Massenpunkte vom Gewicht Q sind in gleichen Abständen an einem gespannten Seil von der Länge $2(a + b)$ befestigt (vgl. Zeichnung); die Seilkraft ist p.

Man bestimme die Frequenzen der Fundamentalschwingungen und finde die Hauptkoordinaten.



Lösung: $k_1 = \sqrt{\frac{pg}{Qa}}$; $k_2 = \sqrt{\frac{pg}{Q}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right]}$.

Die Hauptkoordinaten sind: $\Theta_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$;

$$\Theta_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1).$$

1314. Man bestimme die Frequenzen der Schwingungen eines Massenpunktes um die Gleichgewichtslage auf einer glatten, mit der konkaven Seite nach oben gerichteten Fläche; die Hauptkrümmungsradien der Fläche in der Nähe der Gleichgewichtslage sind ϱ_1 und ϱ_2.

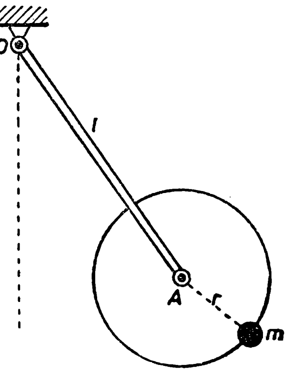
Lösung: $k_1 = \sqrt{\dfrac{g}{\varrho_1}}; \quad k_2 = \sqrt{\dfrac{g}{\varrho_2}}.$

1315. Man bestimme die Frequenzen der Schwingungen eines Massenpunktes um seine Gleichgewichtslage, die mit dem niedrigsten Punkte einer gekrümmten Fläche zusammenfällt. Die Fläche dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale Achse, die durch die Gleichgewichtslage verläuft. Die Krümmungshalbmesser der Fläche im tiefsten Punkt sind ϱ_1 und ϱ_2.

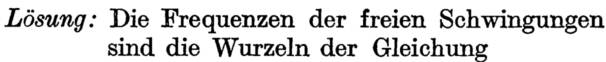
Lösung: Die Frequenzen der Schwingungen sind die Wurzeln der Gleichung

$$k^4 - \left[2\,\omega^2 + \frac{g}{\varrho_1} + \frac{g}{\varrho_2}\right] k^2 + \left(\omega^2 - \frac{g}{\varrho_1}\right)\left(\omega^2 - \frac{g}{\varrho_2}\right) = 0.$$

1316. Eine runde homogene Scheibe mit dem Halbmesser r und der Masse M ist beweglich mit dem Stab OA der Länge l verbunden. Dieser schwingt um die feste horizontale Achse. Ein Massenpunkt mit der Masse m ist am Umfang der um A drehbaren Scheibe befestigt.



Man bestimme die Frequenzen der freien Schwingungen des Systems. Die Masse des Stabes ist zu vernachlässigen.



Lösung: Die Frequenzen der freien Schwingungen sind die Wurzeln der Gleichung

$$k^4 - \frac{M+m}{M+3m}\left[1 + 2\,\frac{m}{M}\,\frac{r+l}{r}\right]\frac{g}{l}\,k^2 + \frac{2\,m\,(M+m)}{M\,(M+3m)}\,\frac{g^2}{lr} = 0.$$

1317. Ein mechanisches System mit der Masse m_1, an der der Kolben eines Stoßdämpfers im Punkt B fest angeschlossen ist, bewegt sich nach $\xi = \xi\,(t)$. Die Masse m_1 ist an die Feder mit der Federkonstanten c_1 angehängt. Der Kolben des Stoßdämpfers ist durch eine Feder mit der Federkonstanten c_2 am Zylinder mit der Masse m_2 befestigt. Die zähe Reibung im Zylinder ist proportional der relativen Geschwindigkeit des Kolbens gegen den Zylinder; β ist der Dämpfungsfaktor.

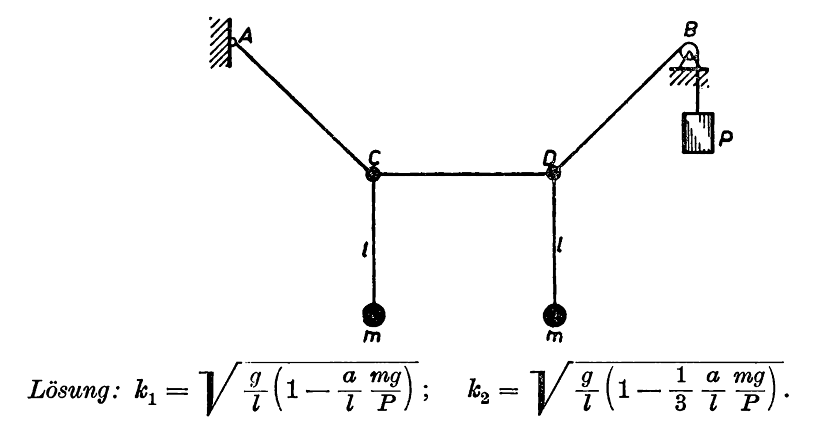
Man setze die Bewegungsgleichung des Systems an. (Die Masse des Kolbens wird vernachlässigt.)

Lösung: $m_1\ddot{x}_1 + \beta\dot{x}_1 - \beta\dot{x}_2 + (c_1 + c_2)\,x_1 - c_2x_2 = c_1\,\xi\,(t);$

$m_2\ddot{x}_2 - \beta\dot{x}_1 + \beta\dot{x}_2 - c_2x_1 + c_2x_2 = 0.$

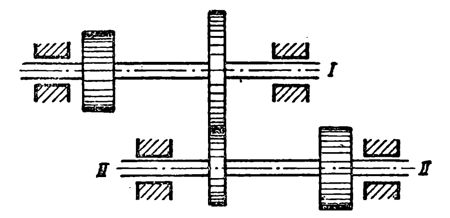
1318. Ein Seil ist zwischen zwei feststehenden Stützen A und B gespannt. Der Seilzug wird am Auflager B von der angehängten Last P aufgenommen. An den Punkten C und D sind zwei Pendel aufgehängt, die senkrecht zur Zeichenfläche schwingen können. Die Abstände betragen $AC = CD = DB = a$. Man vernachlässige die Masse des Seiles und der Pendelfäden und betrachte jedes Pendel als Massenpunkt mit der Masse m, der an einem Faden von der Länge l hängt. Man bestimme die Frequenzen der freien Schwingungen des Systems.

Hinweis: Die Verhältnisse $\frac{a}{l} \cdot \frac{mg}{P}$ und $\frac{mg}{P}$ werden als klein angesehen.



Lösung: $k_1 = \sqrt{\frac{g}{l}\left(1 - \frac{a}{l}\frac{mg}{P}\right)}$; $k_2 = \sqrt{\frac{g}{l}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{a}{l}\frac{mg}{P}\right)}$.

1319. Man bestimme die Frequenzen der Torsionsschwingungen eines Zahnradgetriebes. Die Trägheitsmomente der auf den Wellen aufgesetzten Schwungmassen und die Trägheitsmomente der Zahnräder in bezug auf die Wellenachsen haben die Größen $\Theta_1 = 875\,000$ kgcmsec², $\Theta_2 = 56\,000$ kgcmsec², $\Theta z_1 = 302$ kgcmsec², $\Theta z_2 = 10{,}5$ kgcmsec²; das Übersetzungsverhältnis ist $i = \frac{z_1}{z_2} = 5$; die Drehsteifigkeiten der Wellen betragen $c_1 = 316 \cdot 10^6$ kgcm, $c_2 = 115 \cdot 10^6$ kgcm. Man vernachlässige die Wellenmassen.



Lösung: $k_1 = 23{,}1\ \mathrm{sec}^{-1}$, $k_2 = 2{,}47 \cdot 10^3\ \mathrm{sec}^{-1}$.

1320. Man vernachlässige die Masse der Zahnräder und bestimme die Frequenz der Torsionsschwingungen des in der vorigen Aufgabe beschriebenen Systems.

Lösung: $k = 23{,}0\ \mathrm{sec}^{-1}$.

1321. Das Fundament eines Motors, das die Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds hat, liegt auf dem elastischen Grund mit der Fläche F auf. Der Schwerpunkt C der Grundfläche und der Schwerpunkt D des Fundamentes mit dem Motor liegen senkrecht übereinander. Das Gewicht des Fundamentes mit dem Motor ist Q; sein polares Massenträgheitsmoment in bezug auf die Achse, die der Motorachse parallel ist, beträgt Θ_D, das Flächenträgheitsmoment der Grundfläche des Fundamentes in bezug auf die Achse, die parallel zu der Motorachse liegt, ist J_C. Die Bettungsziffer des elastischen Grundes ist c_z (Steifigkeit des Grundes ist damit $c_z F$). Man bestimme die Frequenzen der Hauptschwingungen des Fundamentes.

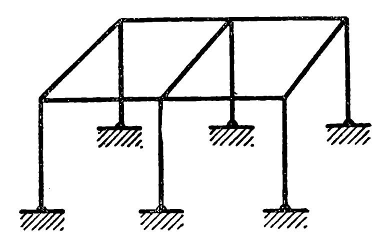
Lösung: Die Frequenz der vertikalen Schwingungen ist

$k_1 = \sqrt{\frac{c_z F g}{Q}}$; die Frequenz der Winkelschwingungen ist

$$k_2 = \sqrt{\frac{c_z J_C}{\Theta_D}}.$$

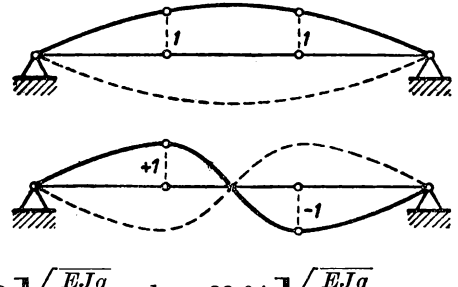
1322. Das Fundament eines Turbogenerators besteht aus drei vertikalen, gegenseitig parallelen und durch horizontale Längsbohlen verbundenen Rahmen. Jeder Rahmen besteht aus zwei vertikalen Ständern, die im Boden eingelassen sind, und einem horizontalen Riegel, der fest an die Ständer angeschlossen ist. Bei der Untersuchung der freien vertikalen Schwingungen des Rahmens kann man das gegebene System durch ein anderes, aus zwei Massen bestehendes System ersetzen. Zu diesem Zweck müssen der Träger und die Ständer als masselos angesehen werden und die Belastung auf den Rahmen folgendermaßen sein: 1) Die Belastung P_1, die in der Mitte des Trägers konzentriert ist, besteht aus dem entsprechenden Teil des Gewichts der Maschine und 45 % des Gewichts des Trägers. 2) Die Belastung P_2, die gleichmäßig an den Ecken des Rahmens verteilt ist, besteht aus 51 % des Trägergewichtes, 35 % des Ständergewichtes und 1 % des Längsbohlengewichtes. Bekannt sind: das Gewicht $P_1 = 5$ t; $P_2 = 15{,}3$ t und die Federkonstanten. Die Federkonstante des Trägers ist $c_1 = 1{,}15 \cdot 10^6$ kg/cm, die der Ständer $c_2 = c_3 = 476 \cdot 10^6$ kg/cm.

Man bestimme die Drehzahlen, denen die vertikalen Fundamentalschwingungen, die vom Rahmen ausgeführt werden, entsprechen.



Lösung: $n_1 = 4180$ U/min, $n_2 = 8080$ U/min.

1323. Es sind die Frequenzen und Schwingungsformen von Biegeschwingungen eines Balkens der Länge l zu ermitteln. Der Balken liegt frei auf zwei Stützen und wird in den Punkten $x = \frac{1}{3}\,l$ und $x = \frac{2}{3}\,l$ durch zwei gleiche Lasten vom Gewicht Q belastet. Das Flächenträgheitsmoment des Balkens ist J, der Elastizitätsmodul ist E. Die Balkenmasse bleibt unbeachtet.

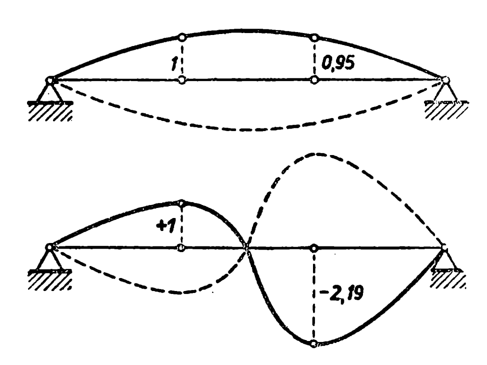


Lösung: $k_1 = 5{,}69\sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}}$; $k_2 = 22{,}04\sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}}$;

$\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}} = 1$; $\frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}} = -1$;

Die Formen der Hauptschwingungen sind aus den Zeichnungen zu ersehen.

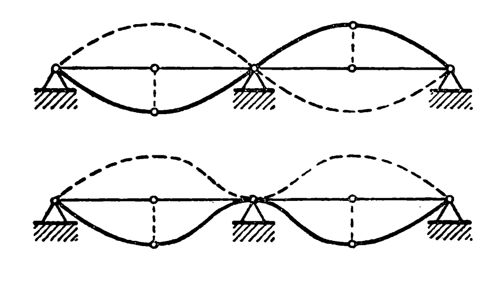
1324. Es sind die Frequenzen und die Schwingungsformen der Biegeschwingungen eines Balkens mit der Länge l zu ermitteln. Der Balken liegt frei auf zwei Stützen und ist mit zwei Lasten $m_1 = m$ und $m_2 = \frac{m}{2}$ im Abstand $\frac{1}{3}\,l$ von den Stützen belastet. Die Balkenmasse bleibt unbeachtet.



Lösung: $k_1 = 6{,}55\sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}}$; $k_2 = 27{,}2\sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}}$;

$\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = 0{,}95$; $\frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = -2{,}10.$

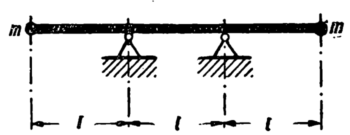
1325. Es sind die Frequenzen und die Schwingungsformen der Biegeschwingungen eines auf drei Stützen gelagerten Balkens zu ermitteln. Zwischen den Lagern ist der Balken belastet. Die Lasten sind $Q_1 = Q_2 = Q$, die Spannlängen sind $l_1 = l_2 = l$. Die Abstände der Lasten von den Lagern betragen jeweils $\frac{l}{2}$, die Balkenmasse bleibt unbeachtet.



Lösung: $k_1 = 6{,}93 \sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}}$; $k_2 = 10{,}46 \sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}}$.

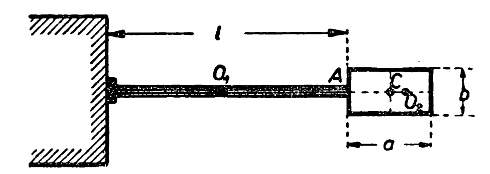
Die Formen der Hauptschwingungen sind aus der Zeichnung zu ersehen.

1326. Zu ermitteln sind die Frequenzen und die Hauptschwingungsformen zweier gleichgroßer Massen m, die an den Enden eines horizontalen Kragbalkens in gleichen Abständen l von den Stützen befestigt sind. Der Balken von der Länge $3\,l$ liegt auf zwei Stützen mit dem Abstand l. Das Flächenträgheitsmoment des Balkens ist J, der Elastizitätsmodul E. Die Balkenmasse bleibt unbeachtet.



Lösung: $k_1 = \sqrt{\frac{6}{5}\frac{EJ}{ml^3}}$; $k_2 = \sqrt{2\frac{EJ}{ml^3}}$.

1327. Eine rechteckige Platte mit der Masse m ist am Ende A eines Balkens der Länge l befestigt. Das andere Ende des Balkens ist fest eingespannt. Das System führt freie Schwingungen um die Gleichgewichtslage aus. Es sind die Frequenzen und die Schwingungsformen dieser Schwingungen zu ermitteln. Die Abmessungen der Platte sind: $a = 0{,}2\,l$, $b = 0{,}1\,l$. Die Masse des Balkens bleibt unbeachtet.



Hinweis: Die Kraft Q und das Moment M am Ende des Balkens A erwirken eine Durchbiegung f und eine Drehung der Balkenachse um den Winkel φ. Man bestimmt sie durch die Formeln

$f = pQ + sM$; $\varphi = sQ + qM$.

Für den einseitig eingespannten Balken gilt:

$p = \frac{l^3}{3EJ}$; $q = \frac{l}{EJ}$; $s = \frac{l^2}{2EJ}$.

Lösung: Die Frequenzen der Hauptschwingungen sind:

$k_1 = 0{,}864 \sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}}$; $k_2 = 20{,}47 \sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}}$.

Die erste Hauptschwingung kann man als Schwingung um den Punkt O_1 ansehen, der auf der Balkenachse links vom Punkt A im Abstand $O_1A = 0{,}638\,l$ liegt; die zweite Schwingung um den Punkt O_2, der auf der Verlängerung der Balkenachse im Abstand $O_2A = 0{,}106\,l$ rechts vom Punkt A liegt.

1328. An die erste von zwei festen Scheiben, die mit einer Welle c verbunden sind, wird plötzlich ein konstantes Drehmoment M_0 angesetzt. Die Massenträgheitsmomente der Scheiben sind Θ.

Bei Nichtbeachtung der Wellenmasse ist die Systembewegung zu ermitteln.

Lösung: $$\varphi_1 = \frac{M}{4\Theta} t^2 + \frac{M}{4c}\left(1 - \cos\sqrt{2\frac{c}{\Theta}}\, t\right),$$
$$\varphi_2 = \frac{M}{4\Theta} t^2 - \frac{M}{4c}\left(1 - \cos\sqrt{2\frac{c}{\Theta}}\, t\right).$$

1329. Das Fundament einer Maschine von $P_1 = 100$ t Gewicht, das auf festem Boden aufgestellt ist, vollbringt vertikale erzwungene Schwingungen unter dem Einfluß einer vertikalen Kraft, die dem Gesetz $F = 10 \sin \omega t$ genügt. Um Resonanz zu vermeiden, die bei der Winkelgeschwindigkeit der Maschinenwelle $\omega = 100\ \text{sec}^{-1}$ auftreten würde, wird ein Schwingungsdämpfer eingebaut. (Siehe Zeichnung zur Aufgabe 1296.)

Es ist das Rahmengewicht P_2 und die gesamte Federkonstante der Feder c_2 vom Dämpfer so zu ermitteln, daß die Amplitude der erzwungenen Fundamentschwingungen bei angegebener Wellengeschwindigkeit zu Null wird und die Schwingungsamplitude des Dämpfers $A = 2$ mm nicht übersteigt.

Lösung: $c_2 = 5 \cdot 10^3$ t/m; $P_2 = 4{,}9$ t.

1330. Es sind die Amplituden der erzwungenen Schwingungen eines Scheibensystems, wie es in Aufgabe 1299 beschrieben ist, zu ermitteln. Auf die mittlere Scheibe wirkt ein Torsionsmoment $M = M_0 \sin pt$.

Lösung: $$\varphi_1 = \frac{M_0 (c - \Theta p^2)}{\Theta^2 (p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)} \sin pt,$$
$$\varphi_2 = \frac{M_0 c}{\Theta^2 (p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)} \sin pt,$$
worin k_1 und k_2 Frequenzen der Hauptschwingungen des Systems sind.

1331. Ein Elektromotor vom Gewicht Q_1 ist auf einem Betonfundament (in Form eines Parallelepipeds) mit dem Gewicht Q_2 und der Federkonstanten c_2 aufgestellt. Der Läufer vom Gewicht P sitzt auf einer horizontalen Welle mit der Federkonstanten c_1. Die Exzentrizität des Läufers ist r, die Winkelgeschwindigkeit der Welle ω. Es sind die erzwungenen Schwingungen des Ständers zu ermitteln. Der Einfluß der Fundamentmasse ist durch Zuschlag eines Drittels davon zur Ständermasse zu berücksichtigen.

Lösung: $$y = \frac{c_1 P g r \omega^2 \sin \omega t}{c_1 c_2 g^2 - \left[(c_1 + c_2) P + c_1\left(Q_1 + \frac{1}{3} Q_2\right)\right] g \omega^2 + P\left(Q_1 + \frac{1}{3} Q_2\right)\omega^4},$$
wobei y die Abweichung der Fundamentmasse von der Gleichgewichtslage ist.

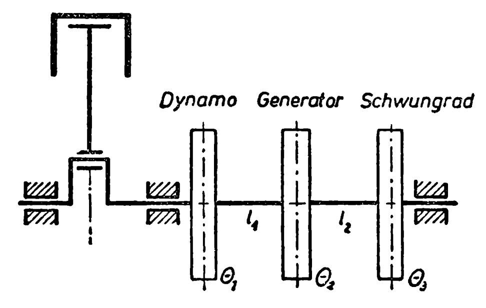
1332. Die Welle eines Dreizylinder-Zweitakt-Motors ist mit einem Generator vom Gewicht $P_1 = 109\,700$ kg gekuppelt. (Auf der Welle ist ein Schwungrad von $P_2 = 94\,000$ kg angebracht.) Jedes dieser Teile kann man als dünnen Reifen mit dem Radius $R = 50$ cm betrachten. Die Wellenlänge beträgt $l = 2{,}52$ cm, das polare Flächenträgheitsmoment ist $J = 982^4$ cm, der Schubmodul $G = 8{,}2 \cdot 10^5$ kg/cm². Bei einer Veränderung der Drehzahl von $n_1 = 142$ U/min bis $n_2 = 160$ U/min wurden heftige Stromschwankungen beobachtet, dann brach die Welle. Es ist die Ursache des Wellenbruches festzustellen. Die Wellenmasse und die Reibungen in den Lagern sollen unbeachtet bleiben.

Lösung: $n_{kr} = 476$ U/min; $3n_1 < n_{kr} < 3n_2$, d. h., die kritische Drehzahl lag innerhalb der Zahl der Impulse, die in einer Minute vom Motor an die Welle übertragen wurden.

1333. Auf gemeinsamer Welle mit einem Dreizylinder-Viertaktmotor sind befestigt: der Läufer einer Gleichstrom-Dynamomaschine mit dem Trägheitsmoment $\Theta_1 = 1{,}78 \cdot 10^3$ kgcmsec², der Läufer eines Wechselstromgenerators mit dem Trägheitsmoment $\Theta_2 = 5\,\Theta_1$ und ein Schwungrad mit dem Trägheitsmoment $\Theta_3 = 50\,\Theta_1$. Die Längen der Wellenteile sind $l_1 = 373$ cm, $l_2 = 239$ cm, der Schubmodul ist G, das polare Flächenträgheitsmoment ist J, das Produkt JG ergibt 10^{10} kgcm². Die Massen der Kurbelstangen, der Kolben, der Kurbel und der Welle bleiben unbeachtet.

Es ist die Frequenz der Hauptschwingungen des Systems, die kritische Winkelgeschwindigkeit der Welle, das Verhältnis der Amplituden und die Zahl der Knoten in der Welle bei jeder Hauptschwingung zu ermitteln.

Hinweis: Es ist zu berücksichtigen, daß die Dauer einer Periode T der Drehkraft mit der Dauer einer Periode T_0 der Wellenumdrehung durch die Beziehung $T = {}^2/_3\, T_0$, $\omega_{kr} = {}^2/_3\, p_{kr}$ verknüpft ist, wobei p die Frequenz des Drehmomentes ist.



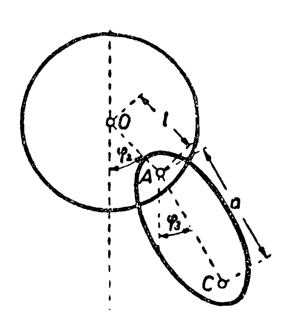
Lösung: $p_1 = 64{,}3\ \text{sec}^{-1}$; $p_2 = 138\ \text{sec}^{-1}$;
$\omega_{kr} = 42{,}6\ \text{sec}^{-1}$; $\omega_{kr} = 92\ \text{sec}^{-1}$;

$$\left(\frac{A_2}{A_1}\right)_1 = 0{,}724;\ \left(\frac{A_2}{A_1}\right)_2 = -0{,}27;\ \left(\frac{A_3}{A_1}\right)_1 = -0{,}092;\ \left(\frac{A_3}{A_1}\right)_2 = 0{,}0096.$$

In der ersten Hauptschwingung ist ein Knoten, in der zweiten sind zwei Knoten.

1334. Zur Aufnahme von Drehschwingungen wird an eine der schwingenden Massen eines Systems ein Pendel angebracht. In der Zeichnung ist dieses System schematisch dargestellt. Das Pendel ist an der Masse II befestigt. Die Massenträgheitsmomente sind Θ_1 und Θ_2. Das Massenträgheitsmoment des Pendels, bezogen auf die Schwerpunktachse, ist Θ_3. Der Abstand von der Drehachse des Systems bis zum Aufhängepunkt des Pendels beträgt $OA = l$. Der Abstand vom Aufhängepunkt bis zum Schwerpunkt des Pendels ist $AC = a$, die Pendelmasse ist m. Die Federkonstante des Wellenstückes zwischen den Massen I und II ist c_1. An die zweite Masse greift das äußere Moment $M = M_0 \cdot \sin \omega t$ an.
Es sollen die Differentialgleichungen der Bewegungen der beiden Systemmassen und des Pendels aufgestellt werden.

Hinweis: Bei Aufstellung der potentiellen Energie des Systems bleibt die potentielle Energie des Pendels im Schwerkraftfeld unbeachtet.



Aufgabe 1334

Aufgabe 1334

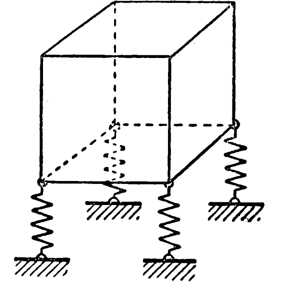
Lösung:

$$\Theta_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0;$$

$$(\Theta_2 + m l^2)\ddot{\varphi}_2 + m a l \ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + m a l \dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + c_1(\varphi_2 - \varphi_1) = M_0 \sin \omega t;$$

$$(\Theta_3 + m a^2)\ddot{\varphi}_3 + m a l \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) - m a l \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) = 0.$$

1335. Ein kubischer Behälter vom Gewicht P stützt sich mit den vier unteren Ecken auf vier gleiche Federn. Die Schenkellänge des Behälters beträgt $2a$. Die Gesamtfederkonstanten in Richtung des Koordinatensystems sind c_x, c_y, c_z. Das Trägheitsmoment des Würfels um die Hauptträgheitsachsen ist Θ.
Es sollen die Gleichungen für Schwingungen mit kleinen Ausschlägen aufgestellt werden, und es sind die Frequenzen zu ermitteln, wenn $c_x = c_y$ ist.



Lösung:

$$m\ddot{x} + c_x x - c_x a \varphi_2 = 0;$$

$$m\ddot{y} + c_y y + c_y a \varphi_1 = 0; \quad m\ddot{z} + c_z z = 0;$$

$$\Theta \ddot{\varphi}_1 + c_y a y + c_y a^2 \varphi_1 + c_z a^2 \varphi_1 = 0;$$

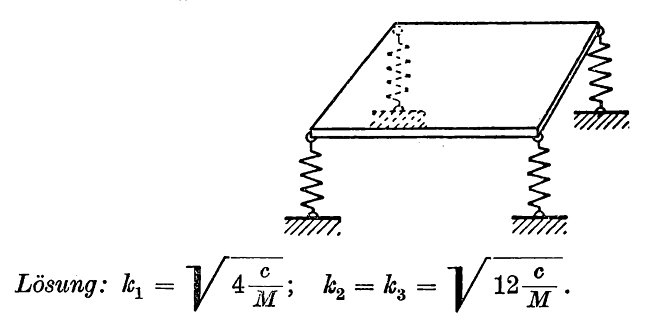
$$\Theta \ddot{\varphi}_2 + c_x a^2 \varphi_2 - c_x a x + c_z a^2 \varphi_2 = 0;$$

$$\Theta \ddot{\varphi}_3 + c_x a^2 \varphi_3 + c_y a^2 \varphi_3 = 0;$$

wobei x, y, z die Koordinaten des Würfelmittelpunktes sind und φ_1, φ_2, φ_3 die Drehwinkel gegen die Koordinatenachsen darstellen. Wenn $c_x = c_y$, dann folgt:

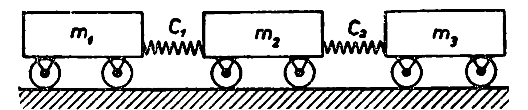
$$k_z = \sqrt{\frac{c_z g}{P}}; \quad k_{\varphi 3} = \sqrt{\frac{2 c_x a^2}{\Theta}}; \quad k^4 - \frac{m(c_x + c_z)a^2 + c_x \Theta}{m \Theta} k^2 + c_x c_z \frac{a^2}{m \Theta} = 0.$$

1336. Eine rechteckige Platte mit den Seiten a und b stützt sich mit ihren Ecken auf vier gleichartige Federn mit den Federkonstanten c. Die Plattenmasse ist M. Es sind die Frequenzen der freien Schwingungen zu ermitteln.



Lösung: $k_1 = \sqrt{4\frac{c}{M}}$; $k_2 = k_3 = \sqrt{12\frac{c}{M}}$.

1337. Drei beladene Eisenbahnwaggons sind miteinander gekuppelt. Die Federkonstante der Puffer ist c_1 bzw. c_2. Das Wagengewicht beträgt Q_1, Q_2 und Q_3. Im Anfangsaugenblick befinden sich zwei Wagen in der Ruhelage (Gleichgewichtszustand), und der äußere (rechte) Wagen ist aus der Gleichgewichtslage um x_0 abgewichen. Es sollen die Frequenzen der Hauptschwingungen des Systems ermittelt werden.



Lösung: $k_1 = 0$, k_2 und k_3 sind die Wurzeln der Gleichung

$$k^4 - g\left[\frac{c_1}{Q_1} + \frac{c_1 + c_2}{Q_2} + \frac{c_2}{Q_3}\right] k^2 + g^2\left[\frac{c_1 c_2}{Q_1 Q_2} + \frac{c_1 c_2}{Q_2 Q_3} + \frac{c_1 c_2}{Q_1 Q_3}\right] = 0.$$

1338. Mit den Bedingungen der vorigen Aufgabe sind die Wagenbewegungen und die Schwingungsformen der Wagen zu bestimmen. Die Wagen haben gleiches Gewicht, $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$, und sind miteinander durch gleich harte Puffer ($c_1 = c_2 = c$) verbunden.

Lösung: $x_1 = \frac{x_0}{3} - \frac{x_0}{2} \cdot \cos k_2 t + \frac{x_0}{6} \cos k_3 t$,

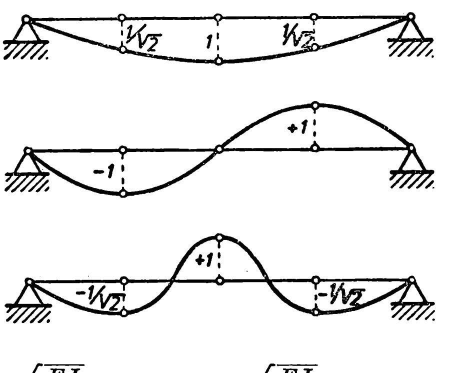
$$x_2 = \frac{x_0}{3} - \frac{x_0}{3} \cos k_3 t,$$

$$x_3 = \frac{x_0}{3} + \frac{x_0}{2} \cos k_2 t + \frac{x_0}{6} \cos k_3 t;$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{cg}{Q}}; \quad k_3 = \sqrt{\frac{3cg}{Q}}.$$

Die Hauptschwingungsformen sind in der Zeichnung dargestellt.

1339. Zu ermitteln sind die Frequenzen und die Schwingungsformen eines Systems, das aus drei gleichen Massen m besteht, die an einem Balken in gleichen Abständen befestigt sind. Der Balken ist frei auf Stützen gelagert. Die Balkenlänge ist l, das Flächenträgheitsmoment J, der Elastizitätsmodul E.



Lösung: $k_1 = 4{,}93 \sqrt{\dfrac{EJ}{ml^3}}, \quad k_2 = 19{,}6 \sqrt{\dfrac{EJ}{ml^3}}, \quad k_3 = 41{,}8 \sqrt{\dfrac{EJ}{ml^3}}.$

Die Hauptschwingungsformen sind in der Zeichnung dargestellt.

1340. Ein n-Massensystem mit zwischengeschalteten Federn der Federkonstanten c bildet ein mechanisches Filter. Für die erste Masse nehmen wir $x = x_0 \sin \omega t$ an.

Es ist nachzuweisen, daß das System als Filter niedriger Frequenz zu betrachten ist, d. h., daß nach Überschreiten einer bestimmten Frequenz die Schwingungsamplituden einzelner Massen sich im Verhältnis der Indizes dieser Massen zueinander nach dem Exponentialgesetz verhalten. Vor Überschreiten der Frequenz sind sie von dem harmonischen Gesetz abhängig.

Hinweis: In dieser und in den folgenden Aufgaben dieses Abschnittes ist die Lösung der Gleichungssysteme der Art $\alpha a_k + \beta a_{k-1} + \gamma a_{k+1} = 0$ in der Form $a_k = e^{k\lambda}$ zu suchen.

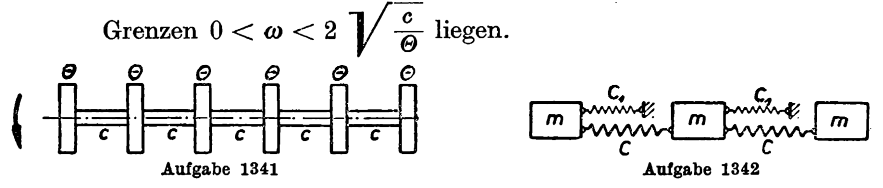
Lösung: Das Filter läßt die Schwingungen mit der Frequenz

$$0 < \omega < 2 \sqrt{\frac{c}{m}} \text{ durch.}$$

1341. Ein Drehschwingungsfilter besteht aus einer langen Welle mit aufgesetzten Schwungscheiben. Für die linke Scheibe gilt $\vartheta = \vartheta_0 \sin \omega t$. Es sind die erzwungenen Schwingungen des Systems zu ermitteln und die Schwingungsamplituden einzelner Scheiben zu errechnen. Das Trägheitsmoment jeder Scheibe ist Θ, die Federkonstanten c der Wellenabschnitte zwischen den Scheiben sind

gleich groß. Die erhaltene Lösung ist zu untersuchen, und es ist nachzuweisen, daß das System ein Filter für niedrige Frequenzen darstellt.

Lösung: $\vartheta_k = \vartheta \cos \mu k \sin \omega t + \sin \mu k c_1 \sin \omega t$; $\sin \frac{\mu}{2} = \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{\Theta}{c}}$, wobei ϑ_k der Drehwinkel der Scheibe k ist, c_1 ist eine willkürliche Konstante, die aus den Grenzbedingungen am Wellenende ermittelt wird. Die erste Scheibe hat den Index 0. Die Frequenz muß in den Grenzen $0 < \omega < 2 \sqrt{\frac{c}{\Theta}}$ liegen.



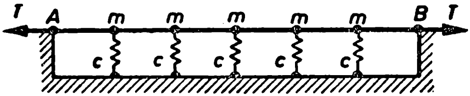
Aufgabe 1341 Aufgabe 1342

1342. Ein mechanisches System, welches ein Filter für Längsschwingungen darstellt, besteht aus Massen m, die durch Federn mit der Federkonstanten c verbunden sind. Parallel zu diesen Federn ist an jede Masse je eine Feder mit der Federkonstanten c_1 angesetzt, die die Masse m mit einem festen Punkt verbindet. Die erste Masse schwingt nach $x = x_0 \sin \omega t$. Es ist zu beweisen, daß bei Werten ω, die in bestimmten Grenzen liegen, die Schwingungsamplituden der einzelnen Massen sich nach dem harmonischen Gesetz verändern. Es sind die entsprechenden Grenzfrequenzen zu ermitteln.

Lösung: Das Durchlässigkeitsband wird durch eine Ungleichung ermittelt.

$$\sqrt{\frac{c_1}{m}} < \omega < \sqrt{\frac{c_1 + 4c}{m}}.$$

1343. Ein System mit vielen Massen m, die auf eine Saite AB aufgesetzt sind, bildet ein mechanisches Filter für Querschwingungen. Die Saite ist mit einer Kraft T gespannt und wird von den Federn mit den Federkonstanten c gehalten. Zu berechnen sind die Frequenzen, die den Filtergrenzen entsprechen.



Lösung: Die Grenzfrequenzen werden durch die Ungleichung ermittelt:

$$\sqrt{\frac{c}{m}} < \omega < \sqrt{\frac{c}{m} + \frac{4T}{ma}}.$$

1344. Eine Schnur von der Länge nl hängt vertikal an einem Ende und ist in gleichen Abständen l durch n Massenpunkte m belastet. Es sind die Bewegungsgleichungen aufzustellen und für $n = 3$ die Frequenzen der Querschwingungen des Systems zu ermitteln.

Lösung: Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$m\ddot{x}_k = -\frac{mg}{l} [(2n - 2k + 1) x_k - (n - k + 1) x_{k-1} - (n - k) x_{k+1}],$$

wobei x_k die Querverschiebung der $k$ten Masse ist.

Die oberste Masse hat den Index 1.

$$\omega_1 = 0{,}646 \sqrt{\frac{g}{l}}; \quad \omega_2 = 1{,}515 \sqrt{\frac{g}{l}}; \quad \omega_3 = 2{,}505 \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

1345. Ermittelt werden sollen die Frequenzen der freien Querschwingungen einer gespannten Schnur mit n Massen m, die voneinander im Abstand l angebracht sind. Die Schnurspannkraft ist P.

Hinweis: Es sollen Bewegungsgleichungen mit $y_k = \bar{y}_k \sin(\omega t)$ als Differenzengleichungen gelöst werden.

Lösung: $\omega = 2\sqrt{\frac{P}{ml}} \sin\left(\frac{\pi s}{2n}\right); \quad 1 \leqq s \leqq n-1.$

50. Dynamische Stabilität

1346. Ein Doppelpendel, das aus zwei Stäben der Länge l und den Massenpunkten mit der Masse m gebildet wird, hängt an einer horizontalen Achse. Diese dreht sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse z. Es soll die Stabilität der vertikalen Gleichgewichtslage des Pendels ermittelt werden.

Lösung: Bei $\frac{g}{l\omega^2} > 1 + \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist die vertikale Lage des Pendelgleichgewichtes stabil.

1347. Eine Kugel befindet sich in einem glatten Rohr, das nach der Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ gebogen ist und sich um die vertikale Achse Oz mit konstanter Winkelgeschwindigkeit (die Achse Oz ist nach unten gerichtet) dreht. Es sollen die Lage des relativen Gleichgewichtes der Kugel und ihre Stabilität ermittelt werden.

Lösung: Bei $\omega^2 \leqq \frac{gc}{a^2}$ sind zwei Gleichgewichtslagen möglich:

a) $x = 0,\ z = c$ (stabil); b) $x = 0,\ z = -c$ (labil).

Bei $\omega^2 > \frac{gc}{a^2}$ sind drei Gleichgewichtslagen möglich und zwar:

a) $x = 0,\ z = +c$ (labil); b) $x = 0,\ z = -c$ (labil);

c) $z = +\frac{gc^2}{\omega^2 a^2}$ (stabil).

1348. Eine Kugel befindet sich in einem glatten Rohr, das nach der Gleichung der Parabel $x^2 = 2pz$ gebogen ist und sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse Oz dreht. (Die positive Richtung der Achse Oz geht nach oben.)

Es soll die relative Gleichgewichtslage der Kugel festgestellt und ihre Stabilität ermittelt werden.

Lösung: Es gibt nur eine Gleichgewichtslage $z = 0$. Sie ist bei $\omega^2 < \frac{g}{p}$ stabil und bei $\omega^2 > \frac{g}{p}$ labil; bei $\omega^2 = \frac{g}{p}$ herrscht indifferentes Gleichgewicht.

1349. Ein Massenpunkt kann sich auf einer glatten flachen Kurve bewegen, die sich mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale Achse dreht. Die potentielle Energie $V(s)$ des Punktes ist gegeben und hängt nur von seiner Lage ab, die durch den Bogen s längs der Kurve bestimmt wird. $r(s)$ ist der Punktabstand von der Drehachse.

Es soll die Frequenz der Schwingungen des Punktes um seine relative Gleichgewichtslage ermittelt werden.

Lösung: $k^2 = \frac{1}{m}\left(\frac{d^2 V}{ds^2} - \frac{d}{ds}\left[mr\frac{dr}{ds}\right]\omega^2\right)_{s = s_0}$,

wobei s_0 aus der Gleichung

$\left(\frac{dV}{ds}\right)_{s = s_0} = \omega^2\left(mr\frac{dr}{ds}\right)_{s = s_0}$ ermittelt wird.

1350. Ein Massenpunkt mit der Masse m beschreibt unter dem Einfluß der Zentripetalkraft einen Kreis mit dem Radius r. Die Kraft ist proportional der n-ten Potenz des Abstandes r: $P = ar^n$. Es sind die Bedingungen zu ermitteln, bei denen die Bewegungsbahn dem Ausgangskreis nahe kommt.

Lösung: Bei $n < -3$ ist die Bewegung labil, bei $n > -3$ ist sie stabil.

1351. Ein Körper schwingt frei um die horizontale Achse AB. Diese Achse dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale Achse Oz. Der Körper ist symmetrisch (vgl. Zeichnung). Die Linie, die den Punkt O mit dem Schwerpunkt des Körpers G verbindet, dient als Hauptträgheitsachse. C ist das Massenträgheitsmoment des Körpers bezüglich der Achse OG, A das Massenträgheitsmoment bezüglich der horizontalen Achse, die durch den Punkt G läuft. B ist das Massenträgheitsmoment bezüglich der dritten Koordinatenachse senkrecht zu OG, und h ist der Abstand des Körperschwerpunktes G vom Punkt O. M bezeichnet die Körpermasse. Es sind die möglichen Bewegungen zu ermitteln und ihre Stabilität zu untersuchen.

Lösung: Für die möglichen Gleichgewichtslagen ergeben sich folgende Neigungswinkel der Geraden OG gegen die Achse Oz:

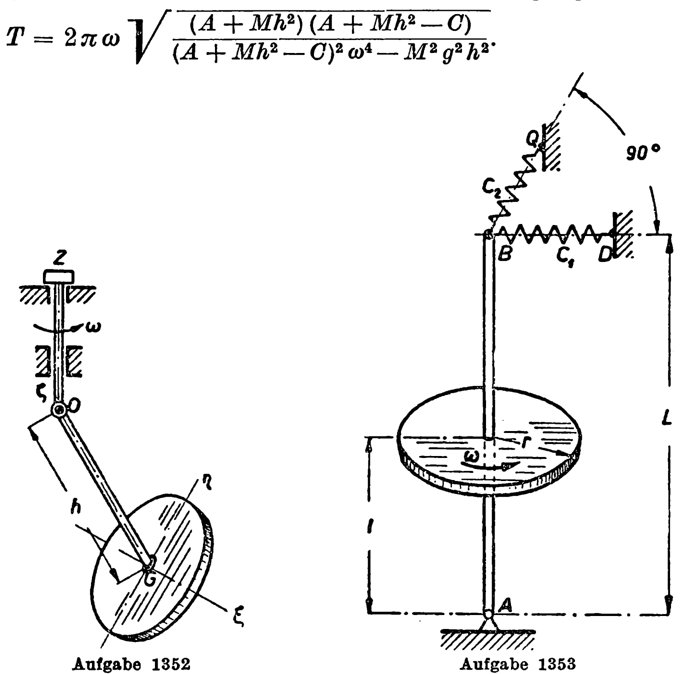
$$\varphi = 0; \quad \varphi = \varphi_0 = \arccos\frac{Mgh}{(B - C)\omega^2}; \quad \varphi = \pi.$$

Für $Mgh > (B - C)\omega^2$ ist die Gleichgewichtslage in $\varphi = 0$ stabil; für $B > C$ und $\omega^2 > \left|\frac{Mgh}{B - C}\right|$ ist sie labil. Für $\omega^2 > \left|\frac{Mgh}{B - C}\right|$ existiert die Gleichgewichtslage in $\varphi = \varphi_0$, sie ist bei $B > C$ stabil, bei $B < C$ labil. Die Gleichgewichtslage in $\varphi = \pi$ ist stabil für $G > B$ und $\omega^2(C - B) > Mgh$, labil für $\left|\frac{Mgh}{B - C}\right| > \omega^2$.

1352. Ermittelt werden soll die Lage des relativen Gleichgewichtes eines Pendels, das mit einem Universalscharnier O an einer vertikalen Achse aufgehängt ist und sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Das Pendel ist symmetrisch zur Längsachse, A und C sind Hauptträgheitsmomente (Hauptträgheitsachsen ξ, η und ζ). Der Abstand des Pendelschwerpunktes vom Gelenk ist h. Die Stabilität der Gleichgewichtslage des Pendels ist zu bestimmen, und die Schwingungszeit der mittleren Gleichgewichtslage soll ermittelt werden.

Lösung: Die Gleichgewichtslage und ihre Stabilität werden durch Formeln ermittelt, die in der Lösung der vorherigen Aufgabe gegeben sind. (Darin ist $B = A$ anzunehmen.) Die Schwingungszeit ist

$$T = 2\pi\omega\sqrt{\frac{(A + Mh^2)(A + Mh^2 - C)}{(A + Mh^2 - C)^2\omega^4 - M^2g^2h^2}}.$$



Aufgabe 1352 Aufgabe 1353

1353. Die vertikale symmetrische Achse einer dünnen runden Scheibe mit dem Radius r und dem Gewicht Q kann sich frei um den Punkt A drehen und wird im Punkt B von zwei Federn gehalten. Die Federachsen sind horizontal und stehen senkrecht zueinander. Die Federkonstanten sind c_1 und c_2, wobei $c_2 > c_1$. Die Federn sind im Abstand L von der unteren Stütze an der Scheibenachse befestigt. Der Scheibenabstand von der unteren Stütze ist l. Es soll die Winkelgeschwindigkeit ω ermittelt werden, die man der Scheibe versetzen muß, um eine Drehstabilität zu erreichen.

Lösung: Bei $Ql < c_1L^2$ ist das System bei beliebiger Winkelgeschwindigkeit stabil. Bei $Ql > c_2L^2$ ist das System stabil, wenn $\omega > \omega^*$ ist, wobei

$$\omega^* = \sqrt{\frac{2gl}{r^2}}\left\{\sqrt{1 - \frac{c_1L^2}{Ql}} + \sqrt{1 - \frac{c_2L^2}{Ql}}\right\}.$$

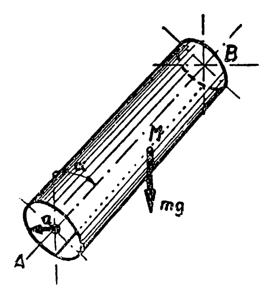
Bei $c_1L^2 < Ql < c_2L^2$ ist das System bei jeder Winkelgeschwindigkeit labil.

1354. Ein Massenpunkt M bewegt sich auf der Oberfläche eines kreisförmigen Zylinders mit dem Radius a. Seine Achse steht unter dem Winkel α schräg zur Vertikalen.

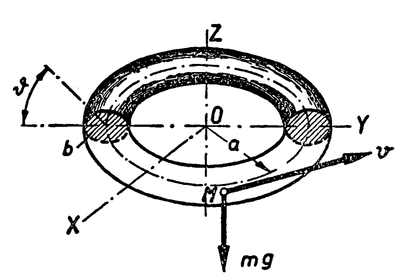
Es sollen die Bewegungsgleichungen des Punktes aufgestellt und die Bewegungsstabilität entlang der unteren ($\varphi = 0$) und oberen ($\varphi = \pi$) Mantellinie untersucht werden.

Lösung: Die Bewegung auf der oberen Mantellinie ist labil. Die Schwingungszeit bei Bewegung entlang der unteren Mantellinie ist:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g \sin \alpha}}.$$



Aufgabe 1354



Aufgabe 1355

1355. Ein Massenpunkt bewegt sich auf einer glatten Fläche, die durch die Parameter-Gleichungen gegeben ist:

$$x = \varrho \cos \psi; \quad y = \varrho \sin \psi; \quad z = b \sin \vartheta; \quad \varrho = a + b \cos \vartheta$$

(die Achse z ist vertikal nach oben gerichtet). Es sollen die möglichen Bewegungen des Punktes bei stetiger Änderung des Winkels ermittelt und die Stabilität untersucht werden.

Lösung: Die Werte $\vartheta = \vartheta_i =$ konst. werden aus der Gleichung $(1 + \alpha \cos \vartheta_i) = -\beta \operatorname{ctg} \vartheta_i$ bestimmt,

wobei $\alpha = \frac{b}{a}$, $\beta = \frac{g}{a\omega^2}$; $\dot{\psi} = \omega =$ konst. ist. Diese Gleichung läßt zwei grundverschiedene Lösungen zu:

$$-\frac{\pi}{2} < \vartheta_1 < 0; \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta_2 < \pi.$$

Die Bewegung, die der ersten Lösung entspricht, ist stabil, die der zweiten labil.

1356. Es ist die Bewegungsstabilität eines Reifens, der mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω auf einer horizontalen Fläche rollt, zu ermitteln. Die Reifenfläche ist vertikal, der Reifenradius ist a.

Lösung: Die Bewegung ist stabil, wenn $\omega^2 > \frac{g}{4a}$.

1357. Ein Rad mit vier symmetrisch verteilten Speichen rollt auf einer rauhen Fläche. Die Radfläche ist vertikal. Der Radreifen und die Speichen sind aus dünnem, schwerem Draht gefertigt. Der Radradius ist a, die Mittelpunktsgeschwindigkeit des Rades im Anfangszustand ist v. Es ist die Bewegungsstabilität zu untersuchen.

Lösung: Die Bewegung ist stabil bei

$$v^2 > \frac{\pi + 2}{4\left(\pi + \frac{4}{3}\right)} ag.$$

1358. Es soll die Bewegungsstabilität eines Reifens mit dem Radius a ermittelt werden, der sich um den vertikalen Durchmesser mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Der untere Reifenpunkt kommt mit der horizontalen Ebene in Berührung.

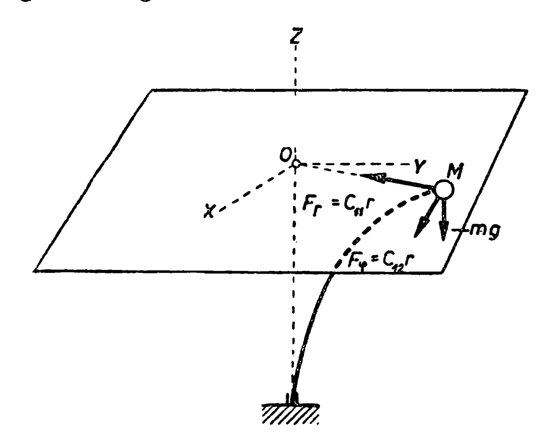
Lösung: Die Bewegung ist stabil bei $\omega^2 > \frac{2}{3} \frac{g}{a}$.

1359. Auf einen Massenpunkt mit der Masse m, der von der Gleichgewichtslage abweicht, wirken die Kraft F_r, die der Größe nach proportional der Abweichung $OM = r$ aus dieser Lage und gegen r gerichtet ist, und die Kraft F_φ, die senkrecht zu F_r steht. Sie ist der Größe nach ebenfalls r proportional:

$$F_r = c_{11}\, r, \; F_\varphi = c_{12}\, r.$$

Es ist die Stabilität der Gleichgewichtslage des Punktes zu ermitteln (Schwingungen).

Hinweis: Bei den angegebenen Bedingungen ist die Punktmasse am freien Ende eines gebogenen und gedrehten Stabes befestigt. Am anderen Ende ist der Stab fest eingespannt. Die geradlinige Stabform entspricht der Gleichgewichtslage.



Lösung: Das Gleichgewicht ist labil.

1360. Bei Ermittlung der Bewegungsstabilität des Punktes aus der vorigen Aufgabe ist der Einfluß des Reibungswiderstandes, der proportional der ersten Geschwindigkeitspotenz ist, zu berücksichtigen. $R_x = -\beta \dot{x}$; $R_y = -\beta \dot{y}$ ($\beta =$ Reibungskoeffizient).

Lösung: Das Gleichgewicht ist stabil bei $\beta^2 c_{11} > m c_{12}^2$.

1361. Sind bei dem Stab, der in der Aufgabe 1359 beschrieben ist, die Biegesteifigkeiten ungleich, dann werden die Reaktionen vom Stabende, die die Masse m beeinflussen, durch die Formeln ermittelt:

$$F_x = -c_{11}x + c_{12}y;$$
$$F_y = c_{21}x - c_{22}y.$$

Es sind die Bedingungen der Gleichgewichtsstabilität zu ermitteln.

Lösung: Bei $(c_{11} - c_{22})^2 + 4\,c_{12}\,c_{21} > 0$ ist das Gleichgewicht stabil.

1362. Die Bewegungsgleichung der Kupplung des Zentrifugalreglers einer Dampfmaschine ist $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = A\,(\omega - \omega_0)$, wobei x die Verschiebung der Kupplung des Reglers, m die Masse des Systems, β der Reibungskoeffizient, c die Federkonstante der Reglerfedern, ω die momentane und ω_0 die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Maschine und A eine Konstante sind. Die Bewegungsgleichung der Maschine ist $\Theta \frac{d\omega}{dt} = -Bx$, wobei B eine Konstante und Θ das reduzierte Trägheitsmoment der Motordrehteile sind.

Es sollen die Stabilitätsbedingungen des Systems, bestehend aus Motor und Regler, ermittelt werden.

Lösung: Das System ist stabil bei $0 < AB < \Theta \frac{c\beta}{m}$ (c, β, Θ werden als positiv angenommen).

1363. Ein symmetrischer Kreisel, dessen Spitze in einem festen Lager untergebracht ist, dreht sich um seine vertikale Achse. Auf diesem Kreisel ist ein zweiter Kreisel, der sich ebenfalls um die vertikale Achse dreht, aufgesetzt. Die Achsenspitze des zweiten Kreisels stützt sich auf das Achsenende des ersten Kreisels. M und M' sind die Massen vom oberen und unteren Kreisel, C und C' sind die Trägheitsmomente zur Symmetrieachse, A und A' sind die Trägheitsmomente zu den horizontalen Achsen, die durch die Spitzen verlaufen, c und c' sind die Abstände der Kreiselschwerpunkte von den Spitzen, und h ist der Abstand zwischen den Spitzen. Die Winkelgeschwindigkeiten der Kreisel sind ω und ω'. Es sind die Stabilitätsbedingungen des Systems zu ermitteln.

Lösung: Das System ist stabil, wenn alle Wurzeln der Gleichung vierter Potenz verschieden sind und reelle Werte ergeben.

$$[AA' + Mh^2(A - Mc^2)]\,\lambda^4 + [A'C'\omega' + C\omega\,(A' + Mh^2)]\,\lambda^3 +$$
$$+ [A\,(M'c' + Mh)\,g + (A' + Mh^2)\,Mcg + CC'\omega\omega']\,\lambda^2 +$$
$$+ [C\omega\,(M'c' + Mh)\,g + C'\omega' Mcg]\,\lambda + Mc\,(M'c' + Mh)\,g^2 = 0.$$